สสวท

คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕

คณิตศาสตร์
เล่ม ๑

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

คู่มือครู

รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๑

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) มีหน้าที่ในการพัฒนาหลักสูตร วิธีการเรียนรู้ การประเมินผล การจัดทำหนังสือเรียน คู่มือครู แบบฝึกทักษะ กิจกรรม และสื่อการเรียนรู้เพื่อใช้ประกอบการเรียนรู้ในกลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๑ นี้ จัดทำตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีเนื้อหาสาระ ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน การวิเคราะห์ความสอดคล้องของแบบฝึกหัดท้ายบทกับจุดมุ่งหมายประจำบท ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู ซึ่งเป็นความรู้ที่ครูควรทราบนอกเหนือจากเนื้อหาในหนังสือเรียน ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทพร้อมเฉลย รวมทั้งเฉลยแบบฝึกหัด ซึ่งสอดคล้องกับหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๑ ที่ต้องใช้ควบคู่กัน

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่า คู่มือครูเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้และเป็นส่วนสำคัญในการพัฒนาคุณภาพและมาตรฐานการศึกษากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิ บุคลากรทางการศึกษา และหน่วยงานต่าง ๆ ที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำไว้ ณ โอกาสนี้

(ศาสตราจารย์ชูกิจ ลิมปิจำนงค์)
ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อต้องการพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ด้วยการลงมือปฏิบัติทำกิจกรรมและแก้ปัญหาที่หลากหลายเพื่อให้ผู้เรียนเกิดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งมีทักษะแห่งศตวรรษที่ ๒๑ สสวท. จึงได้จัดทำคู่มือครูประกอบการใช้หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๑ ที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตร เพื่อเป็นแนวทางให้โรงเรียนนำไปจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๑ นี้ ประกอบด้วยเนื้อหาสาระ ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน การวิเคราะห์ความสอดคล้องของแบบฝึกหัดท้ายบทกับจุดมุ่งหมายประจำบท ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครูซึ่งเป็นความรู้ที่ครูควรทราบนอกเหนือจากเนื้อหาในหนังสือเรียน ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทพร้อมเฉลย รวมทั้งเฉลยแบบฝึกหัด ซึ่งครูผู้สอนสามารถนำไปใช้เป็นแนวทางในการวางแผนการจัดการเรียนรู้ให้บรรลุจุดประสงค์ที่ตั้งไว้ โดยสามารถนำไปจัดกิจกรรมการเรียนรู้ได้ตามความเหมาะสมและความพร้อมของโรงเรียน ในการจัดทำคู่มือครูเล่มนี้ ได้รับความร่วมมือเป็นอย่างดียิ่งจากผู้ทรงคุณวุฒิ คณาจารย์ นักวิชาการอิสระ รวมทั้งครูผู้สอน นักวิชาการ จากสถาบัน และสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชน จึงขอขอบคุณมา ณ ที่นี้

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่า คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๑ นี้ จะเป็นประโยชน์แก่ผู้สอนและผู้ที่เกี่ยวข้องทุกฝ่าย ที่จะช่วยให้จัดการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้คู่มือครูเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

แนะนำการใช้คู่มือครู

ในหนังสือเล่มนี้แบ่งเป็น 3 บท ตามหนังสือเรียนหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 โดยแต่ละบทจะมีส่วนประกอบ ดังนี้

ตัวชี้วัด

ตัวชี้วัดระบุสิ่งที่นักเรียนพึงรู้และปฏิบัติได้ รวมทั้งคุณลักษณะของผู้เรียนในแต่ละระดับชั้น ซึ่งสะท้อนถึงมาตรฐานการเรียนรู้ มีความเฉพาะเจาะจงและมีความเป็นรูปธรรม นำไปใช้ในการกำหนดเนื้อหา จัดทำหน่วยการเรียนรู้ จัดการเรียนการสอน และเป็นเกณฑ์สำคัญสำหรับการวัดประเมินผลเพื่อตรวจสอบคุณภาพผู้เรียน

จุดมุ่งหมาย

เป้าหมายที่นักเรียนควรไปถึงหลังจากเรียนจบบทนี้

ความรู้ก่อนหน้า

ความรู้ที่นักเรียนจำเป็นต้องมีก่อนที่จะเรียนบทนี้

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

ประเด็นเกี่ยวกับเนื้อหาที่ครูควรเน้นย้ำกับนักเรียน ประเด็นเกี่ยวกับเนื้อหาที่ครูควรระมัดระวัง จุดประสงค์ของตัวอย่างที่นำเสนอในหนังสือเรียน เนื้อหาที่ควรทบทวนก่อนสอนเนื้อหาใหม่ และประเด็นที่ครูควรตระหนักในการสอน

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

ประเด็นที่นักเรียนมักเข้าใจผิดเกี่ยวกับเนื้อหา

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

ประเด็นที่ครูควรทราบเกี่ยวกับแบบฝึกหัด เช่น จุดมุ่งหมายของแบบฝึกหัด เนื้อหาที่ควรทบทวนก่อนทำแบบฝึกหัด และเรื่องที่ครูควรให้ความสำคัญในการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

กิจกรรมในคู่มือครู

กิจกรรมที่คู่มือครูเล่มนี้เสนอแนะไว้ให้ครูนำไปใช้ในชั้นเรียน ประกอบด้วยกิจกรรมนำเข้าสู่บทเรียน ที่ใช้เพื่อตรวจสอบความรู้ก่อนหน้าที่นักเรียนจำเป็นต้องทราบก่อนเรียนเนื้อหาใหม่ และกิจกรรมที่ใช้สำหรับสร้างความคิดรวบยอดในเนื้อหา โดยหลังจากทำกิจกรรมแล้ว ครูควรเชื่อมโยงผลที่ได้จากการทำกิจกรรมกับความคิดรวบยอดที่ต้องการเน้น ทั้งนี้ ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมเหล่านี้ด้วยตนเอง

กิจกรรมในหนังสือเรียน

กิจกรรมที่นักเรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม (learning and innovation skills) ที่จำเป็นสำหรับศตวรรษที่ 21 อันได้แก่ การคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม (creative and innovation) การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา (critical thinking and problem solving) การสื่อสาร (communication) และการร่วมมือ (collaboration)

เฉลยกิจกรรมในหนังสือเรียน

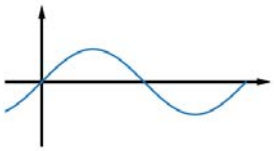
เฉลยคำตอบหรือตัวอย่างคำตอบของกิจกรรมในหนังสือเรียน

แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน

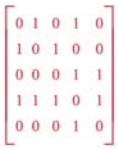
ตัวอย่างการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน ที่มีขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ซึ่งเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้และพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

สารบัญ

บทที่	เนื้อหา	หน้า
1	**บทที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ**	**1**
	1.1 เนื้อหาสาระ	3
	1.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน	13
	1.3 แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน	37
	1.4 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน	45
	1.5 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท	46
	1.6 ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู	49
	1.7 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท และเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท	54
2	**บทที่ 2 เมทริกซ์**	**59**
	2.1 เนื้อหาสาระ	61
	2.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน	70
	2.3 แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน	85
	2.4 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน	94
	2.5 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท	95
	2.6 ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู	97
	2.7 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท และเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท	115

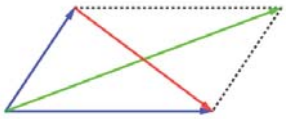


ฟังก์ชันตรีโกณมิติ



เมทริกซ์

บทที่	เนื้อหา	หน้า
3	**บทที่ 3 เวกเตอร์**	**123**
	3.1 เนื้อหาสาระ	125
	3.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน	138
	3.3 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน	150
	3.4 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท	151
	3.5 ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู	154
	3.6 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท และเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท	163



เวกเตอร์

เฉลยแบบฝึกหัดและวิธีทำโดยละเอียด **177**

บทที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ 177

บทที่ 2 เมทริกซ์ 329

บทที่ 3 เวกเตอร์ 397

แหล่งเรียนรู้เพิ่มเติม 465

บรรณานุกรม 466

คณะผู้จัดทำ 467

บทที่ 1

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ตรีโกณมิติ เป็นเรื่องที่นักเรียนได้ศึกษามาบ้างแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ซึ่งอยู่ในรูปอัตราส่วนของความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และส่วนมากนำไปประยุกต์ในเรื่องระยะทางและความสูง ด้วยเหตุนี้อาจทำให้นักเรียนบางคนคิดว่าตรีโกณมิติเป็นวิชาที่เกี่ยวกับด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมเท่านั้น แต่ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 จะศึกษาตรีโกณมิติในรูปของฟังก์ชันของจำนวนจริงและฟังก์ชันของมุม โดยเริ่มด้วยฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ และการหาระยะทางและความสูง

ในบทเรียนนี้มุ่งเน้นให้นักเรียนบรรลุผลการเรียนรู้ตามสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม และบรรลุจุดมุ่งหมายดังต่อไปนี้

ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

ผลการเรียนรู้

- เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- แก้สมการตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

- ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน
- เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ
- กฎของโคไซน์และกฎของไซน์

จุดมุ่งหมาย

1. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
2. หาคาบ แอมพลิจูด เรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
3. ใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมในการแก้ปัญหา
4. หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
5. พิสูจน์เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
6. แก้สมการตรีโกณมิติ
7. ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา
8. ใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติในการแก้ปัญหา

ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
- ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- เรขาคณิตวิเคราะห์

ipst.me/8447

1.1 เนื้อหาสาระ

1. การกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ทำได้โดยใช้วงกลมรัศมียาว 1 หน่วย ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดเป็นหลักในการกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และจะเรียกวงกลมดังกล่าวว่า **วงกลมหนึ่งหน่วย** วงกลมนี้เป็นกราฟของความสัมพันธ์

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ จากจุด $(1, 0)$ วัดระยะไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ยาว $|\theta|$ หน่วย จะถึงจุด (x, y) ซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย โดยมีข้อตกลงสำหรับทิศทางของการวัดดังนี้

เมื่อ $\theta > 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

เมื่อ $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

เมื่อ $\theta = 0$ จุดปลายส่วนโค้งคือจุด $(1, 0)$

2. กำหนดฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ และ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สำหรับแต่ละจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$f(\theta) = x$$
$$g(\theta) = y$$

เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาหรือตามเข็มนาฬิกา

เรียกฟังก์ชัน g และ f ดังกล่าวนี้ว่า **ฟังก์ชันไซน์** และ **ฟังก์ชันโคไซน์** ตามลำดับ และจะเขียนแทน g ด้วย sin และเขียนแทน f ด้วย cos ดังนี้

$$y = \sin\theta$$
$$x = \cos\theta$$

3. วงกลมหนึ่งหน่วยซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$ จะเห็นว่า $-1 \le y \le 1$ และ $-1 \le x \le 1$ ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์เป็นจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1 นั่นคือ เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง ตั้งแต่ -1 ถึง 1 และโดเมนของฟังก์ชันทั้งสอง คือ เซตของจำนวนจริง

4. จากสมการ $x^2 + y^2 = 1$, $y = \sin\theta$ และ $x = \cos\theta$ จะได้ความสัมพันธ์ของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ดังนี้ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

5. ให้ θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้

$$\sin\theta = \sin(\theta - 2n\pi)$$
$$\cos\theta = \cos(\theta - 2n\pi)$$

6. การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π มีข้อสรุปดังนี้

ให้ α เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$$

7. นอกจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ยังมีฟังก์ชันตรีโกณมิติที่สำคัญอีกหลายฟังก์ชัน ดังต่อไปนี้

ฟังก์ชันแทนเจนต์ เขียนแทนด้วย tan

ฟังก์ชันเซแคนต์ เขียนแทนด้วย sec

ฟังก์ชันโคเซแคนต์ เขียนแทนด้วย cosec หรือ csc

ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ เขียนแทนด้วย cot

8. **บทนิยาม 1**

สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$
$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$
$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

9. โดเมนของฟังก์ชัน tan และ sec คือ $\mathbb{R}-\left\{x\middle|x=\frac{(2n+1)\pi}{2},n\in\mathbb{Z}\right\}$

โดเมนของฟังก์ชัน cot และ cosec คือ $\mathbb{R}-\{x|x=n\pi,n\in\mathbb{Z}\}$

เรนจ์ของฟังก์ชัน tan และ cot คือ $\mathbb{R}$

เรนจ์ของฟังก์ชัน sec และ cosec คือ $\mathbb{R}-\{x|-1<x<1\}$

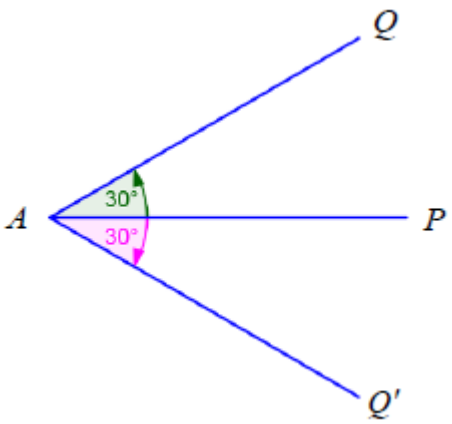
10. ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta} \quad \text{เมื่อ } \tan\theta\neq 0$$
$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta \quad \text{เมื่อ } \cos\theta\neq 0$$
$$1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta \quad \text{เมื่อ } \sin\theta\neq 0$$

11. ตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ บางจำนวน เมื่อ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
0	0	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม	0

12. กำหนดส่วนของเส้นตรง AP ต้องการสร้าง $P\hat{A}Q$ ให้มีขนาด 30 องศา โดยใช้โพรแทรกเตอร์วัดขนาดของมุม ทำได้โดยวางโพรแทรกเตอร์ทับส่วนของเส้นตรง AP ซึ่งสามารถวัดขนาดของมุมที่ต้องการสร้างได้ 2 แบบ คือ วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา และวัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ดังรูป



เรียก A ว่า **จุดยอด** ของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง AP ว่า **ด้านเริ่มต้น** ของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง AQ และ AQ' ว่า **ด้านสิ้นสุด** ของมุม

13. การวัดขนาดของมุมทำได้โดยการวัดจากด้านเริ่มต้นไปยังด้านสิ้นสุด สำหรับการบอกขนาดของมุมมีข้อตกลงว่า ถ้าวัดมุมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะแสดงขนาดของมุมด้วยจำนวนจริงบวก แต่ถ้าวัดมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกา จะแสดงขนาดของมุมด้วยจำนวนจริงลบ

14. หน่วยในการวัดมุมในที่นี้มี 2 ประเภท ได้แก่ องศาและเรเดียน

องศา เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $^\circ$ โดยมุมที่ด้านเริ่มต้นและด้านสิ้นสุดทับกันมีขนาด 0 องศา หรือ 360 องศา และแบ่งหน่วยองศาออกเป็นหน่วยย่อยคือ ลิปดา ($'$) และ พิลิปดา ($''$) ดังนี้

$$1^\circ = 60'$$
$$1' = 60''$$

เรเดียน เป็นหน่วยวัดมุมที่มีค่าเป็นจำนวนจริง โดยมีข้อตกลงว่ามุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้นเป็นมุมที่มีขนาด 1 เรเดียน ซึ่งการเขียนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนมักจะไม่เขียนหน่วยกำกับไว้ ดังนั้นถ้ากล่าวถึงขนาดของมุมโดยไม่มีหน่วยกำกับ ให้ถือว่ามุมนั้นมีหน่วยเป็นเรเดียน

ความสัมพันธ์ระหว่างองศาและเรเดียน คือ

360 องศา เท่ากับ 2π เรเดียน

หรือ 180 องศา เท่ากับ π เรเดียน

15. เมื่อจุดยอดของมุมอยู่ที่จุด $(0, 0)$ และด้านเริ่มต้นของมุมนั้นทาบไปตามแกน X ทางบวก จะกล่าวว่ามุมนั้นอยู่ใน**ตำแหน่งมาตรฐาน**
16. เมื่อกำหนดมุมขนาด θ เรเดียนให้หนึ่งมุม จะหาจุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมนั้นตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยได้เพียงจุดเดียว และจุดนั้นจะเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วยด้วย หรือส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม θ เรเดียน จะยาว $|\theta|$ หน่วย จะเห็นได้ว่า ไม่ว่าจะใช้วิธีวัดมุมหรือวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลม จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยจะเป็นจุดเดียวกับจุดปลายส่วนโค้ง
17. ไม่ว่าจะนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติในแง่ของมุมหรือในแง่ของความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนเหล่านั้นจะเท่ากัน เช่น $\cos\theta$ อาจหมายถึง cos ของมุมที่มีขนาด θ เรเดียน หรือ cos ของจำนวนจริง θ สำหรับการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นองศานั้นอาจหาได้โดยเปลี่ยนหน่วยวัดขนาดของมุมจากหน่วยองศาให้เป็นหน่วยเรเดียนก่อน แล้วจึงหาค่าของฟังก์ชันนั้น เช่นเดียวกับการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงทั่ว ๆ ไป
18. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก ดังนั้น $B\hat{A}C < 90^\circ$ จะได้

$$\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}$$

19. ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็น **ฟังก์ชันที่เป็นคาบ** กล่าวคือ สามารถแบ่งแกน X ออกเป็น **ช่วงย่อย** โดยที่ความยาวของแต่ละช่วงย่อยเท่ากันและกราฟในแต่ละช่วงย่อยมีลักษณะเหมือนกัน ความยาวของช่วงย่อยที่สั้นที่สุดที่มีสมบัติดังกล่าว เรียกว่า **คาบ** ของฟังก์ชัน สำหรับฟังก์ชันที่เป็นคาบซึ่งมีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด จะเรียกค่าที่เท่ากับครึ่งหนึ่งของผลต่างระหว่างค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนั้นว่า **แอมพลิจูด**

นั่นคือ ถ้า a เป็นค่าสูงสุด และ b เป็นค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่เป็นคาบ แล้วจะได้ว่าแอมพลิจูดของฟังก์ชันนี้คือ $\frac{1}{2}(a-b)$

20. โดเมน คาบ แอมพลิจูด และเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ในกรณีทั่วไป สรุปได้ดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	คาบ	แอมพลิจูด	เรนจ์
$y=\sin(nx),\ n>0$	$\mathbb{R}$	$\frac{2\pi}{n}$	1	$[-1,1]$
$y=\cos(nx),\ n>0$	$\mathbb{R}$	$\frac{2\pi}{n}$	1	$[-1,1]$
$y=a\sin(nx),\ n>0$	$\mathbb{R}$	$\frac{2\pi}{n}$	$\lvert a\rvert$	$[-\lvert a\rvert,\lvert a\rvert]$
$y=a\cos(nx),\ n>0$	$\mathbb{R}$	$\frac{2\pi}{n}$	$\lvert a\rvert$	$[-\lvert a\rvert,\lvert a\rvert]$

21. ฟังก์ชันแทนเจนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ และมีคาบเท่ากับ π
ฟังก์ชันโคเซแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ และมีคาบเท่ากับ 2π
ฟังก์ชันเซแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ และมีคาบเท่ากับ 2π
ฟังก์ชันโคแทนเจนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ และมีคาบเท่ากับ π

22. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม สรุปได้ดังนี้

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \cos\beta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{เมื่อ} \quad \tan\alpha\tan\beta\neq -1$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{เมื่อ} \quad \tan\alpha\tan\beta\neq 1$$

23. ค่าของ $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ และ $\cos(\alpha-\beta)$ เมื่อนำมาบวกหรือลบกัน จะได้ความสัมพันธ์ที่สำคัญดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
2\sin\alpha\cos\beta &= \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\\
2\cos\alpha\sin\beta &= \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\\
2\cos\alpha\cos\beta &= \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\\
2\sin\alpha\sin\beta &= \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

24. ความสัมพันธ์อื่น ๆ เป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sin\alpha-\sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}$$

25. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงซึ่งเป็นสองเท่าของ α แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha\\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\
\cos 2\alpha &= 1-2\sin^2\alpha\\
\cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha-1\\
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \text{เมื่อ } \tan^2\alpha \neq 1
\end{aligned}$$

26. เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน $1-1$ ดังนั้น ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้ากำหนดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติให้เหมาะสมจะพบว่า ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะเป็นฟังก์ชัน

27. **บทนิยาม 2**

ฟังก์ชัน arcsine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x=\sin y$ และ $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$

28. **บทนิยาม 3**

ฟังก์ชัน arccosine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x=\cos y$ และ $0\le y\le\pi$

29. **บทนิยาม 4**

ฟังก์ชัน arctangent คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \tan y$ และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

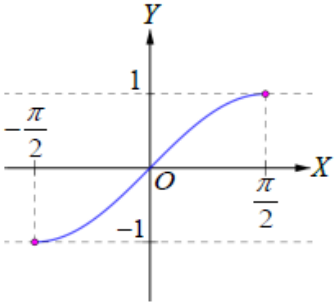
30. ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดโดเมนเพื่อให้ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชัน มีโดเมนและเรนจ์เป็นดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y = \sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1, 1]$
$y = \cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$
$y = \tan x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$

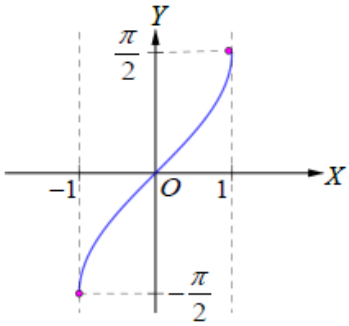
ฟังก์ชัน arcsine, arccosine และ arctangent มีโดเมนและเรนจ์ ดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = \arctan x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

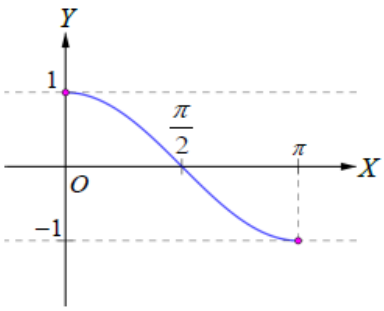
31. กราฟของฟังก์ชัน sine, cosine, tangent, arcsine, arccosine และ arctangent เป็นดังนี้



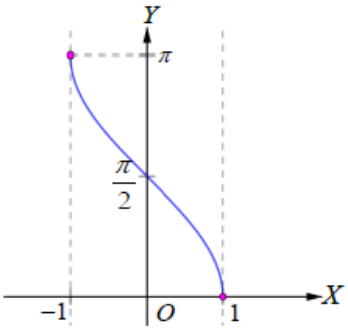
$y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$



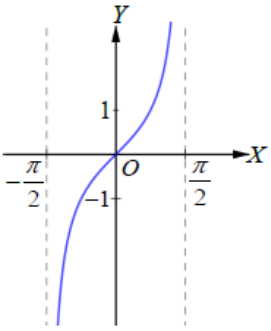
$y = \arcsin x, -1 \le x \le 1$



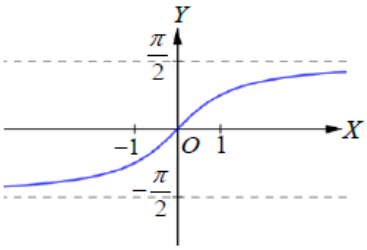
$y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi$



$y = \arccos x,\ -1 \le x \le 1$



$y = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



$y = \arctan x,\ x \in \mathbb{R}$

32. **สมการตรีโกณมิติ** คือ สมการที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติปรากฏอยู่

33. สมการตรีโกณมิติบางสมการ เช่น $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ จะเป็นจริงสำหรับทุกค่าของ θ ที่ทำให้หาค่าของฟังก์ชันที่ปรากฏอยู่ในสมการนั้นได้ คือ ค่าของ $\cot\theta$, $\tan\theta$ และ $\frac{1}{\tan\theta}$ เรียกสมการที่มีสมบัติเช่นสมการ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ ว่า **เอกลักษณ์**

34. การพิสูจน์เอกลักษณ์เป็นการแสดงให้เห็นว่าจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการเท่ากันจริง โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ การพิสูจน์เอกลักษณ์จึงช่วยให้เห็นความสัมพันธ์ต่าง ๆ ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติ และเอกลักษณ์ที่พิสูจน์แล้วสามารถนำไปอ้างอิงในการพิสูจน์เอกลักษณ์อื่น ๆ

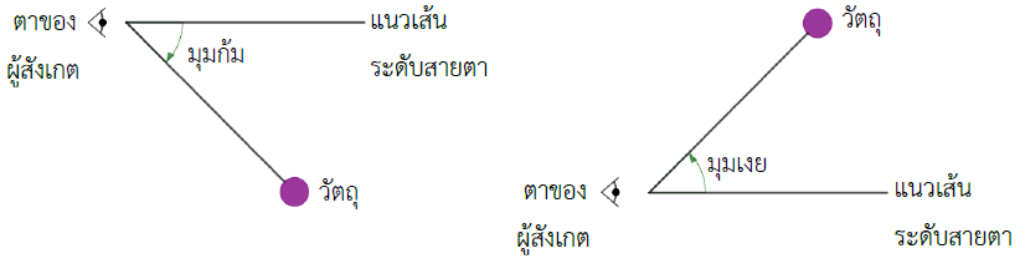
35. การแก้สมการตรีโกณมิติทำได้ในทำนองเดียวกันกับการแก้สมการทั่วไป โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อหาคำตอบของสมการ เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน 1–1 ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ อาจจะซ้ำกันได้ ดังนั้นในการหาคำตอบของสมการ ถ้าโจทย์ไม่ได้กำหนดให้คำตอบอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่งแล้ว คำตอบควรอยู่ในรูปค่าทั่วไป

36. **กฎของโคไซน์** ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ

จะได้
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

37. **กฎของไซน์** ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ จะได้
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

38. มุมก้มและมุมเงยเป็นมุมที่เกิดจากแนวเส้นระดับสายตา และแนวเส้นจากตาไปยังวัตถุ ถ้าวัตถุอยู่ต่ำกว่าแนวเส้นระดับสายตา มุมที่ได้เรียกว่า **มุมก้ม** แต่ถ้าวัตถุอยู่สูงกว่าแนวเส้นระดับสายตา มุมที่ได้เรียกว่า **มุมเงย** โดยขนาดของมุมก้มและมุมเงยจะเป็นจำนวนจริงบวกเสมอ



1.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

กิจกรรม : วงกลมหนึ่งหน่วย

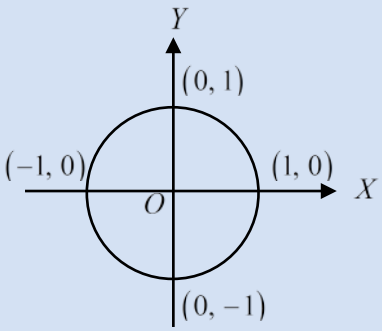
จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อสอนเกี่ยวกับจำนวนจริง θ ที่ได้จากการวัดระยะจากจุด $(1, 0)$ ไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาและตามเข็มนาฬิกา

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ $2-3$ คน แบบคละความสามารถ และให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเขียนกราฟของ $x^2 + y^2 = 1$ พร้อมทั้งเขียนพิกัดของจุดที่กราฟตัดกับแกน X และแกน Y

   แนวคำตอบ



2. จากวงกลมที่ได้ในข้อ 1 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันหาความยาวของส่วนโค้งที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปถึงจุดต่อไปนี้

   2.1 จุด $(0, 1)$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

   2.2 จุด $(-1, 0)$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

   2.3 จุด $(0, -1)$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

   2.4 จุด $(0, -1)$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

   2.5 จุด $(-1, 0)$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

   2.6 จุด $(0, 1)$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

แนวคำตอบ ความยาวของส่วนโค้งที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปถึง

- จุด $(0, 1)$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา และจุด $(0, -1)$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา คือ $\frac{\pi}{2}$ หน่วย
- จุด $(-1, 0)$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา และในทิศทางตามเข็มนาฬิกา คือ π หน่วย
- จุด $(0, -1)$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา และจุด $(0, 1)$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา คือ $\frac{3\pi}{2}$ หน่วย

หมายเหตุ

ในการหาความยาวส่วนโค้ง ครูอาจแนะนำให้นักเรียนพิจารณาความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย

3. ครูบอกข้อตกลงสำหรับทิศทางของการวัดเพื่อความสะดวกในการสื่อสารดังนี้

เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ จากจุด $(1, 0)$ วัดระยะไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ให้ยาว $|\theta|$ หน่วย จะถึงจุด (x, y) ซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย โดยมีข้อตกลงสำหรับทิศทางของการวัดดังนี้

เมื่อ $\theta > 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

เมื่อ $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

เมื่อ $\theta = 0$ จุดปลายส่วนโค้งคือจุด $(1, 0)$

4. จากข้อตกลงในข้อ 3 ครูให้นักเรียนหา θ สำหรับแต่ละความยาวส่วนโค้งในข้อ 2

แนวคำตอบ สำหรับส่วนโค้งที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปถึง

- จุด $(0, 1)$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะมี $\theta = \frac{\pi}{2}$
- จุด $(-1, 0)$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะมี $\theta = \pi$
- จุด $(0, -1)$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะมี $\theta = \frac{3\pi}{2}$
- จุด $(0, -1)$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา จะมี $\theta = -\frac{\pi}{2}$
- จุด $(-1, 0)$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา จะมี $\theta = -\pi$
- จุด $(0, 1)$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา จะมี $\theta = -\frac{3\pi}{2}$

หมายเหตุ

- เมื่อจบกิจกรรมนี้แล้ว ครูควรชี้แจงนักเรียนเพิ่มเติมว่า สำหรับวงกลมหนึ่งหน่วยในข้อ 1 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด โดยที่ $-1 \le x \le 1$ และ $-1 \le y \le 1$
- เมื่อนักเรียนทำกิจกรรมนี้แล้ว ครูอาจให้นักเรียนพิจารณาเพิ่มเติมกรณีที่ $\theta > 2\pi$

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- การศึกษาตรีโกณมิติในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นเป็นฟังก์ชันของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีหน่วยเป็นองศา ซึ่งมีโดเมนเป็น $(0, 90)$ แต่ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจะขยายโดเมนไปสู่เซตของจำนวนจริง โดยศึกษาฟังก์ชันตรีโกณมิติจากวงกลมหนึ่งหน่วย
- ในหัวข้อนี้สนใจฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงเท่านั้น
- ครูอาจให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ และ $\frac{\pi}{6}$ โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับระยะห่างระหว่างจุดและการสะท้อน ดังที่เสนอในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอื่น ๆ

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

- การแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง เช่น ในแบบฝึกหัด 1.1 ข้อ 1 สามารถทำได้โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1,0)$ ยาว $|\theta|$ หน่วย ตามทิศทางที่กำหนด (ดังแสดงในตัวอย่างที่ 1 และ 2) หรืออาจใช้ความรู้เกี่ยวกับการสมมาตรของวงกลมหนึ่งหน่วย (ดังแสดงในตัวอย่างที่ 3, 4 และ 5)
- การหาจำนวนจริง θ ที่ทำให้ได้ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติตามที่กำหนด เช่น ในแบบฝึกหัด 1.1 ข้อ 2 จะมีจำนวนจริง θ หลายจำนวนที่เป็นคำตอบ ดังนั้น ครูควรให้นักเรียนมีอิสระในการเขียนจำนวนจริง θ ที่ทำให้ได้ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติตามที่กำหนด

- ครูอาจให้เหตุผลประกอบแบบฝึกหัด 1.1 ข้อ 10 2) และ 3) เพื่อแสดงว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นจริง ดังนี้

2) $\sin\theta=\cos\theta$ เมื่อ θ คือ $\frac{\pi}{4}$ หรือ $\frac{5\pi}{4}$ เป็นจริง

เนื่องจาก $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$ และ $\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{5\pi}{4}$

3) $-2\le\sin\theta+\cos\theta\le 2$ เมื่อ $\theta\in\mathbb{Z}$ เป็นจริง

เนื่องจาก $-1\le\sin\theta\le 1$ และ $-1\le\cos\theta\le 1$ ดังนั้น $-2\le\sin\theta+\cos\theta\le 2$

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

นักเรียนมักเข้าใจผิดว่า $\cos^2\theta=\cos\theta^2$ และ $\sin^2\theta=\sin\theta^2$ ครูควรเน้นย้ำให้นักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับข้อตกลงของสัญลักษณ์อย่างถูกต้องว่า

$\cos^2\theta$ หมายถึง $(\cos\theta)(\cos\theta)$ แต่ $\cos\theta^2$ หมายถึง cos ของจำนวนจริง θ^2

$\sin^2\theta$ หมายถึง $(\sin\theta)(\sin\theta)$ แต่ $\sin\theta^2$ หมายถึง sin ของจำนวนจริง θ^2

ทั้งนี้ ข้อตกลงของสัญลักษณ์ดังกล่าวใช้สำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ที่จะได้เรียนในหัวข้อถัดไป

ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- เมื่อครูสอนเกี่ยวกับโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ควรให้นักเรียนเชื่อมโยงบทนิยาม 1 กับการหาโดเมนในการดำเนินการของฟังก์ชันซึ่งนักเรียนได้เรียนมาแล้วในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 บทที่ 1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เช่น การหาโดเมนของฟังก์ชันแทนเจนต์สามารถพิจารณาได้ดังนี้

เนื่องจาก โดเมนของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ $\mathbb{R}$

และ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $\cos\theta \neq 0$

จะได้ว่า โดเมนของฟังก์ชันของฟังก์ชันแทนเจนต์ คือ โดเมนของฟังก์ชัน $\frac{\sin}{\cos}$ นั่นคือ

$$D_{\sin} \cap \left(D_{\cos} - \left\{x \in D_{\cos} \middle| \cos(x) = 0\right\}\right) = \mathbb{R} \cap \left(\mathbb{R} - \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}\right)$$

$$= \mathbb{R} - \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชันแทนเจนต์ คือ $\mathbb{R} - \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$

นอกจากนี้ การหาโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ อาจพิจารณาจากกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งจะได้ศึกษาในหัวข้อ 1.4 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- การพิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ เมื่อ $\tan\theta \neq 0$ และ $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$ ที่นำเสนอ มีไว้เพื่อเป็นตัวอย่างของการพิสูจน์อย่างง่าย ทั้งนี้ นักเรียนจะได้เรียนเกี่ยวกับการพิสูจน์มากขึ้นในหัวข้อ 1.7 เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

- การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ในแบบฝึกหัด 1.2 ข้อ 6 นั้น ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนใช้เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ได้เรียนในหัวข้อ 1.1 และ 1.2 มาช่วยในการจัดรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ก่อนการแทนค่า
- การวัดผลประเมินผลเกี่ยวกับการพิสูจน์ในหัวข้อนี้ไม่ควรซับซ้อนมากนัก โดยไม่ควรยากมากกว่าแบบฝึกหัด 1.2 ข้อ 8 – 10

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

กิจกรรม : เรเดียนและองศา

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียนเกี่ยวกับมุมในหน่วยองศาและมุมในหน่วยเรเดียน

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูนำเข้าสู่กิจกรรมโดยอธิบายเกี่ยวกับการวัดมุมในหน่วยองศาและเรเดียน ดังนี้

   หน่วยวัดมุมที่รู้จักกันแล้ว คือ องศา โดยมุมที่ด้านเริ่มต้นและด้านสิ้นสุดทับกันมีขนาด 0 องศา หรือ 360 องศา และแบ่งหน่วยองศาออกเป็นหน่วยย่อย คือ ลิปดา และพิลิปดา นอกจากนี้ยังมีหน่วยวัดมุมที่สำคัญอีกหน่วยหนึ่ง คือ เรเดียน
2. ครูจับคู่นักเรียนแบบคละความสามารถ จากนั้นเปิดเว็บไซต์ ipst.me/10305
3. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่สำรวจความยาวส่วนโค้งของวงกลม ขนาดของมุมในหน่วยเรเดียน และขนาดของมุมในหน่วยองศา เมื่อวงกลมมีความยาวรัศมีเป็น 1 หน่วย โดย
   1) คลิกลากจุดบนสไลเดอร์เพื่อกำหนดความยาวรัศมีของวงกลมเป็น 1 หน่วย
   2) คลิกลากจุดสีชมพูบนเส้นรอบวงของวงกลมไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาให้อยู่ในจตุภาคที่ 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ ในขณะที่จุดสีชมพูอยู่ในตำแหน่งในแต่ละจตุภาค ให้บันทึกความยาวส่วนโค้ง ขนาดของมุมในหน่วยเรเดียน และขนาดของมุมในหน่วยองศาลงในตารางต่อไปนี้

ตำแหน่งของจุดในจตุภาคที่	1	2	3	4
ความยาวรัศมีของวงกลม (หน่วย)	1	1	1	1
ความยาวส่วนโค้ง (หน่วย)				
ขนาดของมุมในหน่วยเรเดียน				
ขนาดของมุมในหน่วยองศา				

4. จากตารางที่ได้ในข้อ 3. 2) ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันพิจารณาว่า
   - ความยาวส่วนโค้งกับขนาดของมุมในหน่วยเรเดียนมีความสัมพันธ์กันอย่างไร

     แนวคำตอบ

     จำนวนที่แทนความยาวส่วนโค้งเท่ากับจำนวนที่แทนขนาดของมุมในหน่วยเรเดียน
   - อัตราส่วนของขนาดของมุมในหน่วยเรเดียนกับขนาดของมุมในหน่วยองศาเป็นอย่างไร

     แนวคำตอบ

     อัตราส่วนของขนาดของมุมในหน่วยเรเดียนกับขนาดของมุมในหน่วยองศาเป็นค่าคงตัว ซึ่งมีค่าประมาณ 0.017
5. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่สำรวจความยาวส่วนโค้งของวงกลม ขนาดของมุมในหน่วยเรเดียน และขนาดของมุมในหน่วยองศา เมื่อวงกลมมีความยาวรัศมีเป็น 2, 3 และ 4 หน่วย ตามลำดับ โดยทำซ้ำขั้นตอนในข้อ 3 แล้วบันทึกผลลงในตารางต่อไปนี้

ตำแหน่งของจุดในจตุภาคที่	1	2	3	4
ความยาวรัศมีของวงกลม (หน่วย)	2	2	2	2
ความยาวส่วนโค้ง (หน่วย)				
ขนาดของมุมในหน่วยเรเดียน				
ขนาดของมุมในหน่วยองศา				

ตำแหน่งของจุดในจตุภาคที่	1	2	3	4
ความยาวรัศมีของวงกลม (หน่วย)	3	3	3	3
ความยาวส่วนโค้ง (หน่วย)				
ขนาดของมุมในหน่วยเรเดียน				
ขนาดของมุมในหน่วยองศา				

ตำแหน่งของจุดในจตุภาคที่	1	2	3	4
ความยาวรัศมีของวงกลม (หน่วย)	4	4	4	4
ความยาวส่วนโค้ง (หน่วย)				
ขนาดของมุมในหน่วยเรเดียน				
ขนาดของมุมในหน่วยองศา				

6. จากตารางที่ได้ในข้อ 5 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันพิจารณาว่า
   - ความยาวส่วนโค้งกับขนาดของมุมในหน่วยเรเดียนมีความสัมพันธ์กันอย่างไร

     แนวคำตอบ
     - เมื่อวงกลมมีรัศมียาว 2 หน่วย จำนวนที่แทนความยาวส่วนโค้งจะเป็นสองเท่าของจำนวนที่แทนขนาดของมุมในหน่วยเรเดียน
     - เมื่อวงกลมมีรัศมียาว 3หน่วย จำนวนที่แทนความยาวส่วนโค้งจะเป็นสามเท่าของจำนวนที่แทนขนาดของมุมในหน่วยเรเดียน
     - เมื่อวงกลมมีรัศมียาว 4 หน่วย จำนวนที่แทนความยาวส่วนโค้งจะเป็นสี่เท่าของจำนวนที่แทนขนาดของมุมในหน่วยเรเดียน
   - อัตราส่วนของขนาดของมุมในหน่วยเรเดียนกับขนาดของมุมในหน่วยองศาเป็นอย่างไร

     แนวคำตอบ

     ไม่ว่าวงกลมจะมีรัศมียาวเท่าใดก็ตาม อัตราส่วนของขนาดของมุมในหน่วยเรเดียนกับขนาดของมุมในหน่วยองศาเป็นค่าคงตัว ซึ่งมีค่าประมาณ 0.017
7. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับผลที่ได้จากการสำรวจข้อ 3 – 6

หมายเหตุ

- เมื่อจบกิจกรรมนี้แล้ว ครูควรให้ความรู้เพิ่มเติมกับนักเรียนว่า มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว a หน่วย จะมีขนาด $\frac{a}{r}$ เรเดียน และมุมที่มีขนาด 1 เรเดียน จะมีขนาด $\frac{180}{\pi}$ องศา หรือประมาณ 57.3 องศา

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- การแสดงมุมในหน่วยองศาให้อยู่ในรูปทศนิยม เช่น มุมที่มีขนาด 28.65 องศานั้น ไม่ได้หมายถึง มุมที่มีขนาด 28 องศา 65 ลิปดา แต่จะต้องพิจารณาจาก 1 องศา เท่ากับ 60 ลิปดา ซึ่งจะทำให้ได้ว่ามุมที่มีขนาด 0.65 องศา จะมีขนาด $0.65\times 60=39$ ลิปดา นั่นคือมุมที่มีขนาด 28.65 องศา หมายถึง มุมที่มีขนาด 28 องศา 39 ลิปดา
- เนื่องจากการนำเสนอเกี่ยวกับการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 เริ่มจากการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง ดังนั้น ในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตัวอย่างที่ 15 เป็นการเปลี่ยนขนาดของมุมจากหน่วยองศาให้เป็นหน่วยเรเดียน จากนั้นจึงใช้ความรู้เรื่องค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงในการหาคำตอบได้

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

- นักเรียนมักเข้าใจผิดว่า การเขียนแสดงขนาดของมุมในหน่วยเรเดียนต้องอยู่ในรูป π เสมอ ซึ่งในตัวอย่างที่ 13 จะเห็นว่าขนาดของมุมในหน่วยเรเดียนสามารถอยู่ในรูปจำนวนจริงที่ไม่อยู่ในรูป π ได้

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

- การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ในแบบฝึกหัด 1.2 ข้อ 6 นั้น ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนใช้เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ได้เรียนในหัวข้อ 1.1 และ 1.2 ช่วยในการจัดรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ก่อนการแทนค่า
- การวัดผลประเมินผลเกี่ยวกับการพิสูจน์ในหัวข้อนี้ไม่ควรซับซ้อนมากนัก โดยไม่ควรยากเกินกว่าแบบฝึกหัด 1.2 ข้อ 8 – 10

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- เมื่อพิจารณาโดเมนของฟังก์ชัน tan, sec, cot และ cosec จะพบว่าฟังก์ชันดังกล่าวไม่นิยามที่จำนวนจริง a บางจำนวน ดังนั้น ในการเขียนกราฟจึงนิยมเขียนเส้นประ $x=a$ ไว้เพื่อแสดงว่าเส้นกราฟจะโค้งเข้าหาเส้นตรง $x=a$ แต่ไม่นิยามที่ $x=a$ ทั้งนี้ ครูต้องเน้นย้ำว่าเส้นประดังกล่าวมีไว้เพื่อช่วยในการเขียนกราฟและเข้าใจกราฟได้ง่ายขึ้น แต่ไม่ได้เป็นส่วนหนึ่งของกราฟ
- การเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในตัวอย่าง 20 – 24 นั้น กำหนดจุดบนแกน X เป็นจำนวนจริงที่อยู่ในรูป π อย่างไรก็ตามการเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิตินั้น จุดบนแกน X สามารถเป็นจำนวนจริงที่ไม่อยู่ในรูป π ดังกราฟที่ปรากฏในแบบฝึกหัด 1.4 ข้อ 2 (จ) (ฉ) และ (ช) ซึ่งการพิจารณากราฟของฟังก์ชันในแบบฝึกหัดดังกล่าว ทำได้ในทำนองเดียวกับการพิจารณากราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติตามตัวอย่าง 20 – 24
- n ที่ปรากฏในฟังก์ชัน $y=\sin(nx)$, $y=\cos(nx)$, $y=a\sin(nx)$ และ $y=a\cos(nx)$ ซึ่งนำเสนอในหัวข้อนี้ เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 0

กิจกรรม : สำรวจกราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อประกอบการเรียนการสอน เรื่อง กราฟของ $y=\sin x$ และ $y=\cos x$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $x\in[0, 2\pi]$

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูจับคู่นักเรียนแบบคละความสามารถ จากนั้นเปิดเว็บไซต์ ipst.me/10308

2. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่สำรวจกราฟของฟังก์ชันไซน์โดย
   1) คลิกเลือก sin
   2) คลิกลากจุดสีส้มบนเส้นรอบวงไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากจุด $(1, 0)$ ไปถึงจุด $(0, 1)$ พร้อมพิจารณาว่ากราฟที่ได้มีลักษณะอย่างไร

      แนวคำตอบ

      กราฟที่ได้เป็นเส้นโค้งที่ลากขึ้นจาก $y = 0$ ไปถึง $y = 1$ ที่ $x = \frac{\pi}{2}$
   3) คลิกลากจุดสีส้มบนเส้นรอบวงไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากจุด $(0, 1)$ ไปถึงจุด $(-1, 0)$ พร้อมพิจารณาว่ากราฟที่ได้มีลักษณะอย่างไร

      แนวคำตอบ

      กราฟที่ได้เป็นเส้นโค้งที่ลากลงจาก $y = 1$ ไปถึง $y = 0$ ที่ $x = \pi$
   4) คลิกลากจุดสีส้มบนเส้นรอบวงไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากจุด $(-1, 0)$ ไปถึงจุด $(0, -1)$ พร้อมพิจารณาว่ากราฟที่ได้มีลักษณะอย่างไร

      แนวคำตอบ

      กราฟที่ได้เป็นเส้นโค้งที่ลากลงจาก $y = 0$ ไปถึง $y = -1$ ที่ $x = \frac{3\pi}{2}$
   5) คลิกลากจุดสีส้มบนเส้นรอบวงไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากจุด $(0, -1)$ ไปถึงจุด $(1, 0)$ พร้อมพิจารณาว่ากราฟที่ได้มีลักษณะอย่างไร

      แนวคำตอบ

      กราฟที่ได้เป็นเส้นโค้งที่ลากขึ้นจาก $y = -1$ ไปถึง $y = 0$ ที่ $x = 2\pi$

3. จากกราฟที่ได้ในข้อ 2 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มพิจารณาว่า
   - ความสัมพันธ์ของจุดสีส้มที่เลื่อนไปบนวงกลมกับกราฟที่ได้เป็นอย่างไร

     แนวคำตอบ

     เมื่อจุดสีส้มเลื่อนไปบนวงกลมจากจุด $(1, 0)$ ไปในจตุภาคที่ 1 กราฟที่ได้เป็นเส้นโค้งที่ลากขึ้นจาก $y = 0$ และไปถึง $y = 1$ ที่ $x = \frac{\pi}{2}$ เมื่อจุดสีส้มเลื่อนไปถึงจุด $(0, 1)$

     เมื่อจุดสีส้มเลื่อนไปบนวงกลมจากจุด $(0, 1)$ ไปในจตุภาคที่ 2 กราฟที่ได้เป็นเส้นโค้งที่ลากลงจาก $y = 1$ และไปถึง $y = 0$ ที่ $x = \pi$ เมื่อจุดสีส้มเลื่อนไปถึงจุด $(-1, 0)$

เมื่อจุดสีส้มเลื่อนไปบนวงกลมจากจุด $(-1, 0)$ ไปในจตุภาคที่ 3 กราฟที่ได้เป็นเส้นโค้งที่ลากขึ้นจาก $y = 0$ และไปถึง $y = -1$ ที่ $x = \frac{3\pi}{2}$ เมื่อจุดสีส้มเลื่อนไปถึงจุด $(0, -1)$

เมื่อจุดสีส้มเลื่อนไปบนวงกลมจากจุด $(0, -1)$ ไปในจตุภาคที่ 4 กราฟที่ได้เป็นเส้นโค้งที่ลากลงจาก $y = -1$ และไปถึง $y = 0$ ที่ $x = 2\pi$ เมื่อจุดสีส้มเลื่อนไปถึงจุด $(-1, 0)$

- โดเมนและเรนจ์ของ $y = \sin x$ ที่พิจารณาได้จากกราฟเป็นอย่างไร

แนวคำตอบ

โดเมนเป็น $[0, 2\pi]$ และเรนจ์เป็น $[-1, 1]$

4. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่ลบรอยกราฟของ $y = \sin x$ โดยคลิกเลือก sin อีกครั้ง
5. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่สำรวจกราฟของฟังก์ชันโคไซน์โดย
   1) คลิกเลือก cos
   2) คลิกลากจุดสีส้มบนเส้นรอบวงไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากจุด $(1, 0)$ ไปถึงจุด $(0, 1)$ พร้อมพิจารณาว่ากราฟที่ได้มีลักษณะอย่างไร

   แนวคำตอบ

   กราฟที่ได้เป็นเส้นโค้งที่ลากลงจาก $y = 1$ ไปถึง $y = 0$ ที่ $x = \frac{\pi}{2}$

   3) คลิกลากจุดสีส้มบนเส้นรอบวงไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากจุด $(0, 1)$ ไปถึงจุด $(-1, 0)$ พร้อมพิจารณาว่ากราฟที่ได้มีลักษณะอย่างไร

   แนวคำตอบ

   กราฟที่ได้เป็นเส้นโค้งที่ลากลงจาก $y = 0$ ไปถึง $y = -1$ ที่ $x = \pi$

   4) คลิกลากจุดสีส้มบนเส้นรอบวงไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากจุด $(-1, 0)$ ไปถึงจุด $(0, -1)$ พร้อมพิจารณาว่ากราฟที่ได้มีลักษณะอย่างไร

   แนวคำตอบ

   กราฟที่ได้เป็นเส้นโค้งที่ลากขึ้นจาก $y = -1$ ไปถึง $y = 0$ ที่ $x = \frac{3\pi}{2}$

5) คลิกลากจุดสีส้มบนเส้นรอบวงไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากจุด $(0, -1)$ ไปถึงจุด $(1, 0)$ พร้อมพิจารณาว่ากราฟที่ได้มีลักษณะอย่างไร

แนวคำตอบ

กราฟที่ได้เป็นเส้นโค้งที่ลากขึ้นจาก $y = 0$ ไปถึง $y = 1$ ที่ $x = 2\pi$

6. จากกราฟที่ได้ในข้อ 2 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มพิจารณาว่า

- ความสัมพันธ์ของจุดสีส้มที่เลื่อนไปบนวงกลมกับกราฟที่ได้เป็นอย่างไร

แนวคำตอบ

เมื่อจุดสีส้มเลื่อนไปบนวงกลมจากจุด $(1, 0)$ ไปในจตุภาคที่ 1 กราฟที่ได้เป็นเส้นโค้งที่ลากลงจาก $y = 1$ และไปถึง $y = 0$ ที่ $x = \frac{\pi}{2}$ เมื่อจุดสีส้มเลื่อนไปถึงจุด $(0, 1)$

เมื่อจุดสีส้มเลื่อนไปบนวงกลมจากจุด $(0, 1)$ ไปในจตุภาคที่ 2 กราฟที่ได้เป็นเส้นโค้งที่ลากลงจาก $y = 0$ และไปถึง $y = -1$ ที่ $x = \pi$ เมื่อจุดสีส้มเลื่อนไปถึงจุด $(-1, 0)$

เมื่อจุดสีส้มเลื่อนไปบนวงกลมจากจุด $(-1, 0)$ ไปในจตุภาคที่ 3 กราฟที่ได้เป็นเส้นโค้งที่ลากขึ้นจาก $y = -1$ และไปถึง $y = 0$ ที่ $x = \frac{3\pi}{2}$ เมื่อจุดสีส้มเลื่อนไปถึงจุด $(0, -1)$

เมื่อจุดสีส้มเลื่อนไปบนวงกลมจากจุด $(0, -1)$ ไปในจตุภาคที่ 4 กราฟที่ได้เป็นเส้นโค้งที่ลากขึ้นจาก $y = 0$ และไปถึง $y = 1$ ที่ $x = 2\pi$ เมื่อจุดสีส้มเลื่อนไปถึงจุด $(-1, 0)$

- โดเมนและเรนจ์ของ $y = \sin x$ ที่พิจารณาได้จากกราฟเป็นอย่างไร

แนวคำตอบ

โดเมนเป็น $[0, 2\pi]$ และเรนจ์เป็น $[-1, 1]$

7. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับผลที่ได้จากการสำรวจข้อ $3 - 6$

หมายเหตุ

- เมื่อจบกิจกรรมนี้แล้ว ครูควรสรุปเกี่ยวกับกราฟ โดเมน และเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

กิจกรรม : กราฟของฟังก์ชันไซน์

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อเสริมความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับกราฟของ $y=a\sin(nx)$ เมื่อ a, n และ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของกราฟเมื่อ a และ n เปลี่ยนแปลงไป

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูจับคู่นักเรียนแบบคละความสามารถ จากนั้นเปิดเว็บไซต์ ipst.me/10307
2. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่สำรวจกราฟของ $y=a\sin(nx)$ โดย
   1) กำหนดปุ่มบนสไลเดอร์ a เป็น 1 และคลิกลากปุ่มบนสไลเดอร์ n แล้วพิจารณาว่าลักษณะของกราฟ $y=a\sin(nx)$ เป็นอย่างไร เมื่อ n มีค่าเปลี่ยนแปลงไป

      แนวคำตอบ

      เมื่อ n มากขึ้น กราฟของ $y=a\sin(nx)$ จะมีคาบน้อยลง แต่เมื่อ n น้อยลง กราฟของ $y=a\sin(nx)$ จะมีคาบมากขึ้น
   2) กำหนดปุ่มบนสไลเดอร์ n เป็นค่าใดค่าหนึ่ง และคลิกลากปุ่มบนสไลเดอร์ a แล้วพิจารณาว่าลักษณะของกราฟ $y=a\sin(nx)$ เป็นอย่างไร เมื่อ a มีค่าเปลี่ยนแปลงไป

      แนวคำตอบ

      เมื่อ a มากขึ้น กราฟของ $y=a\sin(nx)$ จะมีแอมพลิจูดมากขึ้น แต่เมื่อ a น้อยลง กราฟของ $y=a\sin(nx)$ จะมีแอมพลิจูดลดลง
3. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบที่ได้ในข้อ 2

กิจกรรม : กราฟของฟังก์ชันโคไซน์

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อเสริมความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับกราฟของ $y = a\cos(nx)$ เมื่อ a, n และ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของกราฟเมื่อ a และ n เปลี่ยนแปลงไป

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูจับคู่นักเรียนแบบคละความสามารถ จากนั้นเปิดเว็บไซต์ ipst.me/10306
2. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่สำรวจกราฟของ $y = a\cos(nx)$ โดย
   1) กำหนดปุ่มบนสไลเดอร์ a เป็น 1 และคลิกลากปุ่มบนสไลเดอร์ n แล้วพิจารณาว่าลักษณะของกราฟ $y = a\cos(nx)$ เป็นอย่างไร เมื่อ n มีค่าเปลี่ยนแปลงไป

      แนวคำตอบ

      เมื่อ n มากขึ้น กราฟของ $y = a\cos(nx)$ จะมีคาบน้อยลง แต่เมื่อ n น้อยลง กราฟของ $y = a\cos(nx)$ จะมีคาบมากขึ้น
   2) กำหนดปุ่มบนสไลเดอร์ n เป็นค่าใดค่าหนึ่ง และคลิกลากปุ่มบนสไลเดอร์ a แล้วพิจารณาว่าลักษณะของกราฟ $y = a\cos(nx)$ เป็นอย่างไร เมื่อ a มีค่าเปลี่ยนแปลงไป

      แนวคำตอบ

      เมื่อ a มากขึ้น กราฟของ $y = a\cos(nx)$ จะมีแอมพลิจูดมากขึ้น แต่เมื่อ a น้อยลง กราฟของ $y = a\cos(nx)$ จะมีแอมพลิจูดลดลง
3. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบที่ได้ในข้อ 2

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติควรระมัดระวังการเลือกใช้เอกลักษณ์ เช่น ในตัวอย่างที่ 29 จะเห็นว่าใช้เอกลักษณ์ $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ในการแสดงว่า $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\cot\theta$ แทนที่จะใช้เอกลักษณ์ $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ เนื่องจาก $\tan\frac{\pi}{2}$ หาค่าไม่ได้
- ในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนด อาจใช้เอกลักษณ์ที่แตกต่างจากที่นำเสนอเช่น จากตัวอย่างที่ 31 สามารถแสดงการหาคำตอบที่แตกต่างจากในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\cos 75^\circ \sin 525^\circ &= \cos(45^\circ+30^\circ)\sin(360^\circ+165^\circ)\\
&= \cos(45^\circ+30^\circ)\sin 165^\circ\\
&= \cos(45^\circ+30^\circ)\sin(180^\circ-15^\circ)\\
&= \cos(45^\circ+30^\circ)\sin 15^\circ\\
&= \cos(45^\circ+30^\circ)\sin(45^\circ-30^\circ)\\
&= (\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ)(\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ)\\
&= \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right]\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right]\\
&= \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2\\
&= \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2\\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}
$$

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

- นักเรียนอาจใช้เอกลักษณ์ที่แตกต่างกันในการพิสูจน์และหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแบบฝึกหัด 1.5
- การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแบบฝึกหัด 1.5 ข้อ 6 จากที่โจทย์กำหนด $\cos x = -\frac{3}{5}$ และ $\tan y = \frac{5}{12}$ นั้น ครูควรเน้นย้ำให้นักเรียนพิจารณาเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดว่า $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ และ $\pi < y < \frac{2\pi}{2}$ เสมอ

ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

กิจกรรม : ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

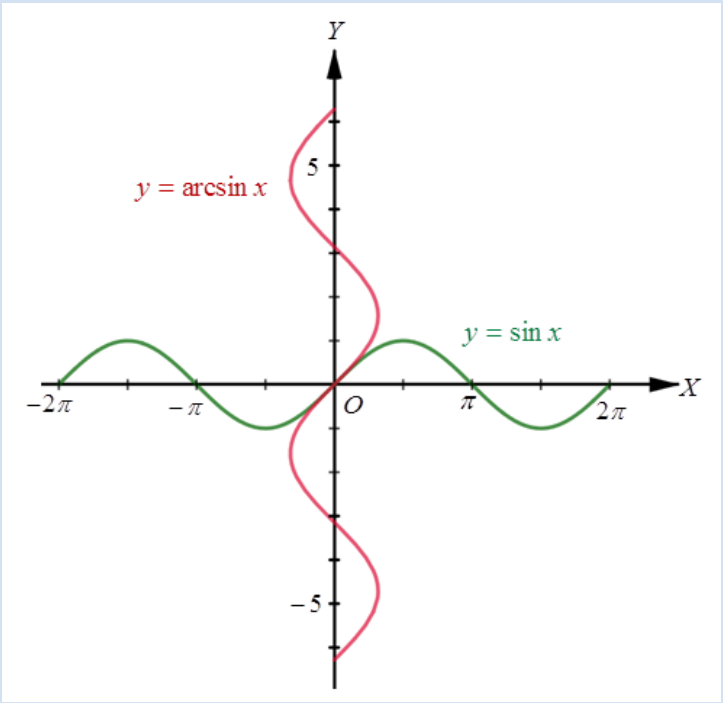
กิจกรรมนี้ใช้เพื่อเสริมความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูทบทวนความรู้ของนักเรียนเกี่ยวกับกราฟของตัวผกผันของฟังก์ชัน
2. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเขียนกราฟของ $y = \sin x$ และกราฟของตัวผกผันของ $y = \sin x$ จากนั้นพิจารณาว่าตัวผกผันของ $y = \sin x$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

แนวคำตอบ

เขียนกราฟของ $y = \sin x$ และกราฟของตัวผกผันของฟังก์ชันดังกล่าวได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่าตัวผกผันของ $y = \sin x$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

3. จากกราฟของตัวผกผันของ $y = \sin x$ ที่ได้ในข้อ 2 ครูให้นักเรียนพิจารณาหาโดเมนซึ่งเป็นช่วงที่กว้างที่สุดที่ทำให้ตัวผกผันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันผกผัน

แนวคำตอบ

คำตอบของนักเรียนอาจมีได้หลายคำตอบ เช่น $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ซึ่งสำหรับช่วงเหล่านี้ เมื่อลากเส้นขนานกับแกน Y แล้วไม่มีเส้นขนานกับแกน Y เส้นใดตัดกราฟของตัวผกผันของ $y = \sin x$ มากกว่า 1 จุด

4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบที่ได้ในข้อ 2 และ 3 จากนั้นครูบอกข้อตกลงกับนักเรียนว่า ในที่นี้จะกำหนดโดเมนของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ คือ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

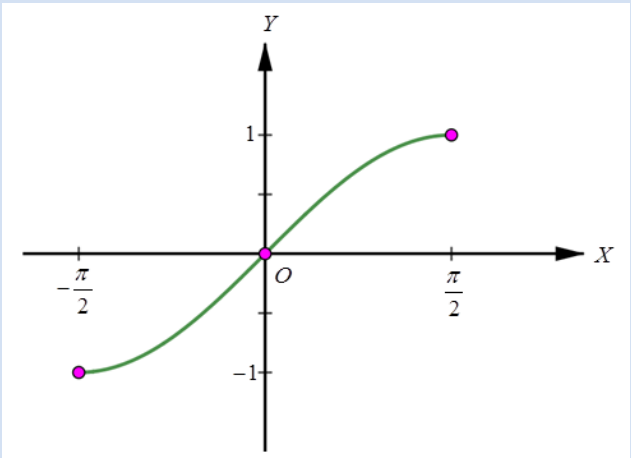
ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- การหาค่าของ arcsine และ arccosine บางค่า สามารถใช้กราฟของ sine และ cosine ช่วยในการหาคำตอบได้ เช่น ในตัวอย่างที่ 37 และ 40 มีแนวทางการใช้กราฟช่วยหาคำตอบ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 37 จงหาค่าของ $\arcsin 1$

วิธีทำ ให้ $\arcsin 1 = x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\sin x = 1$

พิจารณากราฟ $y = \sin x$ ดังนี้



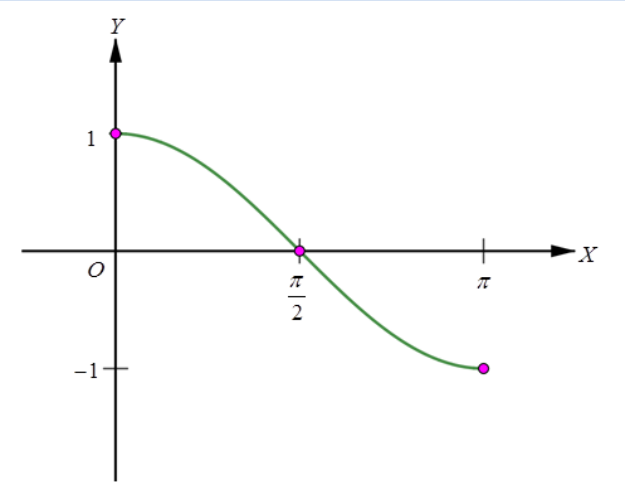
จากกราฟจะได้ว่า มี $x = \frac{\pi}{2}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin x = 1$

ดังนั้น $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

ตัวอย่างที่ 40 จงหาค่าของ $\arccos 0$

วิธีทำ ให้ $\arccos 0 = x$ เมื่อ $0 \le \theta \le \pi$ จะได้ $\cos x = 0$

พิจารณากราฟ $y = \cos x$ ดังนี้



จากกราฟจะได้ว่า มี $x = \frac{\pi}{2}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\theta = 0$

ดังนั้น $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

- ครูควรเน้นย้ำเกี่ยวกับโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติตามบทนิยาม 2 – 4 เนื่องจากมีผลต่อการพิจารณาคำตอบที่ได้ ดังแสดงในตัวอย่างที่ 37 – 47

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

นักเรียนมักเข้าใจผิดว่า $\arcsin(\sin x) = x$ และ $\arccos(\cos x) = x$ เสมอ โดยไม่ได้พิจารณาโดเมนของฟังก์ชัน arcsine และ arccosine เช่น นักเรียนอาจเข้าใจว่า $\arcsin(\sin 5\pi) = 5\pi$ ซึ่งเป็นความเข้าใจที่ไม่ถูกต้อง เนื่องจาก $\arcsin(\sin 5\pi) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ดังนั้น ในการแก้ปัญหาจะต้องพิจารณาก่อนว่าค่าของ $\sin 5\pi$ เป็นเท่าไร ซึ่งจะได้ว่า $\arcsin(\sin 5\pi) = \arcsin 0 = 0$

เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- เอกลักษณ์ที่ได้พิสูจน์แล้วในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 สามารถนำไปอ้างอิงในการพิสูจน์เอกลักษณ์อื่น ๆ ได้ เช่น สามารถใช้เอกลักษณ์ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ในการพิสูจน์ $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$ ได้ดังนี้

  จากเอกลักษณ์ $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$

  นำ $\sin^2\theta$ ไปหารทั้งสองข้างของสมการ

  จะได้
  $$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$
  $$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$
  $$1+\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$$
- การสอนการพิสูจน์เอกลักษณ์ ครูควรเริ่มต้นจากการยกตัวอย่างการพิสูจน์อย่างง่ายก่อน แล้วจึงค่อยยกตัวอย่างที่ซับซ้อนขึ้น
- การพิสูจน์เอกลักษณ์โดยทั่ว ๆ ไปไม่มีกฎเกณฑ์ที่แน่นอนตายตัว เพียงแต่พยายามใช้เอกลักษณ์ที่พิสูจน์แล้วแสดงให้เห็นว่าจำนวนทางซ้ายและจำนวนทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับนั้นเท่ากันจริงสำหรับทุกสมาชิกในโดเมนของฟังก์ชันทั้งหมดในสมการ การพิสูจน์เอกลักษณ์อาจเริ่มทำจากนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับให้เหมือนกับนิพจน์ที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับ หรือทำในทิศทางตรงข้าม หรืออาจจะทำจากนิพจน์ที่อยู่แต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับในสมการให้ผลสุดท้ายเป็นนิพจน์เดียวกัน สำหรับบางเอกลักษณ์การทำจากนิพจน์ที่อยู่แต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับในสมการให้ผลสุดท้ายเป็นนิพจน์เดียวกันจะสะดวกกว่าการทำจากนิพจน์ข้างใดข้างหนึ่งให้เหมือนกับนิพจน์อีกข้างหนึ่งดังตัวอย่างต่อไปนี้

จงพิสูจน์ $\tan\theta\sin^2\theta + \cot\theta\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = \cot\theta + \tan\theta$

$$\begin{aligned}
\tan\theta\sin^2\theta + \cot\theta\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin^2\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta \\
&= \frac{\sin^3\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos^3\theta}{\sin\theta} + 2\sin\theta\cos\theta \\
&= \frac{\sin^4\theta + \cos^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \\
&= \frac{\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)}{\sin\theta\cos\theta} \\
&= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cot\theta + \tan\theta &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\
&= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \\
&= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\tan\theta\sin^2\theta + \cot\theta\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = \cot\theta + \tan\theta$

- โดยทั่วไปฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน 1–1 ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ อาจซ้ำกันได้ ดังนั้น ในการแก้สมการตรีโกณมิติ หากโจทย์ไม่ได้กำหนดให้คำตอบอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่งแล้ว คำตอบควรจะอยู่ในรูปของค่าทั่วไป ดังตัวอย่างที่ 55, 56 และ 58 นอกจากนี้ในตัวอย่างข้างต้นอาจใช้กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติช่วยในการพิจารณาคำตอบในรูปทั่วไปของสมการตรีโกณมิติได้

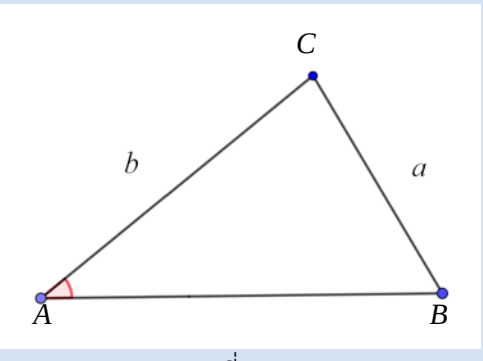
ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

นักเรียนอาจเข้าใจผิดว่า ถ้าไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติบางเอกลักษณ์ แล้วจะหมายความว่า ฟังก์ชันตรีโกณมิตินั้นไม่สามารถหาค่าได้ เช่น นักเรียนอาจเข้าใจว่า $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ หาค่าไม่ได้ เพราะไม่สามารถใช้เอกลักษณ์ $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ ได้ ซึ่งเป็นความเข้าใจที่ไม่ถูกต้อง เนื่องจากการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติดังกล่าวสามารถทำได้โดยใช้วิธีอื่น เช่น $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

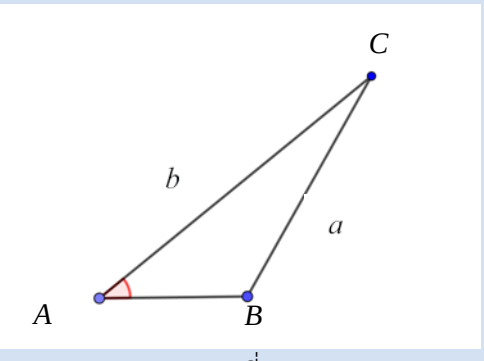
กฎของโคไซน์และกฎของไซน์

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- การใช้กฎของไซน์หาขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมในกรณีที่โจทย์กำหนดความยาว 2 ด้าน และขนาดของมุม 1 มุม (ที่ไม่ได้อยู่ระหว่างด้านทั้งสอง) มาให้ สามารถเขียนรูปสามเหลี่ยม ABC ได้เป็น 2 กรณี ดังแสดงในรูปที่ 1 และ 2



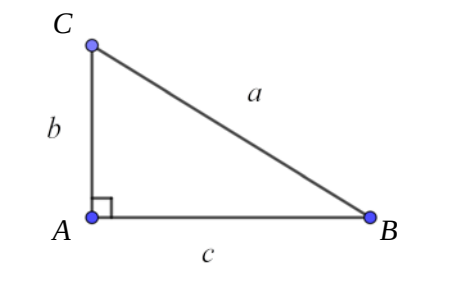
รูปที่ 1



รูปที่ 2

จากรูปที่ 1 และ 2 จะเห็นว่า มุม B อาจเป็นมุมแหลมหรือมุมป้านก็ได้ ซึ่งเป็นในทำนองเดียวกับตัวอย่างที่ 61 แต่สำหรับตัวอย่างที่ 62 นั้น สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับผลรวมของขนาดของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมเพื่อตรวจสอบได้ ซึ่งจะทำให้ได้ว่ามุม B ต้องเป็นมุมแหลมเท่านั้น

- กฎของโคไซน์จะสอดคล้องกับทฤษฎีบทของพีทาโกรัสเมื่อรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เช่นรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป



โดยกฎของโคไซน์ จะได้ว่า $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
เนื่องจาก $\cos A = \cos 90^\circ = 0$
จะได้ $a^2 = b^2 + c^2$

การหาระยะทางและความสูง

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาระยะทางและความสูง ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนเขียนภาพแสดงสถานการณ์ที่โจทย์กำหนด และให้ระมัดระวังกรณีที่โจทย์ระบุความสูงของผู้สังเกต ซึ่งจะมีผลต่อการหาคำตอบการกำหนดมุมก้มหรือมุมเงยซึ่งเป็นมุมที่เกิดจากแนวเส้นระดับสายตา เช่น ตัวอย่างที่ 63

1.3 แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน

กิจกรรม : สูงเท่าใดให้ถูกกฎหมาย

ในการก่อสร้างอาคารสูงจะต้องอยู่ภายใต้ข้อบังคับของกฎกระทรวง ฉบับที่ 55 (พ.ศ. 2543) ออกตามความในพระราชบัญญัติควบคุมอาคาร พ.ศ. 2522 โดยข้อ 41 และ 44 ว่าด้วยเรื่องการกำหนดแนวอาคารและระยะต่าง ๆ ของอาคาร ระบุไว้ดังนี้

ข้อ 41 อาคารที่ก่อสร้างหรือดัดแปลงใกล้ถนนสาธารณะที่มีความกว้างน้อยกว่า 6 เมตร ให้ร่นแนวอาคารห่างจากกึ่งกลางถนนสาธารณะอย่างน้อย 3 เมตร
อาคารที่สูงเกินสองชั้น หรือเกิน 8 เมตร ห้องแถว ตึกแถว บ้านแถว อาคารพาณิชย์ โรงงาน อาคารสาธารณะ ป้าย หรือสิ่งที่สร้างขึ้นสำหรับติดหรือตั้งป้าย หรือคลังสินค้า ที่ก่อสร้างหรือดัดแปลงใกล้ถนนสาธารณะ

(1) ถ้าถนนสาธารณะนั้นมีความกว้างน้อยกว่า 10 เมตร ให้ร่นแนวอาคารห่างจากกึ่งกลางถนนสาธารณะอย่างน้อย 6 เมตร
(2) ถ้าถนนสาธารณะนั้นมีความกว้างตั้งแต่ 10 เมตรขึ้นไป แต่ไม่เกิน 20 เมตร ให้ร่นแนวอาคารห่างจากเขตถนนสาธารณะอย่างน้อย 1 ใน 10 ของความกว้างของถนนสาธารณะ
(3) ถ้าถนนสาธารณะนั้นมีความกว้างเกิน 20 เมตรขึ้นไป ให้ร่นแนวอาคารห่างจากเขตสาธารณะอย่างน้อย 2 เมตร

ข้อ 44 ความสูงของอาคารไม่ว่าจากจุดหนึ่งจุดใด ต้องไม่เกินสองเท่าของระยะราบ วัดจากจุดนั้นไปตั้งฉากกับแนวเขตด้านตรงข้ามของถนนสาธารณะที่อยู่ใกล้อาคารนั้นที่สุด
ความสูงของอาคารให้วัดแนวดิ่งจากระดับถนนหรือระดับพื้นดินที่ก่อสร้างขึ้นไปถึงส่วนของอาคารที่สูงที่สุด สำหรับอาคารทรงจั่วหรือปั้นหยาให้วัดถึงยอดผนังของชั้นสูงสุด

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. ถ้าต้องการสร้างอาคารบนที่ดินซึ่งอยู่ติดถนนสาธารณะที่กว้าง 8 เมตร จะต้องร่นแนวอาคารห่างจากเขตถนนเท่าใดจึงจะใกล้ถนนสาธารณะที่สุดและเป็นไปตามกฎกระทรวง ฉบับที่ 55 (พ.ศ. 2543) ออกตามความในพระราชบัญญัติควบคุมอาคาร พ.ศ. 2522 ข้อ 41

2. ถ้าต้องการสร้างอาคารบนที่ดินซึ่งอยู่ติดถนนสาธารณะที่กว้าง 8 เมตร ให้ใกล้ถนนสาธารณะที่สุดและเป็นไปตามกฎกระทรวง ฉบับที่ 55 (พ.ศ. 2543) ออกตามความในพระราชบัญญัติควบคุมอาคาร พ.ศ. 2522 ข้อ 44 จะสร้างอาคารที่มีความสูงได้มากที่สุดเท่าใด

3. สมมติว่าอาคารแห่งหนึ่งร่นแนวอาคารห่างจากถนนสาธารณะที่กว้าง 8 เมตร เป็นระยะทางตามข้อ 1 และมีความสูงตามข้อ 2 ถ้าต้องการถ่ายภาพป้ายซึ่งอยู่ต่ำกว่าส่วนที่สูงที่สุดของอาคารเป็นระยะ 2 เมตร โดยตั้งขาตั้งกล้องที่มีความสูง 1.2 เมตร เพื่อถ่ายภาพจากทางเท้าของถนนฝั่งตรงข้ามของอาคาร จะต้องตั้งกล้องถ่ายภาพให้ทำมุมเงยกี่องศา

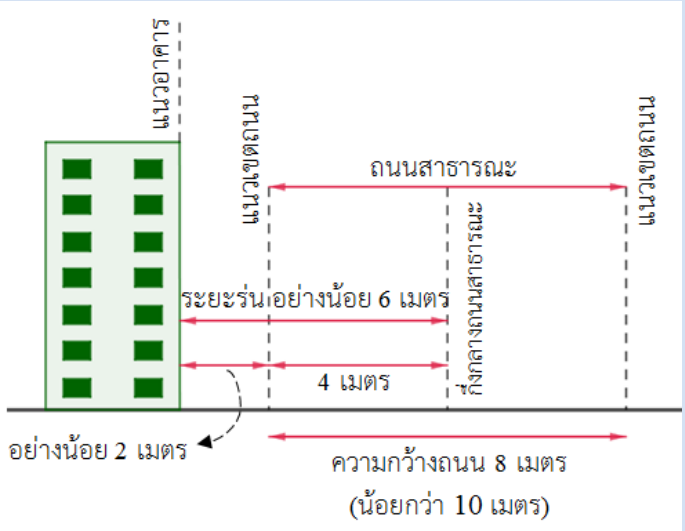
4. ถ้าต้องการสร้างอาคารบนที่ดินซึ่งอยู่ติดถนนสาธารณะที่กว้าง x เมตร โดยที่ $10 \le x \le 20$ จะต้องร่นแนวอาคารห่างจากเขตถนนเท่าใดจึงจะใกล้ถนนสาธารณะที่สุดและเป็นไปตามกฎกระทรวง ฉบับที่ 55 (พ.ศ. 2543) ออกตามความในพระราชบัญญัติควบคุมอาคาร พ.ศ. 2522 ข้อ 41

5. ถ้าต้องการสร้างอาคารบนที่ดินซึ่งอยู่ติดถนนสาธารณะที่กว้าง x เมตร โดยที่ $10 \le x \le 20$ ให้ใกล้ถนนสาธารณะที่สุดและเป็นไปตามกฎกระทรวง ฉบับที่ 55 (พ.ศ. 2543) ออกตามความในพระราชบัญญัติควบคุมอาคาร พ.ศ. 2522 ข้อ 44 จะสร้างอาคารที่มีความสูงได้มากที่สุดเท่าใด

6. สมมติว่าอาคารแห่งหนึ่งร่นแนวอาคารห่างจากถนนสาธารณะที่กว้าง x เมตร โดยที่ $10 \le x \le 20$ เป็นระยะทางตามข้อ 4 และมีความสูงตามข้อ 5 ถ้าต้องการถ่ายภาพป้ายซึ่งอยู่ต่ำกว่าส่วนที่สูงที่สุดของอาคารเป็นระยะ 2 เมตร โดยตั้งขาตั้งกล้องที่มีความสูง 1.2 เมตร เพื่อถ่ายภาพจากทางเท้าของถนนฝั่งตรงข้ามของอาคาร จะต้องตั้งกล้องถ่ายภาพให้ทำมุมเงยกี่องศา

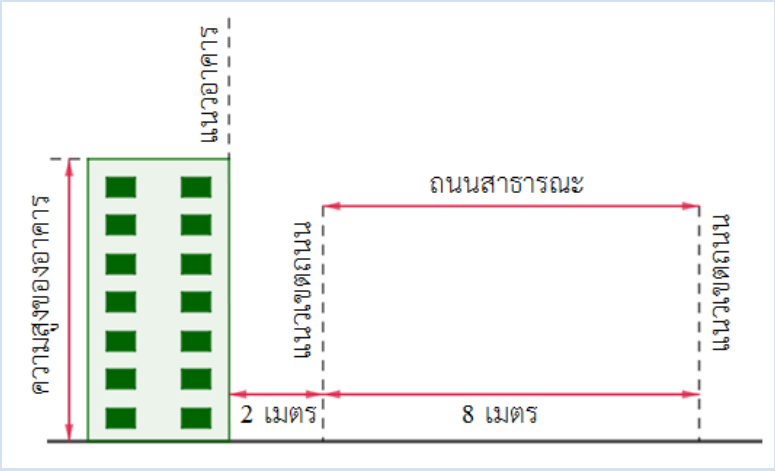
เฉลยกิจกรรม : การก่อสร้างอาคารสูง

1. เนื่องจาก การสร้างอาคารบนที่ดินซึ่งอยู่ติดถนนสาธารณะที่กว้าง 8 เมตร ตามกฎกระทรวง ฉบับที่ 55 (พ.ศ. 2543) ออกตามความในพระราชบัญญัติควบคุมอาคาร พ.ศ. 2522 ข้อ 41 (1) จะต้องร่นแนวอาคารห่างจากกึ่งกลางถนนสาธารณะอย่างน้อย 6 เมตร
จะได้ รูปแสดงสถานการณ์ที่โจทย์กำหนดให้เป็นดังนี้



จากรูป จะเห็นว่าระยะจากกึ่งกลางถนนสาธารณะถึงแนวเขตถนนสาธารณะที่อยู่ฝั่งเดียวกับอาคาร คือ 4 เมตร แต่ต้องร่นแนวอาคารห่างจากกึ่งกลางถนนสาธารณะอย่างน้อย 6 เมตร
ดังนั้น ต้องร่นแนวอาคารห่างจากเขตถนน 2 เมตร จึงจะใกล้ถนนสาธารณะที่สุด

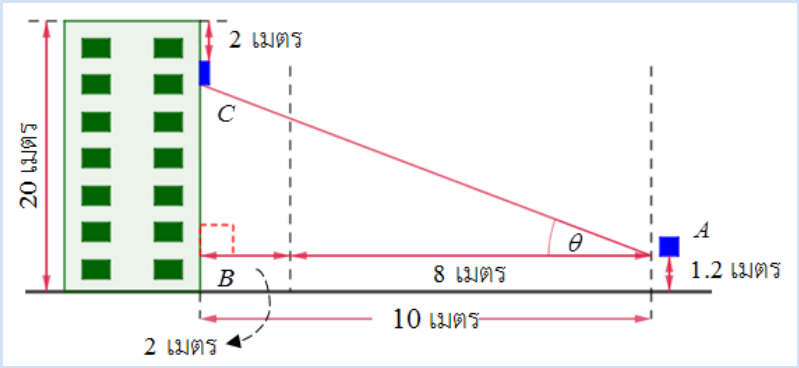
2. เนื่องจาก อาคารตั้งอยู่บนที่ดินซึ่งอยู่ติดถนนสาธารณะที่กว้าง 8 เมตร จึงต้องพิจารณาเงื่อนไขการร่นแนวอาคารตามความกว้างของถนนสาธารณะในข้อ 1 ด้วย
และเนื่องจาก การสร้างอาคารบนที่ดินซึ่งอยู่ติดถนนสาธารณะที่กว้าง 8 เมตร ให้ใกล้ถนนสาธารณะที่สุดและเป็นไปตามกฎกระทรวง ฉบับที่ 55 (พ.ศ. 2543) ออกตามความในพระราชบัญญัติควบคุมอาคาร พ.ศ. 2522 ข้อ 44 นั้น ความสูงของอาคารไม่ว่าจากจุดหนึ่งจุดใด ต้องไม่เกินสองเท่าของระยะราบ วัดจากจุดนั้นไปตั้งฉากกับแนวเขตด้านตรงข้ามของถนนสาธารณะที่อยู่ใกล้อาคารนั้นที่สุด
จะได้ รูปแสดงสถานการณ์โจทย์กำหนดให้เป็นดังนี้



จากรูป จะเห็นว่าระยะราบ วัดจากแนวอาคารไปตั้งฉากกับแนวเขตด้านตรงข้ามของถนนสาธารณะที่อยู่ใกล้อาคารนั้นที่สุดเป็นระยะ $2 + 8 = 10$ เมตร แต่ความสูงของอาคารไม่ว่าจากจุดหนึ่งจุดใด ต้องไม่เกินสองเท่าของระยะราบ

ดังนั้น จะสร้างอาคารที่มีความสูงได้มากที่สุด $2 \times 10 = 20$ เมตร

3. เขียนรูปแสดงสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ดังนี้



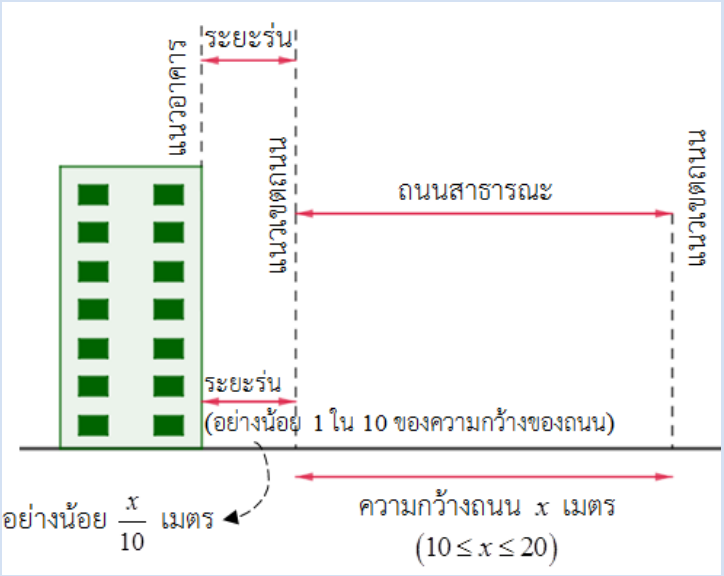
ให้กล้องถ่ายภาพทำมุมเงย θ องศา และ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป

จะได้ว่า $\tan\theta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{20-2-1.2}{10} = 1.68$

นั่นคือ $\theta \approx 59.24^{\circ}$

ดังนั้น จะต้องตั้งกล้องถ่ายภาพให้ทำมุมเงยประมาณ 59.24 องศา

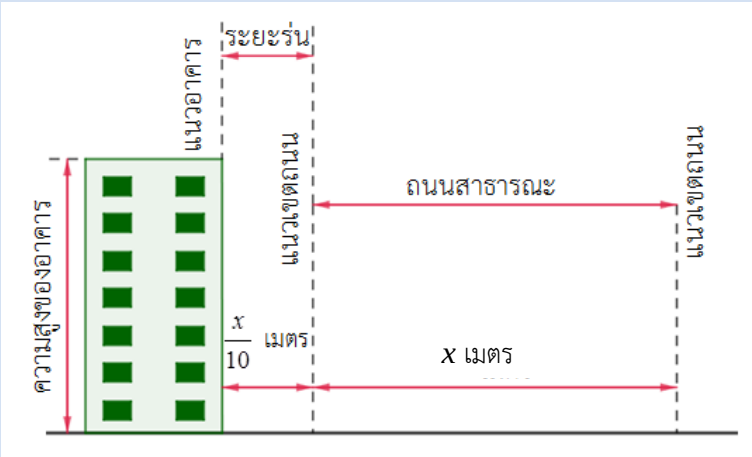
4. เนื่องจาก การสร้างอาคารบนที่ดินซึ่งอยู่ติดถนนสาธารณะที่กว้าง x เมตร โดยที่ $10 \le x \le 20$ ตามกฎกระทรวงฉบับที่ 55 (พ.ศ. 2543) ออกตามความในพระราชบัญญัติควบคุมอาคาร พ.ศ. 2522 ข้อ 41 (2) จะต้องร่นแนวอาคารห่างเขตถนนสาธารณะอย่างน้อย 1 ใน 10 ของความกว้างของถนนสาธารณะ
จะได้ รูปแสดงสถานการณ์ที่โจทย์กำหนดให้เป็นดังนี้



เนื่องจาก ถนนกว้าง x เมตร และต้องร่นแนวอาคารห่างเขตถนนสาธารณะอย่างน้อย 1 ใน 10 ของความกว้างของถนนสาธารณะ

ดังนั้น ต้องร่นแนวอาคารห่างจากเขตถนน $\frac{x}{10}$ เมตร จึงจะใกล้ถนนสาธารณะที่สุด

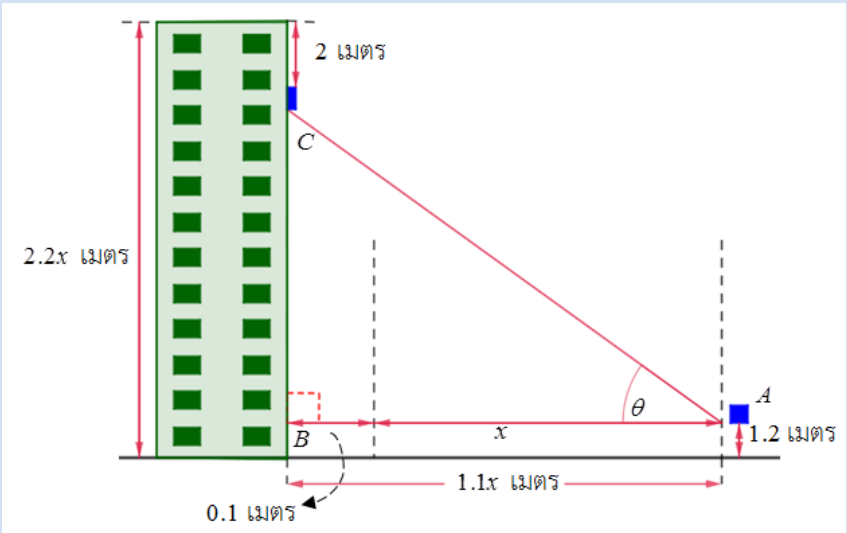
5. เนื่องจาก อาคารตั้งอยู่บนที่ดินซึ่งอยู่ติดถนนสาธารณะที่กว้าง x เมตร โดยที่ $10 \le x \le 20$ จึงต้องพิจารณาเงื่อนไขการร่นแนวอาคารตามความกว้างของถนนสาธารณะในข้อ 4 ด้วย และเนื่องจาก การสร้างอาคารบนที่ดินซึ่งอยู่ติดถนนสาธารณะดังกล่าว ให้ใกล้ถนนสาธารณะที่สุดและเป็นไปตามกฎกระทรวง ฉบับที่ 55 (พ.ศ. 2543) ออกตามความในพระราชบัญญัติควบคุมอาคาร พ.ศ. 2522 ข้อ 44 นั้น ความสูงของอาคารไม่ว่าจากจุดหนึ่งจุดใด ต้องไม่เกินสองเท่าของระยะราบ วัดจากจุดนั้นไปตั้งฉากกับแนวเขตด้านตรงข้ามของถนนสาธารณะที่อยู่ใกล้อาคารนั้นที่สุด
จะได้ รูปแสดงสถานการณ์โจทย์กำหนดให้เป็นดังนี้



จากรูป จะเห็นว่าระยะในแนวราบ วัดจากแนวอาคารไปตั้งฉากกับแนวเขตด้านตรงข้ามของถนนสาธารณะที่อยู่ใกล้อาคารนั้นที่สุดเป็นระยะ $\frac{x}{10}+x=\frac{11x}{10}$ เมตร แต่ความสูงของอาคารไม่ว่าจากจุดหนึ่งจุดใด ต้องไม่เกินสองเท่าของระยะในแนวราบ

ดังนั้น จะสร้างอาคารที่มีความสูงได้มากที่สุด $2\times\frac{11x}{10}=2.2x$ เมตร

6. เขียนรูปแสดงสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ดังนี้



ให้กล้องถ่ายภาพทำมุมเงย θ องศา และ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป

จะได้ว่า $\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{2.2x - 2 - 1.2}{1.1x} = 2 - \frac{32}{11x}$

นั่นคือ $\theta \approx \arctan\left(2 - \frac{32}{11x}\right)$ เรเดียน

ดังนั้น จะต้องตั้งกล้องถ่ายภาพให้ทำมุมเงยประมาณ $\arctan\left(2 - \frac{32}{11x}\right)$ เรเดียน

แนวทางการจัดกิจกรรม : การก่อสร้างอาคารสูง

เวลาในการจัดกิจกรรม 50 นาที

กิจกรรมนี้เสนอไว้ให้นักเรียนใช้ความรู้ เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ โดยกิจกรรมนี้มีสื่อ/แหล่งการเรียนรู้ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรม “การก่อสร้างอาคารสูง”
2. เครื่องคำนวณ

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 – 4 คน แบบคละความสามารถ จากนั้นแจกใบกิจกรรมการก่อสร้างอาคารสูงให้กับนักเรียนทุกคน แล้วให้นักเรียนศึกษาสถานการณ์ปัญหา
2. ครูควรนำอภิปรายเกี่ยวกับความหมายของข้อบังคับของกฎกระทรวง ฉบับที่ 55 (พ.ศ. 2543) ออกตามความในพระราชบัญญัติควบคุมอาคาร พ.ศ. 2522 โดยข้อ 41 และ 44 ว่าด้วยเรื่องการกำหนดแนวอาคารและระยะต่าง ๆ ของอาคาร เพื่อให้นักเรียนทุกคนเข้าใจตรงกันโดยการเขียนรูปประกอบการอธิบาย
3. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 1 – 3 ในใบกิจกรรม ทั้งนี้ครูควรชี้แนะให้นักเรียนแต่ละกลุ่มพิจารณาเงื่อนไขที่กำหนดไว้ในแต่ละข้อ พร้อมทั้งสนับสนุนให้นักเรียนวาดรูปประกอบการพิจารณาในแต่ละข้อ
4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบที่ได้ในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ $1-3$
5. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 4 – 6 ในใบกิจกรรม ทั้งนี้ ครูควรชี้แนะให้นักเรียนสังเกตว่าจากสถานการณ์ที่กำหนดต้องพิจารณาเงื่อนไขใดบ้าง ซึ่งนักเรียนควรบอกได้ว่าต้องพิจารณาความกว้างของถนนสาธารณะที่กว้าง x เมตร โดยที่ $10 \le x \le 20$ นอกจากนี้ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนวาดรูปประกอบการพิจารณาในแต่ละข้อ
6. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบที่ได้ในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ $4-6$

1.4 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน

การวัดผลระหว่างเรียนมีจุดมุ่งหมายเพื่อปรับปรุงการเรียนรู้และพัฒนาการเรียนการสอน และตรวจสอบนักเรียนแต่ละคนว่ามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่ครูสอนมากน้อยเพียงใด การให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเป็นแนวทางหนึ่งที่ครูอาจใช้เพื่อประเมินผลด้านความรู้ระหว่างเรียนของนักเรียน ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดที่ครอบคลุมเนื้อหาที่สำคัญของแต่ละบทไว้ สำหรับในบทที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ครูอาจใช้แบบฝึกหัดเพื่อวัดผลประเมินผลความรู้ในแต่ละเนื้อหาได้ดังนี้

เนื้อหา	แบบฝึกหัด	
ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ	1.1	ข้อ 1 – 10
	1.2	ข้อ 1 – 10
ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมและฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	1.3	ข้อ 1 – 11, 13
การแก้ปัญหาโดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม	1.3	ข้อ 12, 14 – 15
กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	1.4	ข้อ 1 – 2
ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม	1.5	ข้อ 1 – 7
ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	1.6	ข้อ 1 – 3
การประยุกต์ของตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	1.6	ข้อ 4
การพิสูจน์เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	1.7.1	ข้อ 1 – 3
การแก้สมการตรีโกณมิติ	1.7.2	ข้อ 1 – 3
การแก้ปัญหาโดยใช้กฎของไซน์และกฎของโคไซน์	1.8	ข้อ 1 – 7
การแก้ปัญหาเกี่ยวกับระยะทางและความสูงโดยใช้ความรู้เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	1.9	ข้อ 1 – 11

1.5 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 มีจุดมุ่งหมายว่าเมื่อนักเรียนได้เรียนจบบทที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ แล้วนักเรียนสามารถ

1. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
2. หาคาบ แอมพลิจูด เรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
3. ใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมในการแก้ปัญหา
4. หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
5. พิสูจน์เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
6. แก้สมการตรีโกณมิติ
7. ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา
8. ใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติในการแก้ปัญหา

ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดท้ายบทที่ประกอบด้วยโจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียน โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมาย นอกจากนี้มีโจทย์ฝึกทักษะที่มีความน่าสนใจและโจทย์ท้าทาย ครูอาจเลือกใช้แบบฝึกหัดท้ายบทวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบทเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนมีความสามารถตามจุดมุ่งหมายเมื่อเรียนจบบทเรียนหรือไม่

ทั้งนี้ แบบฝึกหัดท้ายบทแต่ละข้อในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 บทที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียน ดังนี้

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
1. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	1	1) – 8)
	2	1) – 6)
	3	
	4	
	5	
	6	1) – 4)

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
2. หาคาบ แอมพลิจูด เรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	12	1) – 2)
	13	1) – 6)
3. ใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมในการแก้ปัญหา	14	1) – 16)
	15	
	16	
	17	
	18	
4. หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	20	1) – 12)
	23	1) – 4)
5. พิสูจน์เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	19	1) – 14)
	24	1) – 16)
	25	1) – 2)
6. แก้สมการตรีโกณมิติ	26	1) – 8)
	27	1) – 4)
	28	1) – 2)
7. ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา	29	1) – 6)
	30	
	31	
	34	
	35	
	36	
	38	
	44	

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
8. ใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติในการแก้ปัญหา	9	
	10	
	11	
	33	
	37	
	39	1)
	40	1) – 4)
	41	1) – 2)
	42	
	43	1) – 3)
	45	1) – 3)
โจทย์ท้าทาย	7	
	8	
	12	3) – 8)
	21	
	22	
	25	3) – 4)
	32	
	39	2)

1.6 ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู

- เอกลักษณ์ที่นำเสนอในบทนี้ สามารถจัดกลุ่มได้ดังนี้

1. เอกลักษณ์พื้นฐาน (Fundamental identities)

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \operatorname{cosec}\theta \neq 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \sec\theta \neq 0$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cot\theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos\theta \neq 0 \ \text{หรือ} \ \cot\theta \neq 0$$

2. เอกลักษณ์แบบพีทาโกรัส (Pythagorean identities)

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$$

3. เอกลักษณ์ของมุมลบ (Negative angle identities)

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

4. เอกลักษณ์แบบฟังก์ชันร่วม (Cofunction identities)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

5. เอกลักษณ์แบบผลบวกและผลต่าง (Sum and difference identities)

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

6. เอกลักษณ์ของมุมสองเท่า (Double – angle identities)

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$= \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

7. เอกลักษณ์ของครึ่งมุม (Half – angle identities)

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

8. เอกลักษณ์แบบผลคูณ (Product identities)

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$$

9. เอกลักษณ์แบบตัวประกอบ (Factoring identities)

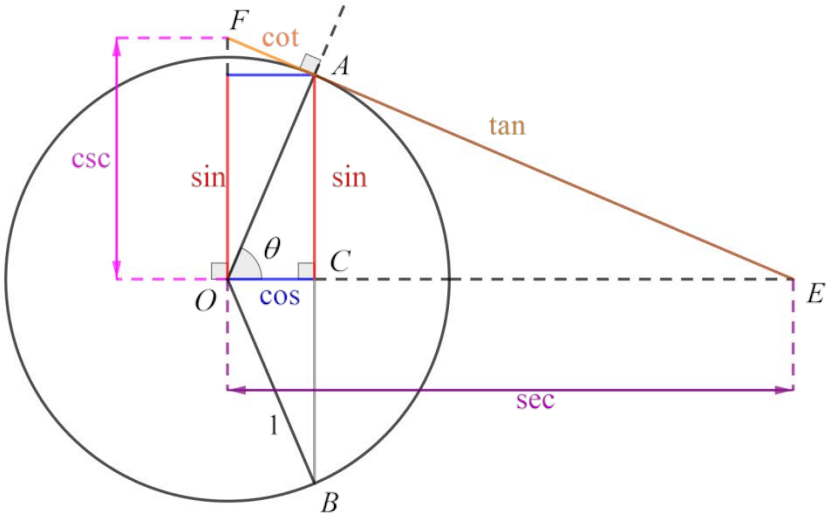
$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

- ที่มาของชื่อของฟังก์ชันตรีโกณมิติเกิดจากการพิจารณา วงกลมหนึ่งหน่วย ดังรูป โดยให้ส่วนของเส้นตรง AB เป็นคอร์ดของวงกลม ซึ่ง θ เป็นครึ่งหนึ่งของมุมที่รองรับคอร์ดนั้น จะได้



$\sin\theta$ คือ ความยาวของครึ่งหนึ่งของคอร์ด หรือความยาวของส่วนของเส้นตรง AC ซึ่งมาจากคำภาษาละตินว่า sinus

$\cos\theta$ คือ ระยะทางตามแนวแกนนอน OC ซึ่งเป็น complement ของฟังก์ชัน $\sin\theta$

$\tan\theta$ คือ ความยาวของส่วนของเส้นตรง AE ของเส้นสัมผัสที่ลากผ่านจุด A จึงเป็นที่มาของคำว่าแทนเจนต์ (tangent หมายถึง สัมผัส)

$\cot\theta$ คือ ส่วนของเส้นสัมผัสที่เหลือ ซึ่งคือความยาว AF ซึ่งเป็น complement ของฟังก์ชัน $\tan\theta$

$\sec\theta$ คือ ความยาวของส่วนของเส้นตรง OE

$\operatorname{cosec}\theta$ คือ ความยาวของส่วนของเส้นตรง OF เป็นส่วนของเส้นเซแคนต์ (ตัดวงกลมที่จุดสองจุด) ซึ่งสามารถมองว่าเป็นภาพฉายของส่วนของเส้นตรง OA ตามแนวเส้นสัมผัสที่จุด A ไปยังแกนนอนและแกนตั้งตามลำดับ ซึ่งเป็น complement ของฟังก์ชัน $\sec\theta$

- นอกจากการเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y=\cos x$ โดยการกำหนดค่า x และหาค่า y ตามที่นำเสนอในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 แล้ว อาจพิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y=\cos x$ เป็นการเลื่อนกราฟของฟังก์ชัน $y=\sin x$ โดยใช้เอกลักษณ์ $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ และ $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ ดังนี้

จาก $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

จะได้ $\cos x = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x$ ----- (1)

เนื่องจาก $\cos\frac{\pi}{2}\sin x = 0\cdot\sin x$

$= -(0\cdot\sin x)$

$= -\cos\frac{\pi}{2}\sin x$

จาก (1) จะได้ $\cos x = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \left(-\cos\frac{\pi}{2}\sin x\right)$

$= \sin\frac{\pi}{2}\cos x + \cos\frac{\pi}{2}\sin x$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ ----- (2)

จาก 2 จะได้ว่า กราฟของ $y=\cos x$ เป็นการเลื่อนกราฟ $y=\sin x$ ไปทางซ้ายตามแนวแกน X เป็นระยะ $\frac{\pi}{2}$

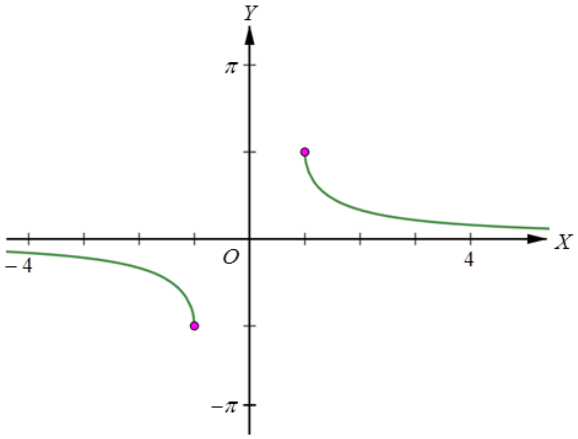
- ฟังก์ชัน arccosecant, arcsecant, arccotangent และกราฟของฟังก์ชันดังกล่าว เป็นดังนี้

1. ฟังก์ชัน arccosecant

บทนิยาม

ฟังก์ชัน arccosecant คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x=\operatorname{cosec} y$ และ $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ และ $y\neq 0$

กราฟของฟังก์ชัน $y=\operatorname{arccosec} x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ เป็นดังนี้

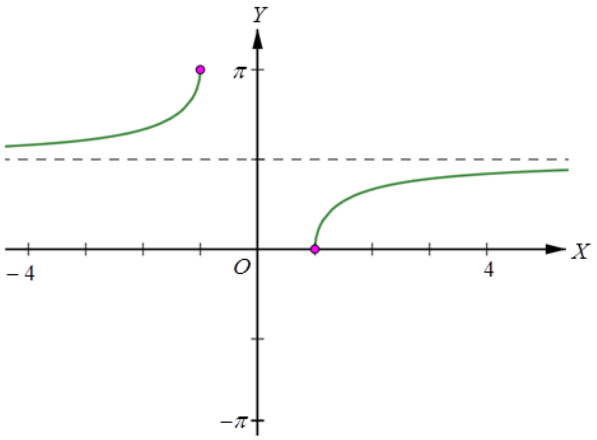


2. ฟังก์ชัน arcsecant

บทนิยาม

ฟังก์ชัน arcsecant คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \sec y$ และ $0 \le y \le \pi$ และ $y \ne \frac{\pi}{2}$

กราฟของฟังก์ชัน $y = \text{arcsec } x$ เมื่อ $0 \le y \le \pi$ และ $y \ne \frac{\pi}{2}$ เป็นดังนี้

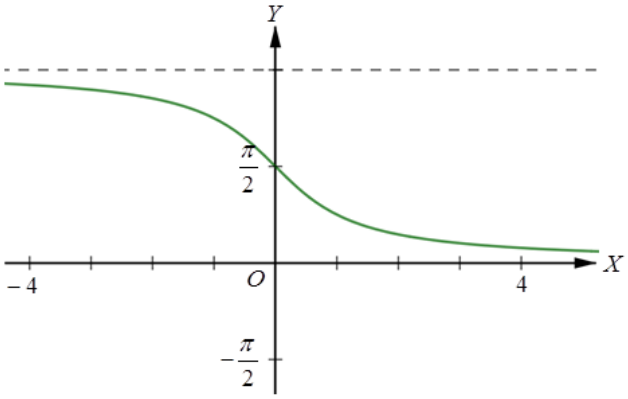


3. ฟังก์ชัน arccotangent

บทนิยาม

ฟังก์ชัน arccotangent คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \cot y$ และ $0 \le y \le \pi$

กราฟของฟังก์ชัน $y = \text{arccot } x$ เมื่อ $0 \le y \le \pi$ เป็นดังนี้

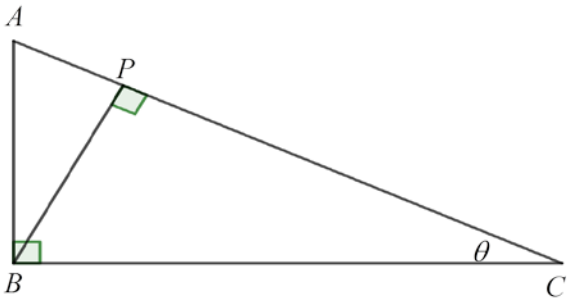


1.7 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทและเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

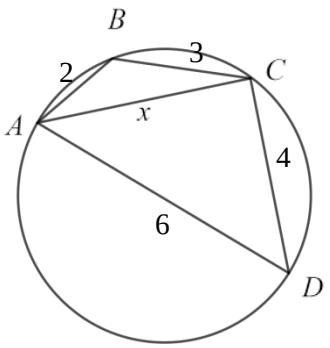
ในส่วนนี้จะนำเสนอตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ซึ่งครูสามารถเลือกนำไปใช้ได้ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดผลประเมินผล

ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. กำหนดให้ $\sin\alpha+\cos\alpha=1.2$ จงหา $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$
2. จากรูป รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีด้าน AC และ BP ยาว 4 และ 1 หน่วย ตามลำดับ $\overline{BP}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ ที่จุด P จงหาขนาดของมุม ACB



3. กำหนดให้ $\dfrac{-3+4\cos^2\theta}{1-2\sin\theta}=a+b\sin\theta$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง จงหา a และ b
4. กำหนดให้ $0\le x\le 2\pi$ จงหา x ทั้งหมดที่ทำให้ $\sin 2x+\cos 2x+\sin x+\cos x+1=0$
5. กำหนดให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม ซึ่ง $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ และ $\overline{DA}$ ยาว 2, 3, 4 และ 6 หน่วย ตามลำดับ ดังรูป จงหาความยาวของ $\overline{AC}$



6. รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านทั้งสามยาว x, y และ $\sqrt{x^2+xy+y^2}$ หน่วย จงหาขนาดของมุมที่ใหญ่ที่สุดของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้
7. ถ้าเข็มยาวและเข็มสั้นของนาฬิกายาว 6 และ 4 เซนติเมตร ตามลำดับ จงหาระยะทางจากจุดปลายของเข็มยาวไปยังจุดปลายของเข็มสั้น เมื่อนาฬิกาเรือนนี้บอกเวลา 14:00 น.

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. เนื่องจาก $\sin\alpha+\cos\alpha = 1.2$ ----- (1)

จะได้ $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = 1.2^2$

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha = 1.44$

$1+2\sin\alpha\cos\alpha = 1.44$

$2\sin\alpha\cos\alpha = 0.44$

$\sin\alpha\cos\alpha = 0.22$ ----- (2)

และ $(\sin\alpha+\cos\alpha)^3 = 1.2^3$

$\sin^3\alpha+3\sin^2\alpha\cos\alpha+3\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^3\alpha = 1.728$

$\sin^3\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)+\cos^3\alpha = 1.728$

จาก (1) และ (2) จะได้

$\sin^3\alpha+3(0.22)(1.2)+\cos^3\alpha = 1.728$

$\sin^3\alpha+0.792+\cos^3\alpha = 1.728$

$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha = 0.936$

2. เนื่องจาก พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $ABC = \frac{1}{2}\times AC\times BP$

จะได้ $\frac{1}{2}\times 4\times 1 = \frac{1}{2}\times AC\sin\theta\times AC\cos\theta$

$2 = \frac{1}{2}\times 4\sin\theta\times 4\cos\theta$

$2 = 8\sin\theta\cos\theta$

$1 = 4\sin\theta\cos\theta$

$1 = 2(2\sin\theta\cos\theta)$

$2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\sin 2\theta = \frac{1}{2}$

เนื่องจาก $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ หรือ $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$

จะได้ $2\theta = 30^\circ$ หรือ $2\theta = 150^\circ$

ดังนั้น $\theta = 15^\circ$ หรือ $\theta = 75^\circ$

3. เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\frac{-3+4\cos^2\theta}{1-2\sin\theta} &= \frac{-3+4\left(1-\sin^2\theta\right)}{1-2\sin\theta}\\ &= \frac{-3+4-4\sin^2\theta}{1-2\sin\theta}\\ &= \frac{1-4\sin^2\theta}{1-2\sin\theta}\\ &= \frac{(1-2\sin\theta)(1+2\sin\theta)}{1-2\sin\theta}\\ &= 1+2\sin\theta\end{aligned}$$

จะได้ $a=1$ และ $b=2$

4. เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\sin 2x+\cos 2x+\sin x+\cos x+1 &= 0\\ 2\sin x\cos x+\left(2\cos^2 x-1\right)+\sin x+\cos x+1 &= 0\\ \left(2\sin x\cos x+\sin x\right)+\left(2\cos^2 x-1+\cos x+1\right) &= 0\\ \sin x\left(2\cos x+1\right)+\cos x\left(2\cos x+1\right) &= 0\\ \left(2\cos x+1\right)\left(\sin x+\cos x\right) &= 0\end{aligned}$$

จะได้ $2\cos x+1 = 0$ หรือ $\sin x+\cos x = 0$

$2\cos x = -1$ หรือ $\frac{\sin x}{\cos x}+1 = 0$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ หรือ $\tan x = -1$

นั่นคือ $x=\frac{3\pi}{4}$ หรือ $x=\frac{7\pi}{4}$ หรือ $x=\frac{2\pi}{3}$ หรือ $x=\frac{4\pi}{3}$

ดังนั้น x คือ $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$ หรือ $\frac{4\pi}{3}$

5. โดยกฎของโคไซน์ เมื่อพิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม ADC จะได้

$x^2 = 4+9-12\cos B$ ----- (1)

และ $x^2 = 36+16-48\cos D$ ----- (2)

เนื่องจากรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม

จะได้ว่าผลรวมของขนาดของมุม D และขนาดของมุม B เป็น 180 องศา

นั่นคือ $\cos D = \cos(180^\circ - B)$

$= -\cos B$

แทน $\cos D$ ใน (2) ด้วย $-\cos B$ จะได้

$x^2 = 36 + 16 - 48(-\cos B)$

$x^2 = 36 + 16 + 48\cos B$ ----- (3)

จาก (1) และ (3) จะได้ $\cos B = -\frac{39}{60}$

แทน $\cos B$ ใน (1) ด้วย $-\frac{39}{60}$ จะได้

$x^2 = 4 + 9 - 12\left(-\frac{39}{60}\right)$

$x^2 = \frac{104}{5}$

นั่นคือ $x = -\sqrt{\frac{104}{5}}$ หรือ $x = \sqrt{\frac{104}{5}}$

เนื่องจาก x เป็นความยาวของด้าน AC จะได้ $x = \sqrt{\frac{104}{5}}$

ดังนั้น ด้าน AC ยาว $\sqrt{\frac{104}{5}}$ หน่วย

6. เนื่องจากด้านที่ยาว $\sqrt{x^2 + xy + y^2}$ หน่วย เป็นด้านที่ยาวที่สุด

ดังนั้น มุมตรงข้ามด้านที่ยาว $\sqrt{x^2 + xy + y^2}$ หน่วย จึงเป็นมุมที่ใหญ่ที่สุด

ให้มุมที่ใหญ่ที่สุดมีขนาด θ

โดยกฎของโคไซน์ จะได้

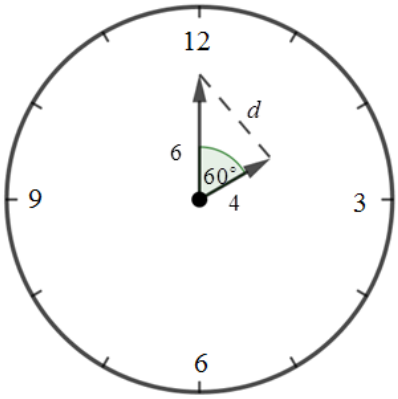
$x^2 + xy + y^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = 120^\circ$

ดังนั้น มุมที่ใหญ่ที่สุดของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้มีขนาด 120°

7. เนื่องจากมุมระหว่างเข็มยาวและเข็มสั้นเมื่อนาฬิกาบอกเวลา 14:00 น. มีขนาด 60° ซึ่งแสดงได้ดังรูป



จากกฎของโคไซน์ จะได้

$$\begin{aligned} d^2 &= 6^2+4^2-2(6)(4)\cos 60^{\circ} \\ d^2 &= 36+16-24 \\ d^2 &= 28 \end{aligned}$$

$$d=-2\sqrt{7} \text{ หรือ } d=2\sqrt{7}$$

เนื่องจาก d เป็นระยะห่างจากจุดปลายของเข็มยาวไปยังจุดปลายของเข็มสั้น

นั่นคือ $d>0$

ดังนั้น ระยะห่างจากจุดปลายของเข็มยาวไปยังจุดปลายของเข็มสั้น เมื่อนาฬิกาเรือนนี้บอกเวลา 14:00 น. คือ $2\sqrt{7}$ หน่วย

บทที่ 2

เมทริกซ์

เมทริกซ์เป็นสาระการเรียนรู้ที่ใช้เป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการวางแผนการทำงานหรือการวางแผนเพื่อการตัดสินใจ นอกจากนี้ยังมีการนำความรู้เรื่องเมทริกซ์ไปใช้ในการจัดการข้อมูลและเป็นพื้นฐานการคำนวณในด้านต่าง ๆ เช่น ด้านการแพทย์ คอมพิวเตอร์กราฟิก วิทยาการหุ่นยนต์ โดยในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 บทที่ 2 เมทริกซ์ จะนำเสนอบทนิยามเกี่ยวกับเมทริกซ์ การเท่ากันและพีชคณิตของเมทริกซ์ เมทริกซ์สลับเปลี่ยน ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ 3×3 เมทริกซ์ผกผัน และการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์

ในบทเรียนนี้มุ่งเน้นให้นักเรียนบรรลุผลการเรียนรู้ตามสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม และบรรลุจุดมุ่งหมายดังต่อไปนี้

ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

ผลการเรียนรู้

- เข้าใจความหมาย หาผลลัพธ์ของการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ และหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $n\times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม
- หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ 2×2
- แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันและการดำเนินการตามแถว

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

- เมทริกซ์และเมทริกซ์สลับเปลี่ยน
- การบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์
- ดีเทอร์มิแนนต์
- เมทริกซ์ผกผัน
- การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์

จุดมุ่งหมาย

1. หาผลบวกของเมทริกซ์กับเมทริกซ์
2. หาผลคูณของเมทริกซ์กับจำนวนจริง
3. หาผลคูณของเมทริกซ์กับเมทริกซ์
4. หาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน
5. หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ขนาด 2×2
6. หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ 3×3
7. แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันและการดำเนินการตามแถว
8. ใช้ความรู้เกี่ยวกับเมทริกซ์ในการแก้ปัญหา

ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองสมการสองตัวแปร ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

ipst.me/8456

2.1 เนื้อหาสาระ

1. **บทนิยาม 1**

   ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ชุดของจำนวนจริง mn จำนวน ซึ่งเขียนเรียงกันในรูป

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

   เรียกว่า **เมทริกซ์** ชุดของสมาชิกที่เขียนในแนวนอน เรียกว่า **แถว** ของเมทริกซ์ ซึ่งมีทั้งหมด m แถว ชุดของสมาชิกที่เขียนในแนวตั้ง เรียกว่า **หลัก** ของเมทริกซ์ ซึ่งมีทั้งหมด n หลัก เรียก a_{ij} ว่าเป็น **สมาชิก** ในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ ถ้าเมทริกซ์มี m แถว n หลัก จะเรียก $m \times n$ ว่า **ขนาด** หรือ **มิติ** ของเมทริกซ์

2. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ซึ่งมี m แถว n หลัก จะเรียก A ว่าเป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ บางครั้งจะเขียนแสดงเมทริกซ์ A ด้วย $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ เมื่อ กำหนดให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ที่มี a_{ij} เป็นสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j เมื่อ $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

3. **บทนิยาม 2 การเท่ากันของเมทริกซ์**

   ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{p\times q}$

   A เท่ากับ B ก็ต่อเมื่อ $m=p, n=q$ และ $a_{ij}=b_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

   เขียนแทน A เท่ากับ B ด้วย $A=B$

4. ถ้าเมทริกซ์ A และ B มีขนาดต่างกัน จะได้ว่า A ไม่เท่ากับ B และถ้าเมทริกซ์ A และ B มีขนาดเท่ากันแต่มีสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันต่างกันอย่างน้อยหนึ่งคู่ จะได้ว่า A ไม่เท่ากับ B ซึ่งเขียนแทนด้วย $A \neq B$

5. **บทนิยาม 3 การบวกเมทริกซ์**

ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน

ผลบวกของเมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ B คือ เมทริกซ์ $\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ เมื่อ $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ สำหรับทุก $i\in\{1,2,3,\ldots,m\}$ และ $j\in\{1,2,3,\ldots,n\}$ เขียนแทน A บวก B ด้วย $A+B$ นั่นคือ $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[b_{ij}\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}$

6. **บทนิยาม 4 การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง**

ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ c เป็นจำนวนจริง

ผลคูณของ c กับเมทริกซ์ A คือ เมทริกซ์ $\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ เมื่อ $b_{ij}=ca_{ij}$ สำหรับทุก $i\in\{1,2,3,\ldots,m\}$ และ $j\in\{1,2,3,\ldots,n\}$ เขียนแทนผลคูณของ c กับเมทริกซ์ A ด้วย cA นั่นคือ $c\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[ca_{ij}\right]_{m\times n}$

หมายเหตุ จะแทนผลคูณของ -1 กับเมทริกซ์ A ด้วย $-A$ นั่นคือ $-A=(-1)A$

7. **บทนิยาม 5 การลบเมทริกซ์**

ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน เมทริกซ์ A ลบด้วยเมทริกซ์ B คือ ผลบวกของเมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ $-B$ เขียนแทนด้วย $A-B$ นั่นคือ $A-B=A+(-B)$

8. **บทนิยาม 6**

เมทริกซ์ที่มีขนาด $m\times n$ และสมาชิกทุกตำแหน่งเป็น 0 เรียกว่า **เมทริกซ์ศูนย์** เขียนแทนด้วย $\underline{0}_{m\times n}$ หรือ $\underline{0}$

9. **ทฤษฎีบท 1**

ให้ A, B, C และ $\underline{0}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $m\times n$ และ c, d เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

1) $A+B=B+A$
2) $A+(B+C)=(A+B)+C$
3) $A+\underline{0}=\underline{0}+A=A$
4) $A+(-A)=(-A)+A=\underline{0}$
5) $c(A+B)=cA+cB$
6) $(c+d)A=cA+dA$
7) $(cd)A=c(dA)$
8) $1A=A$
9) $0A=\underline{0}$

10. จากทฤษฎีบท 1 ข้อ 3) จะเรียก $\underline{0}$ ว่า **เอกลักษณ์การบวก** ในเซตของเมทริกซ์ขนาด $m\times n$ และจากทฤษฎีบท 1 ข้อ 4) จะเรียก $-A$ ว่า **ตัวผกผันการบวก** หรือ **อินเวอร์สการบวก** ของ A นอกจากนี้ จากทฤษฎีบท 1 ข้อ 2) ทำให้สามารถแทน $A+(B+C)$ และ $(A+B)+C$ ด้วย $A+B+C$ โดยไม่เกิดความสับสน

11. **บทนิยาม 7 การคูณเมทริกซ์**
ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{p\times q}$
ผลคูณของเมทริกซ์ A และ B เขียนแทนด้วย AB จะนิยามได้ ก็ต่อเมื่อ $n=p$ และเมทริกซ์ผลคูณ AB จะมีขนาด $m\times q$ ซึ่งมีสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j เป็น $a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$ สำหรับทุก $i\in\{1, 2, 3, \ldots, m\}$ และ $j\in\{1, 2, 3, \ldots, q\}$

12. สมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ AB ได้มาจากการบวกผลคูณของสมาชิกในแถวที่ i ของ A กับสมาชิกในหลักที่ j ของ B โดยคูณสมาชิกตัวต่อตัวตามลำดับของสมาชิก

13. **บทนิยาม 8**
สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ให้ I_n เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ ซึ่งมีสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ i เป็น 1 สำหรับทุก $i\in\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ และสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j เป็น 0 เมื่อ $i\neq j$ เรียก I_n ว่า **เมทริกซ์เอกลักษณ์** ขนาด $n\times n$

14. **ทฤษฎีบท 2**
ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times p}$ และ $C=\left[c_{ij}\right]_{p\times q}$ จะได้ว่า
1) $A(BC)=(AB)C$
2) $\underline{0}_{r\times m}A=\underline{0}_{r\times n}$ และ $A\underline{0}_{n\times r}=\underline{0}_{m\times r}$
3) $I_mA=A$ และ $AI_n=A$
4) $(cA)B=A(cB)=c(AB)$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง
5) $A(B+D)=AB+AD$ เมื่อ D เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times p$
6) $(A+E)B=AB+EB$ เมื่อ E เป็นเมทริกซ์ขนาด $m\times n$

15. **บทนิยาม 9**
เมทริกซ์จัตุรัส คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก

16. สมบัติที่สำคัญของเมทริกซ์จัตุรัส คือ ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n\times n$ แล้วจะสามารถหา AB, BA, AA และ BB ได้เสมอ และเมทริกซ์ผลคูณที่ได้จะเป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n\times n$ ด้วย ดังนั้น เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกจะสามารถหาผลคูณของ A จำนวน k ตัว ได้เสมอ และเพื่อความสะดวกจะแทน $\underbrace{AAA\ldots A}_{k\text{ ตัว}}$ ด้วย A^k

17. **บทนิยาม 10**
ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ถ้า $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times m}$ โดยที่ $b_{ij}=a_{ji}$ สำหรับทุก $i\in\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ และ $j\in\{1, 2, 3, \ldots, m\}$ แล้วจะเรียก B ว่า **เมทริกซ์สลับเปลี่ยน** ของ A เขียนแทนด้วย A^t
ข้อสังเกต ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m\times n$ แล้ว A^t จะเป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times m$ ที่มีสมาชิกในแถวที่ i เหมือนกับสมาชิกในหลักที่ i ของ A สำหรับทุก $i\in\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

18. **ทฤษฎีบท 3**
1) $(A+B)^t=A^t+B^t$ เมื่อ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $m\times n$
2) $(AB)^t=B^tA^t$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m\times n$ และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times p$
3) $\left(A^t\right)^t=A$
4) $(cA)^t=cA^t$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง

19. **บทนิยาม 11**
ให้ $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ จะได้ ดีเทอร์มิแนนต์ของ A คือ $ad-bc$

20. เขียนแทนดีเทอร์มิแนนต์ของ A ด้วย $\det(A)$ หรือ $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ ซึ่ง $\det(A)$ หาได้จากการนำผลคูณของจำนวนตามเส้นทึบในแนวทแยงลบด้วยผลคูณของจำนวนตามเส้นประในแนวทแยง แสดงด้วยแผนภาพได้ดังนี้

$$\det(A)=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

21. **บทนิยาม 12**

ให้ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ จะได้

$$\det(A)=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

22. การหาดีเทอร์มิแนนต์ในบทนิยาม 12 เรียกว่า **การกระจายตามแถวที่ 1** นอกจากนี้ยังสามารถหาดีเทอร์มิแนนต์โดยการกระจายตามแถวที่ 2 หรือแถวที่ 3 ได้ ดังต่อไปนี้

กระจายตามแถวที่ 2 จะได้

$$\det(A)=(-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{2+2}a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{2+3}a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

กระจายตามแถวที่ 3 จะได้

$$\det(A)=(-1)^{3+1}a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}+(-1)^{3+2}a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

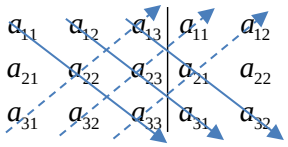
โดยทั้งสามวิธีจะได้ผลลัพธ์เท่ากัน คือ

$$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

23. ขั้นตอนการหาดีเทอร์มิแนนต์สำหรับเมทริกซ์ขนาด 3×3

ขั้นตอนที่ 1 เขียนหลักที่ 1 และ 2 ของเมทริกซ์เพิ่มเข้าไปต่อจากหลักที่ 3

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณผลคูณของจำนวนตามเส้นในแนวทแยงทั้ง 6 เส้น ในแผนภาพ โดยนำผลคูณของจำนวนตามเส้นทึบในแนวทแยงแต่ละเส้นมาบวกกัน แล้วลบด้วยผลคูณของจำนวนตามเส้นประในแนวทแยงแต่ละเส้น



24. **ทฤษฎีบท 4**

ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีขนาดเท่ากัน และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ จะได้ว่า

1) $\det(I)=1$
2) ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากการสลับแถวสองแถวของเมทริกซ์ A แล้ว $\det(B)=-\det(A)$
3) ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากการคูณสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่งของเมทริกซ์ A ด้วยค่าคงตัว c แล้ว $\det(B)=c\det(A)$
4) ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากการคูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวใดแถวหนึ่งของเมทริกซ์ A ด้วยค่าคงตัว c แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวที่อยู่ในหลักเดียวกันในอีกแถวหนึ่ง แล้ว $\det(B)=\det(A)$
5) ถ้าเมทริกซ์ A มีแถว 2 แถวที่เหมือนกัน แล้ว $\det(A)=0$
6) $\det(A^t)=\det(A)$
7) $\det(AB)=\det(A)\det(B)$
8) $\det(A^n)=(\det(A))^n$

หมายเหตุ เนื่องจาก $\det(A^t)=\det(A)$ ดังนั้น จากบทนิยาม 12 จะเห็นว่าสามารถหาดีเทอร์มิแนนต์โดยการกระจายตามหลักได้ด้วย นอกจากนี้ทฤษฎีบท 4 ข้อ 2) – 5) ยังคงเป็นจริง เมื่อเปลี่ยนคำว่า “แถว” เป็น “หลัก”

25. **บทนิยาม 13**

ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ ถ้ามีเมทริกซ์ B ขนาด $n\times n$ ซึ่ง $AB=BA=I_n$ แล้วจะเรียก B ว่า **เมทริกซ์ผกผัน** หรือ **ตัวผกผันการคูณ** หรือ **อินเวอร์สการคูณ** ของเมทริกซ์ A และเขียนแทนด้วย A^{-1}

หมายเหตุ จะนิยามเมทริกซ์ผกผันของ A เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสเท่านั้น

26. **ทฤษฎีบท 5**

ถ้า A มีเมทริกซ์ผกผัน แล้วเมทริกซ์ผกผันของ A จะมีเพียงเมทริกซ์เดียวเท่านั้น

27. **ทฤษฎีบท 6**

ให้ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ เมื่อ $ad-bc\neq 0$

ข้อสังเกต $ad-bc$ เป็นดีเทอร์มิแนนต์ของ A นั่นคือ $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

เมื่อ $\det(A)\neq 0$

ถ้า $\det(A)=0$ แล้วเมทริกซ์ A จะไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

28. **ระบบสมการเชิงเส้น** คือ ระบบที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นตั้งแต่สองสมการขึ้นไป

29. ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, b$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จะเรียกสมการ $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=b$ ว่า **สมการเชิงเส้น n ตัวแปร** โดยที่ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ เป็นตัวแปร

30. **บทนิยาม 14**

ระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการ และมี n ตัวแปร คือ ระบบสมการที่อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

เมื่อ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ เป็นตัวแปร และ a_{ij}, b_i เป็นจำนวนจริง สำหรับ $i\in\{1, 2, 3, \ldots, m\}$ และ $j\in\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

จะกล่าวว่า $(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ ก็ต่อเมื่อ $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ เป็นจำนวนจริง ที่เมื่อนำไปแทนตัวแปร $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ตามลำดับ ในแต่ละสมการแล้วได้สมการที่เป็นจริงทั้งหมด

31. สำหรับจำนวนจริง $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ จะเรียก $(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n)$ ว่า n สิ่งอันดับ

32. ในกรณีทั่วไป สำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย m สมการ n ตัวแปร

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

สามารถเขียนระบบสมการนี้ในรูปสมการเมทริกซ์ $AX = B$ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ X เป็นเมทริกซ์ของตัวแปร และ B เป็นเมทริกซ์ของค่าคงตัวทางขวามือของระบบสมการ จะเห็นว่าหลักที่ i ของเมทริกซ์ A เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x_i เมื่อ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

33. ถ้า $AX = B$ เป็นระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปร แล้ว A จะเป็นเมทริกซ์จัตุรัส และถ้า A มีเมทริกซ์ผกผันแล้ว จะได้

$$X = IX = \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}\left(AX\right) = A^{-1}B$$

นั่นคือ $X = A^{-1}B$ เป็นคำตอบของระบบสมการ $AX = B$

34. ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ ถ้าเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ไม่มีเมทริกซ์ผกผันแล้ว ระบบสมการอาจมีคำตอบเป็นจำนวนอนันต์หรือไม่มีคำตอบก็ได้

35. สมมติว่าแทนสมการ $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ ด้วย (1)
และแทนสมการ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$ ด้วย (2)
และให้ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ เพื่อความสะดวก จะใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้
1) ใช้ $c \times (1)$ แทนสมการ $c\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\right) = cb_1$
2) ใช้ $(1)+(2)$ แทนสมการ
$\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\right) + \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n\right) = b_1 + b_2$

36. กระบวนการต่อไปนี้ไม่ทำให้คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเปลี่ยนแปลง
1) สลับสองสมการ
2) คูณสมการใดสมการหนึ่งด้วยค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์

3) คูณสมการหนึ่งด้วยค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์แล้วนำไปบวกกับอีกสมการ

37. **บทนิยาม 15**

สำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย m สมการ n ตัวแปร ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

จะเรียกเมทริกซ์ที่อยู่ในรูป

$$\left[A \mid B\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

ว่า เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการ

38. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรจึงนิยมเขียนระบบสมการในรูปเมทริกซ์แต่งเติม แล้วใช้การดำเนินการตามแถว ซึ่งมี 3 แบบต่อไปนี้กับเมทริกซ์

แบบที่ 1 สลับแถวที่ i และแถวที่ j ของเมทริกซ์ ซึ่งจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $R_i \leftrightarrow R_j$

แบบที่ 2 คูณสมาชิกในแถวที่ i ด้วยค่าคงตัว c เมื่อ $c \neq 0$ ซึ่งจะแทนด้วยสัญลักษณ์ cR_i

แบบที่ 3 คูณสมาชิกในแถวที่ i ด้วยค่าคงตัว c เมื่อ $c \neq 0$ แล้วนำไปบวกกับสมาชิกในแถวที่ j เมื่อ $i \neq j$ ซึ่งจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $cR_i + R_j$ (แทนผลลัพธ์นี้ในแถวที่ j)

เรียกการดำเนินการกับเมทริกซ์แต่ละแบบนี้ว่า **การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐาน**

39. **บทนิยาม 16**

ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากการดำเนินการตามแถวบนเมทริกซ์ A จะกล่าวว่า **เมทริกซ์ A สมมูลกับเมทริกซ์ B** เขียนแทนด้วย $A \sim B$

40. **ทฤษฎีบท 7**

ให้ $AX = B$ และ $CX = D$ เป็นระบบสมการเชิงเส้น ถ้า $\left[A \mid B\right]$ สมมูลกับ $\left[C \mid D\right]$ แล้ว $AX = B$ และ $CX = D$ มีคำตอบเหมือนกัน

2.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน

เมทริกซ์

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ครูควรเน้นให้นักเรียนบอกขนาดของเมทริกซ์และระบุสมาชิกของเมทริกซ์ในตำแหน่งต่าง ๆ ได้ เพราะจะเป็นพื้นฐานสำคัญในการหาผลบวกหรือผลคูณของเมทริกซ์ โดยอาจยกตัวอย่างเมทริกซ์ที่มีขนาดแตกต่างกัน แล้วให้นักเรียนระบุขนาดและสมาชิกบางตัวของเมทริกซ์ เช่น

  กำหนดเมทริกซ์ $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & -3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 7 & 5\end{bmatrix}$ และ $C=\begin{bmatrix}10 & -2 & -5\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}$

  จงหา 1) ขนาดของ A, B และ C

  2) a_{21}, b_{13} และ c_{12}

- จากบทนิยาม 2 เมื่อพิจารณาว่าเมทริกซ์ A เท่ากับ B หรือไม่นั้น จะต้องพิจารณา 2 ประเด็น คือ

  1) ขนาดหรือมิติของเมทริกซ์ A และ B เท่ากันหรือไม่

  2) สมาชิกของเมทริกซ์ A และ B ในตำแหน่งเดียวกันเท่ากันหรือไม่

- เมื่อนักเรียนได้เรียนเกี่ยวกับการบวกและการคูณเมทริกซ์แล้ว ครูอาจยกตัวอย่างเมทริกซ์ที่มีขนาดต่างกัน เช่น $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-2 & 0\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}10 & -2 & -5\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{bmatrix}$ และ $E=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$ เพื่อให้นักเรียนพิจารณาว่าเมทริกซ์คู่ใดที่บวกกันหรือคูณกันได้บ้าง เพื่อให้นักเรียนได้ข้อสรุปว่า เมทริกซ์ที่บวกกันได้ต้องเป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน และเมทริกซ์ที่คูณกันได้ต้องเป็นเมทริกซ์ที่มีจำนวนหลักของเมทริกซ์ตัวหน้าเท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ตัวหลัง

- เมื่อกำหนดเมทริกซ์ A และ B มาให้ การหาผลคูณของเมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ B จะหมายถึงการหา AB เท่านั้น

- ตัวอย่างที่ 7, 8, 9 และ 10 ใช้ในการสอนเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ในกรณีต่าง ๆ ดังนี้
  - ตัวอย่างที่ 7 เป็นตัวอย่างที่หา AB ได้ แต่ BA ไม่นิยาม
  - ตัวอย่างที่ 8 และ 9 เป็นตัวอย่างที่หาทั้ง AB และ BA ได้ แต่ AB และ BA มีขนาดไม่เท่ากัน ดังนั้น $AB \neq BA$
  - ตัวอย่างที่ 10 เป็นตัวอย่างที่หาทั้ง AB และ BA ได้ โดย AB และ BA มีขนาดเท่ากัน แต่ $AB \neq BA$

กิจกรรม : ยอดขายเค้กในแต่ละวัน

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง การใช้ความรู้เกี่ยวกับบทนิยามของการคูณเมทริกซ์ในการแก้ปัญหา โดยนักเรียนจะได้เชื่อมโยงความรู้เกี่ยวกับบทนิยามของการคูณเมทริกซ์ซึ่งได้เรียนมาแล้ว กับสถานการณ์ปัญหายอดขายเค้กในแต่ละวัน เพื่อให้เห็นการนำความรู้เกี่ยวกับเมทริกซ์ไปใช้ในการแก้ปัญหา

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูจับคู่นักเรียนแบบคละความสามารถ แล้วให้นักเรียนแต่ละคู่ร่วมกันพิจารณาตารางแสดงจำนวนเค้ก (ชิ้น) ที่ขายได้ในร้านเบเกอรี่แห่งหนึ่งในช่วงเวลา 12.00 น. – 13.00 น. เป็นเวลา 4 วัน ดังนี้

วัน	จำนวนเค้กที่ขายได้ (ชิ้น)		
	เค้กกล้วยหอม	เค้กกาแฟ	เค้กช็อกโกแลต
จันทร์	13	8	6
อังคาร	9	7	4
พุธ	7	4	0
พฤหัสบดี	15	6	3

2. จากข้อ 1 ครูให้นักเรียนแต่ละคู่พิจารณาว่า ถ้ากำหนดให้เค้กกล้วยหอมราคาชิ้นละ 8 บาท เค้กกาแฟราคาชิ้นละ 12 บาท และเค้กช็อกโกแลตราคาชิ้นละ 10 บาท ในแต่ละวันร้านเบเกอรี่แห่งนี้มียอดขายเค้กทั้งสามชนิดเป็นเงินเท่าใด

   แนวคำตอบ

   แนวทางหนึ่งที่ทำได้ คือ ใช้วิธีหาผลคูณระหว่างราคาเค้กแต่ละชนิดหนึ่งชิ้นกับจำนวนเค้กชนิดนั้นที่ขายได้ในแต่ละวัน จากนั้นจึงหาผลบวกของผลคูณทั้งหมด ซึ่งจะได้เป็นยอดขายรวมในแต่ละวัน ดังนี้

   - ยอดขายรวมในวันจันทร์ คือ $13(8)+8(12)+6(10)=260$ บาท
   - ยอดขายรวมในวันอังคาร คือ $9(8)+7(12)+4(10)=196$ บาท
   - ยอดขายรวมในวันพุธ คือ $7(8)+4(12)+0(10)=104$ บาท
   - ยอดขายรวมในวันพฤหัสบดี คือ $15(8)+6(12)+3(10)=222$ บาท

3. ครูและนักเรียนแต่ละคู่ร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับแนวทางการหาคำตอบที่ได้ในข้อ 2 โดยในการอภิปราย ครูควรชี้แนะให้นักเรียนเห็นว่าสิ่งสำคัญในการหาคำตอบของปัญหานี้คือการจับคู่กันระหว่างราคาเค้กกับจำนวนเค้กที่ขายได้

4. ครูให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้โดยใช้เมทริกซ์ โดยใช้การถามตอบดังนี้

   - ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 4×3 แสดงข้อมูลจากตารางแสดงจำนวนเค้กที่ขายได้ในแต่ละวันที่อยู่ในข้อ 1 จะเขียน A ได้เป็นอย่างไร

     แนวคำตอบ

     $$A=\begin{bmatrix}13 & 8 & 6\\ 9 & 7 & 4\\ 7 & 4 & 0\\ 15 & 6 & 3\end{bmatrix}$$

   - ให้ B เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×1 แสดงราคาเค้กชนิดต่าง ๆ ตามที่กำหนดในข้อ 2 จะเขียน B ได้เป็นอย่างไร

     แนวคำตอบ

     $$B=\begin{bmatrix}8\\ 12\\ 10\end{bmatrix}$$

5. จาก A และ B ที่ได้ในข้อ 4 ครูให้นักเรียนร่วมกันหา AB

แนวคำตอบ

$$AB=\begin{bmatrix}13&8&6\\9&7&4\\7&4&0\\15&6&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\12\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13(8)+8(12)+6(10)\\9(8)+7(12)+4(10)\\7(8)+4(12)+0(10)\\15(8)+6(12)+3(10)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}260\\196\\104\\222\end{bmatrix}$$

6. จาก AB ที่ได้ในข้อ 5 ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับสมาชิกแต่ละตัวของ AB โดยใช้การถามตอบดังนี้

- การหาสมาชิกแต่ละตัวของ AB ทำได้อย่างไร

  แนวคำตอบ

  สมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 1 คือ 260 หาได้จาก $13(8)+8(12)+6(10)$

  สมาชิกในแถวที่ 2 หลักที่ 1 คือ 196 หาได้จาก $9(8)+7(12)+4(10)$

  สมาชิกในแถวที่ 3 หลักที่ 1 คือ 104 หาได้จาก $7(8)+4(12)+0(10)$

  สมาชิกในแถวที่ 4 หลักที่ 1 คือ 260 หาได้จาก $15(8)+6(12)+3(10)$

  นั่นคือ สมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j ของ AB ได้มาจากการบวกผลคูณของสมาชิกในแถวที่ i ของ A กับสมาชิกในหลักที่ j ของ B โดยคูณสมาชิกตัวต่อตัวตามลำดับของสมาชิก

- เมื่อเปรียบเทียบการหาสมาชิกแต่ละตัวของ AB กับการหายอดขายรวมในแต่ละวันที่ครูและนักเรียนได้ร่วมกันอภิปรายในข้อ 3 นักเรียนพบข้อสังเกตอย่างไร

  แนวคำตอบ

  การหาสมาชิกแต่ละตัวของ AB เป็นลักษณะเดียวกับการหายอดขายรวมในแต่ละวันซึ่งนักเรียนเคยพบโจทย์ปัญหาในลักษณะนี้มาแล้ว

7. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาว่าสามารถหา BA ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

แนวคำตอบ

ไม่สามารถหา BA ได้ เนื่องจาก B มีขนาด 3×1 และ A มีขนาด 4×3 ซึ่งจะเห็นว่าจำนวนหลักของ B ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ A ดังนั้นจึงไม่สามารถหาผลคูณของ B กับ A ได้

หมายเหตุ

- เมื่อทำกิจกรรมนี้แล้ว ครูอาจเปิดโอกาสให้นักเรียนกำหนด A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาดอื่น ๆ ที่แตกต่างจากที่กำหนดในกิจกรรม และให้นักเรียนหา AB และ BA เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์
- จากกิจกรรม ครูอาจให้นักเรียนหา $(AB)^t$ และ B^tA^t แล้วตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้เป็นเช่นเดียวกับคำตอบที่ได้ในกิจกรรมหรือไม่

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

- การแก้ปัญหาโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ เช่น ในแบบฝึกหัด 2.1 ข้อ 16 ยอดขายข้าวแต่ละชนิดของโรงสีรวมใจชาวนาสาขาจังหวัดบุรีรัมย์และจังหวัดเชียงใหม่ (มีหน่วยเป็นตัน) ในเดือนมกราคม 2561 แสดงได้ดังตาราง

ชนิดของข้าว / โรงสี	ข้าวหอมมะลิ	ข้าวเหนียว	ข้าวขาว
สาขาบุรีรัมย์	20	45	8
สาขาเชียงใหม่	55	10	14

ถ้าโรงสีรวมใจชาวนาตั้งราคาขายข้าวหอมมะลิ ข้าวเหนียว และข้าวขาว ในราคาปกติตันละ 23,000 บาท 25,000 บาท และ 17,000 บาท ตามลำดับ และราคาสมาชิกตันละ 22,000 บาท 23,500 บาท และ 15,000 บาท ตามลำดับ จงหารายรับในเดือนมกราคม 2561 ของโรงสีรวมใจชาวนาแต่ละสาขา ในกรณีที่โรงสีขายข้าวทุกชนิดในราคาปกติ และในกรณีที่โรงสีขายข้าวทุกชนิดในราคาสมาชิก

หากพบว่า นักเรียนหาคำตอบของปัญหาข้อนี้ได้ไม่ถูกต้อง อาจไม่ได้เกิดจากการที่นักเรียนไม่มีความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้ปัญหาโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ แต่อาจเกิดจากการกำหนดเมทริกซ์แสดงยอดขายข้าวหรือเมทริกซ์แสดงราคาข้าวไม่ถูกต้อง ซึ่งจะทำให้ผลคูณที่ได้มีความหมายไม่ตรงกับที่โจทย์ถาม

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

- นักเรียนมักเข้าใจผิดว่า $\underline{0}$ เป็นสิ่งเดียวกับ 0 ซึ่งครูต้องเน้นย้ำว่า $\underline{0}$ และ 0 แตกต่างกัน โดย $\underline{0}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $m \times n$ และสมาชิกทุกตำแหน่งเป็นศูนย์ แต่ 0 คือ จำนวนจริง

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ 3×3

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- นิยามดีเทอร์มิแนนต์ใช้สำหรับเมทริกซ์จัตุรัสเท่านั้น และมีได้เป็นจำนวนจริงเพียงค่าเดียว
- ครูต้องเน้นย้ำนักเรียนหาดีเทอร์มิแนนต์ให้ได้ เนื่องจากต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับดีเทอร์มิแนนต์ในการพิจารณาว่าเมทริกซ์ที่กำหนดให้มีเมทริกซ์ผกผันหรือไม่ นอกจากนี้ ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนใช้ทฤษฎีบท 4 ช่วยหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ ดังแสดงในตัวอย่างที่ 22 เนื่องจากการหาดีเทอร์มิแนนต์ตามบทนิยาม 12 อาจเกิดการคำนวณผิดพลาดได้

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

- สำหรับแบบฝึกหัด 2.2 ข้อ 2 นั้น ครูอาจเปิดโอกาสให้นักเรียนหา $\det\left(A^t\right)$ และ $\det\left(B^t\right)$ โดยใช้ทฤษฎีบท 4 หรือหา A^t และ B^t ก่อน แล้วจึงหาดีเทอร์มิแนนต์ก็ได้ แต่สำหรับการหา $\det\left(A^5\right)$ และ $\det\left(B^6\right)$ นั้น ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนใช้ทฤษฎีบท 4 มากกว่าการหา A^5 และ B^6 ก่อน แล้วจึงหาดีเทอร์มิแนนต์

เมทริกซ์ผกผัน

กิจกรรม : เมทริกซ์ผกผัน

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง เมทริกซ์ผกผัน

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูทบทวนความรู้ของนักเรียนเกี่ยวกับตัวผกผันการคูณของจำนวนจริง
2. ครูจับคู่นักเรียนแบบคละความสามารถ จากนั้นครูเขียนเมทริกซ์ต่อไปนี้บนกระดาน

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

3. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่ร่วมกันหา AB, BA, AC, CA, BC และ CB พร้อมพิจารณาว่าผลคูณใดเท่ากับเมทริกซ์เอกลักษณ์

แนวคำตอบ

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 7\\ -2 & 11\end{bmatrix}$$

$$CA=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 13\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$BC=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 7\\ -5 & -4\end{bmatrix}$$

$$CB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -8 & 5\end{bmatrix}$$

ซึ่งจะเห็นว่า $AB=I$ และ $BA=I$ นั่นคือ $AB=BA=I$

4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบที่ได้ในข้อ 3 โดยครูอาจใช้คำถามต่อไปนี้
   - เมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีขนาด 2×2 คือเมทริกซ์ใด
     แนวคำตอบ
     $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   - ผลคูณของเมทริกซ์ใดเป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีขนาด 2×2
     แนวคำตอบ
     ผลคูณของเมทริกซ์ A และ B หรือ AB และผลคูณของเมทริกซ์ B และ A หรือ BA
   - เนื่องจาก AB และ BA ต่างเท่ากับเมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีขนาด 2×2 ดังนั้นจะสรุปได้ว่าอย่างไร
     แนวคำตอบ
     $$AB = BA = I$$
5. ครูแนะนำบทนิยาม 13 เกี่ยวกับเมทริกซ์ผกผัน แล้วให้นักเรียนเชื่อมโยงผลที่ได้จากการอภิปรายในข้อ 4 กับบทนิยาม 13 ซึ่งนักเรียนควรสังเกตเห็นว่า เนื่องจาก $AB = BA = I$ จึงได้ว่า B เป็นเมทริกซ์ผกผันหรือตัวผกผันการคูณหรืออินเวอร์สการคูณของ A

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 จะนำเสนอเฉพาะเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ที่มีขนาด 2×2 เท่านั้น
- ถ้า $\det(A) = 0$ แล้ว A จะไม่มีเมทริกซ์ผกผัน ดังนั้น การหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ที่กำหนด หากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่กำหนดเท่ากับศูนย์ จะสามารถสรุปได้ว่าเมทริกซ์นั้นไม่มีเมทริกซ์ผกผัน ดังแสดงในตัวอย่างที่ 27 ข้อ 3)
- จากบทนิยาม 13 กำหนดให้เมทริกซ์ผกผันของ A เขียนแทนด้วย A^{-1} จึงสามารถเขียนแทน $AB = BA = I$ ด้วย $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ ได้ เมื่อ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

- นักเรียนบางคนอาจนำสมบัติเกี่ยวกับเลขยกกำลังมาใช้ในการหาอินเวอร์สของผลคูณของเมทริกซ์กับเมทริกซ์ จึงเข้าใจผิดว่า $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ ครูควรเน้นย้ำให้นักเรียนเข้าใจให้ถูกต้องว่า สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A และ B ซึ่งมีเมทริกซ์ผกผัน จะได้ว่า $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ โดยใช้ตัวอย่างที่ 29 ประกอบการอธิบาย

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ได้นำเสนอการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่มี 2 สมการ 2 ตัวแปร และระบบสมการเชิงเส้นที่มี 3 สมการ 3 ตัวแปร เท่านั้น ซึ่งการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นนั้นทำได้หลายวิธี สำหรับในหนังสือเรียนจะนำเสนอวิธีการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ 2 วิธี คือ การใช้เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ และการใช้การดำเนินการตามแถว
- การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ เป็นการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปร โดยเขียนระบบสมการให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ $AX = B$ โดยที่ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส ซึ่งถ้า A มีเมทริกซ์ผกผันแล้วจะได้

$$\begin{aligned} A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ IX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

นั่นคือ $X = A^{-1}B$ เป็นคำตอบของ $AX = B$

- การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ ถ้าเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ไม่มีเมทริกซ์ผกผันแล้ว ไม่ได้หมายความเพียงว่า ระบบสมการไม่มีคำตอบ แต่ระบบสมการนั้นอาจมีคำตอบเป็นจำนวนอนันต์ก็ได้ ดังนั้น จึงไม่สามารถใช้วิธีนี้ในการหาคำตอบของระบบสมการในกรณีนี้ได้ ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนหาคำตอบของระบบสมการนี้ด้วยวิธีอื่น เช่น จากระบบสมการ $x+y=1$ และ $2x+2y=2$ ซึ่งระบบสมการนี้ไม่สามารถหาคำตอบโดยใช้เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ได้ แต่หาคำตอบโดยใช้การดำเนินการตามแถวได้ดังนี้

  ให้ เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$

  ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

  $$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad -2R_1+R_2$$

  เมื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมนี้ให้อยู่ในรูประบบสมการ จะได้ $x+y=1$ และ $0=0$

  จะเห็นว่าสมการ $0=0$ เป็นจริงเสมอ

  จึงหาเฉพาะค่าของ x และ y ที่สอดคล้องกับสมการ $x+y=1$

  จากสมการ $x+y=1$ จะได้ว่า $y=1-x$

  ในที่นี้ให้ $x=t$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

  ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ $(t,1-t)$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

  นั่นคือ ระบบสมการ $x+y=1$ และ $2x+2y=2$ มีคำตอบเป็นจำนวนอนันต์

- การสอนเรื่องการแก้ระบบสมการโดยการดำเนินการตามแถว เป็นวิธีเดียวกันกับการแก้ระบบสมการที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น แต่เป็นการเขียนระบบสมการให้อยู่ในรูปเมทริกซ์แต่งเติม ดังแสดงในตัวอย่างที่ 31
- การสอนเรื่องการใช้เมทริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น ครูควรเน้นให้นักเรียนทำความเข้าใจความรู้พื้นฐานว่า ในการหาคำตอบของระบบสมการนั้น คำตอบของระบบสมการจะไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงสมการในระบบสมการด้วยกระบวนการสลับสองสมการ คูณสมการใดสมการหนึ่งด้วยค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์ คูณสมการหนึ่งด้วยค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์แล้วนำไปบวกกับอีกสมการหนึ่ง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

จากระบบสมการ $x+y=1$ ----- (1)

และ $2x+2y=2$ ----- (2)

ให้ เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$

1) พิจารณาการเปลี่ยนแปลงของสมการในระบบสมการด้วยการสลับสองสมการ

จากเมทริกซ์แต่งเติม $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] R_1 \leftrightarrow R_2$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมนี้ให้อยู่ในรูประบบสมการ จะได้

$2x+2y=2$ ----- (3)

$x+y=1$ ----- (4)

จะเห็นว่า (1) = (4) และ (2) = (4)

นั่นคือ การสลับสองสมการไม่ทำให้ระบบสมการเปลี่ยนแปลงไป

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการจะไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเปลี่ยนแปลงสมการในระบบสมการด้วยการสลับสองสมการ

2) พิจารณาการเปลี่ยนแปลงของสมการในระบบสมการด้วยการคูณสมการใดสมการหนึ่งด้วยค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์

จากเมทริกซ์แต่งเติม $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right] 3R_1$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมนี้ให้อยู่ในรูประบบสมการ จะได้

$3x+3y=3$ ----- (5)

$2x+2y=2$ ----- (6)

นำ $\frac{1}{3}$ ไปคูณ (5) จะได้

$x+y=1$ ----- (7)

จะเห็นว่า (1) = (7) และ (2) = (6)

นั่นคือ การคูณสมการใดสมการหนึ่งด้วยค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์ไม่ทำให้ระบบสมการเปลี่ยนแปลงไป

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการจะไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเปลี่ยนแปลงสมการในระบบสมการด้วยการคูณสมการใดสมการหนึ่งด้วยค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์

3) พิจารณาการเปลี่ยนแปลงของสมการในระบบสมการด้วยการคูณสมการหนึ่งด้วยค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์แล้วนำไปบวกกับอีกสมการหนึ่ง

จากเมทริกซ์แต่งเติม $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -3R_1 + R_2 \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมนี้ให้อยู่ในรูประบบสมการ จะได้

$$x + y = 1 \qquad \text{----- (8)}$$
$$x + y = 1 \qquad \text{----- (9)}$$

นำ 2 ไปคูณ (9) จะได้

$$2x + 2y = 2 \qquad \text{----- (10)}$$

จะเห็นว่า (1) = (8) และ (2) = (10)

นั่นคือ การคูณสมการหนึ่งด้วยค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์แล้วนำไปบวกกับอีกสมการหนึ่งไม่ทำให้ระบบสมการเปลี่ยนแปลงไป

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการจะไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเปลี่ยนแปลงสมการในระบบสมการด้วยการคูณสมการหนึ่งด้วยค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์แล้วนำไปบวกกับอีกสมการหนึ่ง

- การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การดำเนินการตามแถว จะแปลงเมทริกซ์แต่งเติมจาก $\left[A \mid B\right]$ จนได้ผลลัพธ์เป็น $\left[C \mid D\right]$ โดยที่ C มีสมบัติดังนี้
  1) $c_{11} = 1$
  2) จำนวนของศูนย์ที่ติดกัน (นับจากซ้าย) ของแถวล่างจะต้องมากกว่าของแถวบน หรือถ้าจำนวนของศูนย์ที่ติดกัน (นับจากซ้าย) ของแถวล่างเท่ากับของแถวบน แล้วสมาชิกทั้งสองแถวนั้นต้องเป็นศูนย์ทั้งหมด

หมายเหตุ เพื่อความสะดวกในการหาคำตอบของระบบสมการ อาจทำให้ในแต่ละแถว
- มีสมาชิกตัวแรก (จากซ้ายไปขวา) ที่ไม่ใช่ศูนย์เป็น 1
- เปลี่ยนสมาชิกตัวอื่นเป็นศูนย์ (ถ้าทำได้)

ทั้งนี้ ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 นำเสนอการแก้ระบบสมการโดยใช้การดำเนินการตามแถว โดยการพิจารณาทีละหลัก เพื่อให้นักเรียนได้สร้างกระบวนการคิดอย่างเป็นระบบ ซึ่งจะเป็นพื้นฐานสำหรับนำไปต่อยอดในกรณีที่มีเมทริกซ์ขนาดใหญ่ อาจนำกระบวนการนี้ไปใช้ในการเขียนโปรแกรมเพื่อแก้ระบบสมการ

- เมื่อแก้ระบบสมการโดยการดำเนินการตามแถว เริ่มจากการแปลงเมทริกซ์แต่งเติมจาก $\left[A\middle|B\right]$ จนได้ผลลัพธ์เป็น $\left[C\middle|D\right]$ นั้น อาจมีเมทริกซ์ C ได้ 3 แบบ ซึ่งจะส่งผลต่อคำตอบของระบบสมการ ดังนี้
  - ถ้า $C=I$ แล้ว ระบบสมการนั้นมีคำตอบเพียงคำตอบเดียว ดังแสดงในตัวอย่างที่ 32
  - ถ้า C มีแถวที่ i ซึ่งมีสมาชิกเป็น 0 ทุกตัว และ $d_i \neq 0$ แล้ว ระบบสมการนั้นไม่มีคำตอบ ดังแสดงในตัวอย่างที่ 33
  - ถ้า C มีแถวที่ i ซึ่งมีสมาชิกเป็น 0 ทุกตัว และ $d_i = 0$ แล้ว ระบบสมการนั้นมีคำตอบเป็นจำนวนอนันต์ ดังแสดงในตัวอย่างที่ 34
- การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีการดำเนินการตามแถวไม่ได้มีวิธีการที่ตายตัว ซึ่งวิธีที่นำเสนอในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 นั้น เป็นการลดขั้นตอนที่อาจทำให้เกิดความผิดพลาดในการคำนวณ เช่น ในตัวอย่างที่ 32 ขั้นตอนที่ 1 ใช้การสลับแถวที่ 1 กับแถวที่ 3 ของเมทริกซ์แต่งเติมนั้น เพื่อทำให้ a_{11} เป็น 1 แทนการคูณแถวที่ 1 ด้วย $\frac{1}{3}$ ซึ่งจะทำให้ a_{13} อยู่ในรูปเศษส่วน และอาจทำให้เกิดความผิดพลาดจากการคำนวณได้ง่าย นอกจากนี้ยังเป็นการเตรียมการเปลี่ยนให้ a_{31} เป็น 0 ในขั้นตอนที่ 2 ด้วย อย่างไรก็ตาม ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีการดำเนินการตามแถวนั้น ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนเลือกใช้การดำเนินการตามแถวตามที่นักเรียนต้องการซึ่งอาจมีขั้นตอนแตกต่างจากที่ครูคิดไว้
- หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ได้นำเสนอโจทย์เกี่ยวกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีการดำเนินการตามแถวที่มีการคำนวณไม่ซับซ้อน เพราะมีจุดเน้นอยู่ที่การสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับขั้นตอนและกระบวนการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีการดำเนินการตามแถว หากครูต้องการยกตัวอย่างเพิ่มเติมหรือออกข้อสอบนั้น ไม่ควรใช้โจทย์ที่มีการคำนวณซับซ้อน

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

- ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในแบบฝึกหัด 2.4 ข้อ 2. นั้น ถึงแม้ว่าไม่ได้กำหนดวิธีการที่ใช้สำหรับหาคำตอบ แต่นักเรียนควรเลือกใช้วิธีการดำเนินการตามแถว เนื่องจากสามารถหาคำตอบของระบบสมการได้เสมอ ในขณะที่วิธีการใช้เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์จะไม่สามารถหาคำตอบของบางระบบสมการได้ เช่น ระบบสมการ

$$\begin{aligned} x-3y &= -5 \\ -2x+6y &= 10 \end{aligned}$$

ให้ $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$

เขียนระบบสมการในรูปสมการเมทริกซ์ $AX=B$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\det(A)=0$ ดังนั้น A ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

แสดงว่าไม่สามารถหาคำตอบของระบบสมการนี้ โดยใช้เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ได้

อย่างไรก็ตามสามารถใช้วิธีการดำเนินการตามแถวเพื่อหาคำตอบของระบบสมการได้ เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการที่กำหนด คือ

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -5 \\ -2 & 6 & 10 \end{array}\right]$$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -5 \\ -2 & 6 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \; 2R_1+R_2$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมนี้ให้อยู่ในรูปสมการ จะได้

$$\begin{aligned} x-3y &= -5 \quad \text{----- (1)} \\ 0 &= 0 \quad \text{----- (2)} \end{aligned}$$

เนื่องจากสมการ (2) เป็นจริงเสมอ จึงหาเฉพาะค่าของ x และ y ที่สอดคล้องกับสมการ (1) ก็เพียงพอ ซึ่งจะได้ $x = 3y - 5$

จะเห็นว่า x ขึ้นอยู่กับ y นั่นคือ สามารถเลือก y ให้เป็นจำนวนจริงใดก็ได้

ในที่นี้ให้ $y = t$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ $(3t - 5, t)$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

2.3 แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน

กิจกรรม : ถอดรหัสสายลับ

องค์กรลับ IQA ส่งสายลับแฝงตัวเข้าไปเป็นพนักงานในบริษัท สินสมุทรการช่าง จำกัด เพื่อสืบหาสาเหตุการเสียชีวิตจากอุบัติเหตุของประธานบริษัท จนวันหนึ่งสายลับสืบพบความจริงว่าใครเป็นผู้อยู่เบื้องหลังการจัดฉากอุบัติเหตุครั้งนี้ เขาจึงต้องการแจ้งกลับไปยัง IQA โดยส่งข้อความที่ระบุตัวคนร้ายในรูปของข้อความที่เข้ารหัสปะปนไปกับเอกสารอื่น ๆ เพื่อไม่ให้มีพิรุธ ซึ่งอาจทำให้คนร้ายไหวตัวทันและหลบหนีไปก่อน โดยเอกสารที่สายลับส่งให้ IQA มีดังนี้

ใบส่งของ บริษัท สินสมุทรการช่าง จำกัด
เลขที่ 78–68–83

เดือน / รายการสินค้า	มกราคม 2561	กุมภาพันธ์ 2561	มีนาคม 2561	เมษายน 2561
เหล็กข้ออ้อย (เส้น)	261	210	231	208
เหล็กเส้นกลม (เส้น)	694	564	613	554

ใบส่งของ บริษัท สินสมุทรการช่าง จำกัด
เลขที่ 70–66–73

เดือน / รายการสินค้า	พฤษภาคม 2561	มิถุนายน 2561	กรกฎาคม 2561	สิงหาคม 2561
เหล็กข้ออ้อย (เส้น)	204	260	264	215
เหล็กเส้นกลม (เส้น)	547	694	702	577

ใบส่งของ บริษัท สินสมุทรการช่าง จำกัด เลขที่ 73–81–65				
เดือน รายการสินค้า	กันยายน 2561	ตุลาคม 2561	พฤศจิกายน 2561	ธันวาคม 2561
เหล็กข้ออ้อย (เส้น)	246	219	223	170
เหล็กเส้นกลม (เส้น)	651	584	599	441

ถ้านักเรียนเป็นเจ้าหน้าที่ IQA ที่ได้รับเอกสารจากสายลับ นักเรียนจะสรุปได้หรือไม่ว่าใครเป็นผู้อยู่เบื้องหลังการเสียชีวิตของประธานบริษัท สินสมุทรการช่าง จำกัด

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. ศึกษาขั้นตอนการเข้ารหัสข้อความของ IQA ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนการเข้ารหัสข้อความของ IQA

เพื่อป้องกันข้อมูลรั่วไหล สายลับที่ต้องการติดต่อกับ IQA จะต้องแปลงข้อความที่ต้องการสื่อสารให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ผลลัพธ์ตามขั้นตอนต่อไปนี้ แล้วจึงส่งเมทริกซ์ผลลัพธ์ที่ได้ในขั้นตอนสุดท้ายให้ IQA

1) เขียนข้อความที่ต้องการสื่อสารให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ที่มี 2 แถว โดยจำนวนหลักขึ้นอยู่กับความยาวของข้อความ เช่น ข้อความ I LOVE MATH สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ขนาด 2×6 ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \text{I} & & \text{L} & \text{O} & \text{V} & \text{E} \\ \text{M} & \text{A} & \text{T} & \text{H} & & \end{bmatrix}$$

2) แทนตัวอักษรและสัญลักษณ์ในเมทริกซ์ด้วย Unicode และจะเรียกเมทริกซ์ที่ได้ว่าเมทริกซ์ข้อความ

ตารางแสดง Unicode ที่ใช้แทนตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่และช่องว่าง

ตัวอักษร	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
Unicode	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78

ตัวอักษร	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	ช่องว่าง
Unicode	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	32

เช่น เมื่อแทนตัวอักษรและช่องว่างในเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} I & & L & O & V & E \\ & M & A & T & H & \end{bmatrix}$

ด้วย Unicode จะได้เมทริกซ์ข้อความเป็น $\begin{bmatrix} 73 & 32 & 76 & 79 & 86 & 69 \\ 32 & 77 & 65 & 84 & 72 & 32 \end{bmatrix}$

3) ก่อนปฏิบัติภารกิจ สายลับจะได้รับเมทริกซ์เข้ารหัสขนาด 2×2 จาก IQA เมทริกซ์ผลลัพธ์ คือ ผลคูณของเมทริกซ์เข้ารหัสกับเมทริกซ์ข้อความ เช่น ถ้าเมทริกซ์เข้ารหัสที่สายลับได้รับจาก IQA คือ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ จะได้ เมทริกซ์ผลลัพธ์ คือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 73 & 32 & 76 & 79 & 86 & 69 \\ 32 & 77 & 65 & 84 & 72 & 32 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 137 & 186 & 206 & 247 & 230 & 133 \\ 379 & 481 & 553 & 657 & 618 & 367 \end{bmatrix}$$

2. จงหาว่าเมทริกซ์ข้อความ $\begin{bmatrix} 73 & 32 & 76 & 79 & 86 & 69 \\ 32 & 77 & 65 & 84 & 72 & 32 \end{bmatrix}$ ได้จากข้อความใด

3. จากขั้นตอนการเข้ารหัสข้อความของ IQA จงเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเมทริกซ์ข้อความ (C) เมทริกซ์เข้ารหัส (E) และเมทริกซ์ผลลัพธ์ (X) และจงหาว่าเมื่อเจ้าหน้าที่ IQA ได้เมทริกซ์ผลลัพธ์ (X) จากสายลับ เขาจะสามารถหาเมทริกซ์ข้อความ (C) ได้อย่างไร

4. ถ้าเจ้าหน้าที่ IQA ได้รับเมทริกซ์ผลลัพธ์ คือ $\begin{bmatrix} 224 & 229 \\ 596 & 607 \end{bmatrix}$ จงหาข้อความที่สายลับส่งมา เมื่อกำหนดให้ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เข้ารหัสที่สายลับได้รับจาก IQA

5. พิจารณาเอกสารที่สายลับส่งให้ IQA นักเรียนคิดว่าเอกสารใดน่าจะมีเมทริกซ์ผลลัพธ์ที่สายลับตั้งใจส่งให้ เพราะเหตุใด

6. จากเอกสารที่สายลับส่งให้ IQA จงหาว่าใครเป็นผู้ที่อยู่เบื้องหลังการเสียชีวิตของประธานบริษัท สินสมุทรการช่างจำกัด เมื่อกำหนดให้ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เข้ารหัสที่สายลับได้รับจาก IQA

เฉลยกิจกรรม : ถอดรหัสสายลับ

1. –

2. เมื่อแทนรหัส Unicode ในเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 75 & 69 & 69 & 80 & 32 & 83 \\ 77 & 73 & 76 & 73 & 78 & 71 \end{bmatrix}$ ด้วยตัวอักษรและช่องว่าง จะได้เป็น $\begin{bmatrix} \text{K} & \text{E} & \text{E} & \text{P} & & \text{S} \\ \text{M} & \text{I} & \text{L} & \text{I} & \text{N} & \text{G} \end{bmatrix}$ นั่นคือ เมทริกซ์นี้ได้จากข้อความ KEEP SMILING

3. สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเมทริกซ์ข้อความ (C) เมทริกซ์เข้ารหัส (E) และเมทริกซ์ผลลัพธ์ (X) คือ $X = EC$ นั่นคือ $C = E^{-1}X$
ดังนั้น เมื่อเจ้าหน้าที่ IQA ได้เมทริกซ์ผลลัพธ์ (X) จากสายลับ เขาจะสามารถหาเมทริกซ์ข้อความ (C) ได้จากผลคูณของเมทริกซ์ผกผันของ E กับ X

4. ให้ X แทนเมทริกซ์ผลลัพธ์ และ E แทนเมทริกซ์เข้ารหัส
จะได้ว่าเมทริกซ์ข้อความ (C) หาได้จาก $E^{-1}X$
เนื่องจาก $E^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ จะได้ $C = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 224 & 229 \\ 596 & 607 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 & 69 \\ 76 & 80 \end{bmatrix}$
เมื่อแปลง Unicode ของเมทริกซ์ข้อความนี้กลับไปเป็นตัวอักษร จะได้ เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} \text{H} & \text{E} \\ \text{L} & \text{P} \end{bmatrix}$
ดังนั้น ข้อความที่สายลับส่งมา คือ HELP

5. พิจารณาเลขที่ของรายการสั่งซื้อสินค้าทั้ง 3 ใบ จะสังเกตได้ว่าเป็น Unicode ซึ่งแปลงกลับไปเป็นตัวอักษรได้ดังนี้

$78 - 68 - 83$ แปลงได้เป็น $\text{N} - \text{D} - \text{S}$

$70 - 66 - 73$ แปลงได้เป็น $\text{F} - \text{B} - \text{I}$

$73 - 81 - 65$ แปลงได้เป็น $\text{I} - \text{Q} - \text{A}$

ดังนั้น รายการสั่งซื้อสินค้าใบสุดท้ายน่าจะมีเมทริกซ์ผลลัพธ์ที่สายลับตั้งใจส่งให้

6. กรณีที่นักเรียนไม่ทราบคำตอบข้อ 5 นักเรียนสามารถใช้เอกสารทั้งสามที่สายลับส่งมาหาเมทริกซ์ผลลัพธ์ดังนี้

จากรายการสั่งซื้อสินค้าใบแรก เมื่อนำตัวเลขในตารางมาเขียนในรูปเมทริกซ์ จะได้ เมทริกซ์ผลลัพธ์คือ $\begin{bmatrix} 261 & 210 & 231 & 208 \\ 694 & 564 & 613 & 554 \end{bmatrix}$

เนื่องจากเมทริกซ์เข้ารหัสคือ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

จะได้ เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์เข้ารหัสคือ $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น เมทริกซ์ข้อความคือ $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 261 & 210 & 231 & 208 \\ 694 & 564 & 613 & 554 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 83 & 78 & 71 & 68 \\ 89 & 66 & 80 & 70 \end{bmatrix}$

เมื่อแปลง Unicode ของเมทริกซ์ข้อความนี้กลับไปเป็นตัวอักษร จะได้ $\begin{bmatrix} S & N & G & D \\ Y & B & P & F \end{bmatrix}$

ดังนั้น ข้อความที่สายลับส่งมาคือ SNGDYBPF ซึ่งไม่มีความหมาย

จากรายการสั่งซื้อสินค้าใบที่สอง เมื่อนำตัวเลขในตารางมาเขียนในรูปเมทริกซ์

จะได้ เมทริกซ์ผลลัพธ์ คือ $\begin{bmatrix} 204 & 260 & 264 & 215 \\ 547 & 694 & 702 & 577 \end{bmatrix}$

ดังนั้น เมทริกซ์ข้อความคือ $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 204 & 260 & 264 & 215 \\ 547 & 694 & 702 & 577 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 74 & 88 & 84 & 79 \\ 65 & 86 & 90 & 68 \end{bmatrix}$

เมื่อแปลง Unicode ของเมทริกซ์ข้อความนี้กลับไปเป็นตัวอักษร จะได้ $\begin{bmatrix} J & X & T & O \\ A & V & Z & D \end{bmatrix}$

ดังนั้น ข้อความที่สายลับส่งมาคือ JXTOAVZD ซึ่งไม่มีความหมาย

จากรายการสั่งซื้อสินค้าใบที่สาม เมื่อนำตัวเลขในตารางมาเขียนในรูปเมทริกซ์

จะได้ เมทริกซ์ผลลัพธ์ คือ $\begin{bmatrix} 246 & 219 & 223 & 170 \\ 651 & 584 & 599 & 441 \end{bmatrix}$

ดังนั้น เมทริกซ์ข้อความ คือ $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 246 & 219 & 223 & 170 \\ 651 & 584 & 599 & 441 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 72 & 73 & 83 & 32 \\ 87 & 73 & 70 & 69 \end{bmatrix}$

เมื่อแปลง Unicode ของเมทริกซ์ข้อความนี้กลับไปเป็นตัวอักษร จะได้ $\begin{bmatrix} H & I & S & \\ W & I & F & E \end{bmatrix}$

ดังนั้น ข้อความที่สายลับส่งมาคือ HIS WIFE

นั่นคือ ผู้ที่อยู่เบื้องหลังการเสียชีวิตของประธานบริษัท สินสมุทรการช่าง จำกัด คือ ภรรยาของเขา

แนวทางการจัดกิจกรรม : ถอดรหัสสายลับ

เวลาในการจัดกิจกรรม 30 – 50 นาที

กิจกรรมนี้เสนอไว้ให้นักเรียนรู้จักการเข้ารหัสอย่างง่าย โดยใช้ความรู้ เรื่อง เมทริกซ์ โดยมีสื่อ/แหล่งการเรียนรู้ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

ใบกิจกรรม “ถอดรหัสสายลับ”

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูนำเข้าสู่กิจกรรมโดยเล่าเรื่องราวสั้น ๆ เกี่ยวกับวิทยาการเข้ารหัสลับ โดยครูอาจใช้ข้อมูลจาก “เสริมสมอง : วิทยาการเข้ารหัสลับ”

2. ครูแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 – 4 คน แบบคละความสามารถ จากนั้นแจกใบกิจกรรม “ถอดรหัสสายลับ” ให้นักเรียน แล้วให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาสถานการณ์ปัญหาและขั้นตอนการเข้ารหัสข้อความของ IQA ในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 1 โดยครูควรให้นักเรียนสังเกตประเด็นต่อไปนี้
   - เมทริกซ์ข้อความเป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกแต่ละตัวเป็น Unicode ที่ใช้แทนตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่และช่องว่าง
   - เมทริกซ์ผลลัพธ์ คือ ผลคูณของเมทริกซ์เข้ารหัสกับเมทริกซ์ข้อความ ทั้งนี้ขนาดของเมทริกซ์เข้ารหัสและเมทริกซ์ข้อความมีความสำคัญต่อการหาเมทริกซ์ผลลัพธ์ นั่นคือ จำนวนหลักของเมทริกซ์เข้ารหัสต้องเท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ข้อความ จึงจะสามารถหาเมทริกซ์ผลลัพธ์ได้ ในที่นี้จึงกำหนดให้เมทริกซ์ข้อความเป็นเมทริกซ์ที่มี 2 แถว เนื่องจากเมทริกซ์เข้ารหัสมีขนาด 2×2

3. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 2 – 4 เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับการเข้ารหัสข้อความของ IQA จากนั้น ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบที่ได้

4. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถามในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 5 ซึ่งเป็นการฝึกการสังเกต นักเรียนอาจยังไม่ทราบคำตอบที่ถูกต้อง โดยครูอาจให้นักเรียนข้ามข้อนี้ไปก่อน

   อย่างไรก็ตาม นักเรียนบางคนอาจสังเกตเห็นว่าตัวเลขที่ปรากฏในใบส่งของที่กำหนดให้นั้น มีตัวเลขชุดที่เป็นเลขที่ใบส่งของและตัวเลขชุดที่อยู่ในตาราง โดยตัวเลขชุดที่เป็นเลขที่ใบส่งของนั้นตรงกับ Unicode ที่ใช้แทนตัวอักษรภาษาอังกฤษดังนี้

ใบส่งของเลขที่	ตัวอักษรภาษาอังกฤษ
78 – 68 – 83	N - D - S
70 – 66 – 73	F - B - I
73 – 81 – 65	I - Q - A

   ซึ่งจะทำให้นักเรียนตอบคำถามข้อนี้ได้

5. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถามในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 6 ซึ่งหากนักเรียนยังไม่ได้ตอบคำถามในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 5 ครูอาจชี้แนะให้นักเรียนเขียนตัวเลขในตารางของใบส่งของแต่ละใบ ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ที่มี 2 แถว ซึ่งเมทริกซ์นี้คือเมทริกซ์ผลลัพธ์ จากนั้นให้นักเรียนแต่ละกลุ่มถอดรหัสเพื่อหาเมทริกซ์ข้อความของใบส่งของแต่ละใบ ซึ่งนักเรียนจะเห็นว่าข้อความที่ถอดรหัสได้จากใบส่งของใบที่ 1 และใบที่ 3 ไม่มีความหมาย ในขณะที่ข้อความที่ถอดรหัสได้จากใบส่งของใบที่ 2 เป็นข้อความที่แปลความได้และเป็นคำตอบของสถานการณ์ที่กำหนด

6. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบที่ได้ของคำถามในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 5 และ 6 นอกจากนี้ครูควรเชื่อมโยงกิจกรรมนี้กับการคูณเมทริกซ์ ดังนี้
   - เมทริกซ์เข้ารหัสที่กำหนดให้ในคำถามในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 6 เป็นเพียงเมทริกซ์หนึ่งเท่านั้น นักเรียนอาจกำหนดเมทริกซ์เข้ารหัสเป็นเมทริกซ์อื่นได้ แต่เมทริกซ์นั้นต้องเป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีเมทริกซ์ผกผัน และจำนวนหลักของเมทริกซ์เข้ารหัสจะต้องเท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ข้อความ ซึ่งจะทำให้สามารถหาผลคูณของอินเวอร์สของเมทริกซ์เข้ารหัสกับเมทริกซ์ผลลัพธ์ได้

- เมทริกซ์ผลลัพธ์จะมีขนาดเท่ากับขนาดของเมทริกซ์ข้อความ เนื่องจากเมทริกซ์ผลลัพธ์เป็นผลคูณของเมทริกซ์เข้ารหัสที่มีขนาด 2×2 กับเมทริกซ์ข้อความที่เป็นเมทริกซ์ที่มี 2 แถว
- จากสถานการณ์ที่กำหนดให้ในกิจกรรมนี้ เมทริกซ์ที่สายลับจะต้องเก็บเป็นความลับ คือ เมทริกซ์เข้ารหัส และกระบวนการเข้ารหัสก็ต้องเก็บเป็นความลับด้วย เนื่องจากเมื่อทราบเมทริกซ์เข้ารหัสเมทริกซ์ผลลัพธ์ และกระบวนการเข้ารหัสแล้ว จะสามารถหาได้ว่าข้อความที่ต้องการส่งคือข้อความใด

หมายเหตุ

1. เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับการเข้ารหัสและถอดรหัสในกิจกรรมนี้แล้ว ครูอาจให้นักเรียนพิจารณาเพิ่มเติมว่า หาก IQA เปลี่ยนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเมทริกซ์ข้อความ เมทริกซ์เข้ารหัส และเมทริกซ์ผลลัพธ์ จาก $X=EC$ เป็น $X=CE$ แล้ว
   - เมทริกซ์เข้ารหัสควรเป็นอย่างไร (นักเรียนควรตอบได้ว่าเป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีเมทริกซ์ผกผัน)
   - ขนาดของเมทริกซ์เข้ารหัสและเมทริกซ์ข้อความควรเป็นอย่างไร (นักเรียนควรตอบได้ว่าจำนวนหลักของเมทริกซ์ข้อความจะต้องเท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์เข้ารหัส)
   - เมื่อเจ้าหน้าที่ IQA ได้เมทริกซ์ผลลัพธ์จากสายลับ เขาจะสามารถหาเมทริกซ์ข้อความได้อย่างไร (นักเรียนควรตอบได้ว่า จะสามารถหาเมทริกซ์ข้อความได้จาก $C=XE^{-1}$)
2. กิจกรรมนี้เป็นตัวอย่างอย่างง่ายของการเข้ารหัสและถอดรหัส เพื่อให้นักเรียนเข้าใจแนวคิดเกี่ยวกับการเข้ารหัสและถอดรหัส แต่ในชีวิตจริงกระบวนการเข้ารหัสและถอดรหัสต้องมีความซับซ้อนมากกว่านี้เพื่อความปลอดภัย

2.4 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน

การวัดผลระหว่างเรียนมีจุดมุ่งหมายเพื่อปรับปรุงการเรียนรู้และพัฒนาการเรียนการสอน และตรวจสอบนักเรียนแต่ละคนว่ามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่ครูสอนมากน้อยเพียงใด การให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเป็นแนวทางหนึ่งที่ครูอาจใช้เพื่อประเมินผลด้านความรู้ระหว่างเรียนของนักเรียน ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดที่ครอบคลุมเนื้อหาที่สำคัญของแต่ละบทไว้ สำหรับในบทที่ 2 เมทริกซ์ ครูอาจใช้แบบฝึกหัดเพื่อวัดผลประเมินผลความรู้ในแต่ละเนื้อหาได้ดังนี้

เนื้อหา	แบบฝึกหัด	
เมทริกซ์และการเท่ากันของเมทริกซ์	2.1	ข้อ 1 – 3
พีชคณิตของเมทริกซ์	2.1	ข้อ 4 – 17
ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ 3×3	2.2	ข้อ 1 – 2
เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ขนาด 2×2	2.3	ข้อ 1 – 2
การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์	2.4	ข้อ 1 – 2
การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์	2.4	ข้อ 3 – 8

2.5 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 มีจุดมุ่งหมายว่าเมื่อนักเรียนได้เรียนจบบทที่ 2 เมทริกซ์ แล้วนักเรียนสามารถ

1. หาผลบวกของเมทริกซ์กับเมทริกซ์
2. หาผลคูณของเมทริกซ์กับจำนวนจริง
3. หาผลคูณของเมทริกซ์กับเมทริกซ์
4. หาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน
5. หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ 3×3
6. หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ขนาด 2×2
7. แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันและการดำเนินการตามแถว
8. ใช้ความรู้เกี่ยวกับเมทริกซ์ในการแก้ปัญหา

ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดท้ายบทที่ประกอบด้วยโจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียน โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมาย นอกจากนี้มีโจทย์ฝึกทักษะที่มีความน่าสนใจและโจทย์ท้าทาย ครูอาจเลือกใช้แบบฝึกหัดท้ายบทวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบทเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนมีความสามารถตามจุดมุ่งหมายเมื่อเรียนจบบทเรียนหรือไม่

ทั้งนี้ แบบฝึกหัดท้ายบทแต่ละข้อในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 บทที่ 2 เมทริกซ์ สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียน ดังนี้

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
1. หาผลบวกของเมทริกซ์กับเมทริกซ์	1*	
2. หาผลคูณของเมทริกซ์กับจำนวนจริง	2*	
3. หาผลคูณของเมทริกซ์กับเมทริกซ์	3*	1) – 10)
4. หาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน	4*	
	5	1) – 2)*
	6	1) – 4)
	11*	1) – 2)

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
5. หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ 3×3	7	1) – 6)
	8	1) – 3)
6. หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ขนาด 2×2	5	2)*
	9	
	10	1) – 4)
	12*	1) – 2)
7. แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันและการดำเนินการตามแถว	12*	1) – 2)
	13	1) – 8)
8. ใช้ความรู้เกี่ยวกับเมทริกซ์ในการแก้ปัญหา	14	
	15	
	16	
	17	1) – 2)

หมายเหตุ

แบบฝึกหัดท้ายบทข้อ 1, 2, 3, 4, 5.2), 11 และ 12 สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียนมากกว่า 1 จุดมุ่งหมาย

2.6 ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู

- เมทริกซ์ที่นำเสนอในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 นี้ เป็นเมทริกซ์ที่สมาชิกของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง แต่โดยทั่วไปสมาชิกของเมทริกซ์ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนจริงเสมอไป สมาชิกของเมทริกซ์อาจเป็นจำนวนเชิงซ้อนก็ได้
- เมทริกซ์ที่มีเพียงแถวเดียว เรียกว่า **เมทริกซ์แถว** (row matrix) และเมทริกซ์ที่มีเพียงหลักเดียว เรียกว่า **เมทริกซ์หลัก** (column matrix)
- สมบัติเกี่ยวกับการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง และการคูณเมทริกซ์กับเมทริกซ์ จะคล้ายกับสมบัติการบวกและการคูณของจำนวนจริง ดังนี้

  ให้ S เป็นเซตของเมทริกซ์ที่มีขนาด $n\times n$

  A, B และ C เป็นเมทริกซ์ใด ๆ โดยที่ $A\in S, B\in S$ และ $C\in S$

  และ c และ d เป็นจำนวนจริงใด ๆ

  จะมีสมบัติเกี่ยวกับการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง และการคูณเมทริกซ์กับเมทริกซ์ เป็นดังนี้

  1) สมบัติปิด

     1.1) สมบัติปิดของการบวก

     $A+B\in S$ สำหรับทุก $A, B\in S$

     1.2) สมบัติปิดของการคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง

     $cA\in S$ สำหรับทุกจำนวนจริง c และ $A\in S$

     1.3) สมบัติปิดของการคูณเมทริกซ์กับเมทริกซ์

     $AB\in S$ สำหรับทุก $A, B\in S$

  2) สมบัติการสลับที่ของการบวก

     2.1) สมบัติการสลับที่ของการบวก

     $A+B=B+A$ สำหรับทุก $A, B\in S$

     2.2) สมบัติการสลับที่ของการคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง

     $cA=Ac$ สำหรับทุกจำนวนจริง c และ $A\in S$

  3) สมบัติการเปลี่ยนหมู่

     3.1) สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวก

     $A+(B+C)=(A+B)+C$ สำหรับทุก $A, B, C\in S$

3.2) สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง

$c(dA)=(cd)A$ สำหรับทุกจำนวนจริง c, d และ $A \in S$

3.3) สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการคูณเมทริกซ์กับเมทริกซ์

$(AB)C=A(BC)$ สำหรับทุก $A, B, C \in S$

4) สมบัติการมีเอกลักษณ์

4.1) สมบัติการมีเอกลักษณ์ของการบวก

มี $\underline{0} \in S$ ซึ่งทำให้ $\underline{0}+A=A=A+\underline{0}$ สำหรับทุก $A \in S$

จะเรียก $\underline{0}$ ว่าเอกลักษณ์การบวกของเมทริกซ์ขนาด $n \times n$

4.2) สมบัติการมีเอกลักษณ์ของการคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง

มี $1 \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $1 \cdot A=A=A \cdot 1$ สำหรับทุก $A \in S$

4.3) สมบัติการมีเอกลักษณ์ของการคูณเมทริกซ์กับเมทริกซ์

มี $I \in S$ ซึ่งทำให้ $IA=A=AI$ สำหรับทุก $A \in S$

จะเรียก I ว่าเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$

5) สมบัติการมีตัวผกผัน

5.1) สมบัติการมีตัวผกผันของการบวก

สำหรับทุก $A \in S$ จะมี $-A \in S$ ซึ่งทำให้ $A+(-A)=\underline{0}$

จะเรียก $-A$ ว่าตัวผกผันการบวกหรืออินเวอร์สการบวกของ A

5.2) สมบัติการมีตัวผกผันของการคูณเมทริกซ์กับเมทริกซ์

สำหรับทุก $A \in S$ ซึ่ง $\det A \neq 0$ จะมี $A^{-1} \in S$ ซึ่งทำให้ $AA^{-1}=I=A^{-1}A$

จะเรียก A^{-1} ว่าเมทริกซ์ผกผัน หรือตัวผกผันการคูณ หรืออินเวอร์สการคูณของ A

6) สมบัติการแจกแจง

$$\begin{aligned} c(A+B) &= cA+cB \\ (c+d)A &= cA+dA \\ A(B+C) &= AB+AC \\ (B+C)A &= BA+CA \end{aligned}$$

สำหรับทุกจำนวนจริง c, d และ $A, B, C \in S$

- ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ จะกล่าวว่า A เป็น**เมทริกซ์สมมาตร** (symmetry matrix) ก็ต่อเมื่อ $A = A^t$ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ จะได้ว่า } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $A = A^t$

ดังนั้น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร

- ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ จะกล่าวว่า A เป็น**เมทริกซ์สมมาตรเสมือน** (skew-symmetry matrix) ก็ต่อเมื่อ $A = -A^t$ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 3 \\ 7 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \text{ จะได้ว่า } A^t = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -3 \\ -7 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

และ $-A^t = (-1)\begin{bmatrix} 0 & 7 & -3 \\ -7 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 3 \\ 7 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $A = -A^t$

ดังนั้น $A = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 3 \\ 7 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรเสมือน

- ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ จะกล่าวว่า A เป็น**เมทริกซ์เอกฐาน** (singular matrix) ก็ต่อเมื่อ $\det(A) = 0$ และกล่าวว่า A เป็น**เมทริกซ์ไม่เอกฐาน** (nonsingular matrix) ก็ต่อเมื่อ $\det(A) \neq 0$ เช่น

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\det(A) = 1(2) - 1(2) = 0$ ดังนั้น A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\det(B) = 1(2) - 3(2) = -4$ นั่นคือ $\det(B) \neq 0$ ดังนั้น B เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

- เมทริกซ์จัตุรัส A ใด ๆ มีเมทริกซ์ผกผัน ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

  พิสูจน์ สมมติให้ A มีเมทริกซ์ผกผัน

  จะได้ $$\begin{aligned} AA^{-1} &= I \\ \det\left(AA^{-1}\right) &= \det\left(I\right) \\ \det\left(A\right)\det\left(A^{-1}\right) &= 1 \end{aligned}$$

  นั่นคือ $\det\left(A\right)\neq 0$ และ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

- ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เมื่อ $n\geq 2$ **ไมเนอร์** (minor) ของ a_{ij} คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ A ออก เขียนแทนไมเนอร์ของ a_{ij} ด้วย $M_{ij}\left(A\right)$ เช่น

  $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ จะได้ $M_{11}\left(A\right)=-1$

  $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ $M_{23}\left(A\right)=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0$

- ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เมื่อ $n\geq 2$ **ตัวประกอบร่วมเกี่ยว** (cofactor) ของ a_{ij} คือ ผลคูณของ $\left(-1\right)^{i+j}$ และ $M_{ij}\left(A\right)$ เขียนแทนตัวประกอบร่วมเกี่ยวของ a_{ij} ด้วย $C_{ij}\left(A\right)$ เช่น

  $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ จะได้ $C_{11}\left(A\right)=\left(-1\right)^{1+1}\left(-1\right)=-1$

  $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ $C_{23}\left(A\right)=\left(-1\right)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\left(-1\right)\left(0\right)=0$

- นอกจากสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์ตามทฤษฎีบท 4 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 แล้ว ยังมีสมบัติอื่น ๆ ของดีเทอร์มิแนนต์ซึ่งอาจจะเป็นประโยชน์ในการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เมื่อ $n\geq 2$

  1) $\det\left(A\right)=a_{i1}C_{i1}\left(A\right)+a_{i2}C_{i2}\left(A\right)+\cdots+a_{in}C_{in}\left(A\right)$ ทุก $i\in\left\{1, 2, 3, \ldots, n\right\}$
  ถ้าหา $\det\left(A\right)$ โดยสมการนี้ จะกล่าวว่า หา $\det\left(A\right)$ โดยกระจายตามแถวที่ i

  2) $\det\left(A\right)=a_{1j}C_{1j}\left(A\right)+a_{2j}C_{2j}\left(A\right)+\cdots+a_{nj}C_{nj}\left(A\right)$ ทุก $j\in\left\{1, 2, 3, \ldots, n\right\}$
  ถ้าหา $\det\left(A\right)$ โดยสมการนี้ จะกล่าวว่า หา $\det\left(A\right)$ โดยกระจายตามหลักที่ j

3) ถ้า A มีสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งเป็น 0 ทุกตัว แล้ว $\det(A)=0$

4) ถ้า A มีแถว 2 แถวเหมือนกัน หรือหลัก 2 หลักเหมือนกันแล้ว $\det(A)=0$

5) $\det(cA)=c^n\det(A)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

6) ถ้า B ได้จาก A โดยเปลี่ยนเฉพาะสมาชิกในแถวที่ j ของ A โดยใช้ค่าคงตัว c คูณกับสมาชิกทุกตัวในแถวที่ i ของ A เมื่อ $i\neq j$ แล้วนำไปบวกกับสมาชิกของแต่ละตัวในแถวที่ j ของ A นั่นคือ $b_{jk}=ca_{ik}+a_{jk}$ สำหรับทุก k ที่เป็นสมาชิกของ $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ แล้ว $\det(B)=\det(A)$ สมบัติข้อนี้ยังคงเป็นจริงเมื่อเปลี่ยนจากแถวเป็นหลัก

- หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 กล่าวถึง การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ 3×3 เท่านั้น สำหรับการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 3 นั้น สามารถทำได้โดยการใช้สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์ เช่น

เมื่อ $A=\begin{bmatrix}1&-1&5&2\\2&0&1&2\\-1&-3&8&0\\1&1&2&-1\end{bmatrix}$

จะได้ $\det(A)=\begin{vmatrix}1&-1&5&2\\2&0&1&2\\-1&-3&8&0\\1&1&2&-1\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}1&-1&5&2\\0&2&-9&-2\\-1&-3&8&0\\1&1&2&-1\end{vmatrix}$ (คูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1 ด้วย -2 แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2)

$=\begin{vmatrix}1&-1&5&2\\0&2&-9&-2\\0&-4&13&2\\1&1&2&-1\end{vmatrix}$ (นำสมาชิกในแถวที่ 1 ไปบวกกับสมาชิกในแถวที่ 3)

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -9 & -2 \\ 0 & -4 & 13 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$ (คูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1 ด้วย -1 แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 4)

$$= \begin{vmatrix} 2 & -9 & -2 \\ -4 & 13 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$ (กระจายตามหลักที่ 1)

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -9 & -2 \\ -2 & 13 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$ (จากสมบัติที่ว่า ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากการคูณสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่งของ A ด้วยค่าคงตัว c แล้ว $\det(B) = c\det(A)$)

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -9 & -2 \\ 0 & -5 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$ (คูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1 ด้วย 2 แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2)

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -9 & -2 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$ (คูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1 ด้วย -1 แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 3)

$$= 2\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$$ (กระจายตามหลักที่ 1)

$$= 2(5+12)$$

$$= 34$$

- ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ เมื่อ $n \geq 2$ **เมทริกซ์ผูกพัน** (adjoint matrix) ของ A คือ เมทริกซ์ $\left[C_{ij}(A)\right]^t$ เขียนแทนเมทริกซ์ผูกพันของ A ด้วย $\text{adj}(A)$ เช่น

เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

จะได้ $$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{12}(A) & C_{13}(A) \\ C_{21}(A) & C_{22}(A) & C_{23}(A) \\ C_{31}(A) & C_{32}(A) & C_{33}(A) \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -28 & 17 \\ -5 & 10 & -5 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ -28 & 10 & -1 \\ 17 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

- หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 กล่าวถึง การหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ขนาด 2×2 โดยใช้ทฤษฎีบท 6 เท่านั้น สำหรับการหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 2 นั้น สามารถทำได้โดยการใช้ cofactor ดังนี้

  ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ เมื่อ $n\geq 2$ จะได้ว่า A มีเมทริกซ์ผกผัน ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ในกรณี $\det(A)\neq 0$ ได้ว่า $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)$ เช่น

  เมื่อ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ เนื่องจาก $\det(A)=-70\neq 0$ ดังนั้น A มีเมทริกซ์ผกผัน

  จะได้ $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)$$

$$= -\frac{1}{70}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t$$

$$= -\frac{1}{70}\begin{bmatrix} -8 & -3 & -14 \\ 10 & -5 & 0 \\ -32 & -12 & 14 \end{bmatrix}^t$$

$$= -\frac{1}{70}\begin{bmatrix} -8 & 10 & -32 \\ -3 & -5 & -12 \\ -14 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $AA^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right)\left(-\frac{1}{70}\begin{bmatrix} -8 & 10 & -32 \\ -3 & -5 & -12 \\ -14 & 0 & 14 \end{bmatrix}\right)$

$$= -\frac{1}{70}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8 & 10 & -32 \\ -3 & -5 & -12 \\ -14 & 0 & 14 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -\frac{1}{70}\begin{bmatrix} -70 & 0 & 0 \\ 0 & -70 & 0 \\ 0 & 0 & -70 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I$$

และ $A^{-1}A = \left(-\frac{1}{70}\begin{bmatrix} -8 & 10 & -32 \\ -3 & -5 & -12 \\ -14 & 0 & 14 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right)$

$$= -\frac{1}{70}\left(\begin{bmatrix} -8 & 10 & -32 \\ -3 & -5 & -12 \\ -14 & 0 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -\frac{1}{70}\begin{bmatrix} -70 & 0 & 0 \\ 0 & -70 & 0 \\ 0 & 0 & -70 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I$$

นั่นคือ $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

ดังนั้น A^{-1} เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

- สมบัติของเมทริกซ์ผกผันมีดังนี้

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีเมทริกซ์ผกผันแล้ว จะได้ว่า

1) เมทริกซ์ A^{-1} มีเมทริกซ์ผกผัน และได้ว่า $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

2) สำหรับสเกลาร์ c ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์ เมทริกซ์ cA มีตัวผกผัน และ $\left(cA\right)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$

3) สำหรับเมทริกซ์ B ซึ่งมีขนาดเท่ากับเมทริกซ์ A
ถ้า B มีเมทริกซ์ผกผันด้วยแล้ว AB มีเมทริกซ์ผกผัน และได้ว่า
$\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4) เมทริกซ์ A^t มีตัวผกผัน และได้ว่า $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$

5) สำหรับจำนวนเต็มบวก k เมทริกซ์ A^k มีตัวผกผัน และได้ว่า $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$

- หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 กล่าวถึง การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์และการดำเนินการตามแถว อย่างไรก็ตาม ยังมีวิธีอื่น ๆ อีกที่ใช้ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ เช่น การใช้**กฎของคราเมอร์** (Cramer's rule) ซึ่งเป็นวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่มี n สมการ และ n ตัวแปร โดยการคำนวณดีเทอร์มิแนนต์ ดังนี้

สำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย n สมการ n ตัวแปร

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

สามารถเขียนระบบสมการนี้ในรูปสมการเมทริกซ์ $AX = B$ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ และ } \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

กรณี $\det(A) \neq 0$ คำตอบของระบบสมการนี้ คือ $(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n)$ โดยที่

$$r_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad r_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \ldots \quad , \quad r_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

กรณี $\det(A) = 0$

- ถ้า $\det(A_1) = \det(A_2) = \ldots = \det(A_n) = 0$ แล้วจะได้ว่าระบบสมการนี้มีคำตอบเป็นจำนวนอนันต์
- ถ้ามี $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ซึ่ง $\det(A_i) \neq 0$ แล้วจะได้ว่าระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

การหาคำตอบของระบบสมการโดยใช้กฎของคราเมอร์ แม้จะเป็นวิธีที่เข้าใจง่าย แต่ต้องใช้การคำนวณค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์หลายเมทริกซ์ จึงไม่เหมาะกับการแก้ระบบสมการที่มีจำนวนตัวแปรมาก แต่อาจเหมาะกับกรณีที่ต้องการหาคำตอบเพียงหนึ่งตัวแปรของระบบสมการ เช่น หากต้องการทราบเพียงค่า x_1 สามารถคำนวณได้จาก $\frac{\det(A_1)}{\det(A)}$

ตัวอย่างการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์เป็นดังนี้

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 3 \\ x + y - z &= -\frac{1}{2} \\ 3x + 2y - 2z &= -2 \end{aligned}$$

วิธีทำ จากระบบสมการที่กำหนดให้ เขียนสมการเมทริกซ์ได้เป็น $AX = B$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\det(A) = -3 \neq 0$ ฉะนั้น โดยกฎของคราเมอร์จะได้ว่า

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{(-6+2-2)-(-4-6+1)}{-3} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{(2-9-4)-(-3+4-6)}{-3} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{\left(-4-\frac{3}{2}+6\right)-(9-2-2)}{-3} = \frac{3}{2}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการที่กำหนดคือ $\left(-1, 2, \frac{3}{2}\right)$

- หัวข้อนี้จะแสดงการพิสูจน์บางทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับเรื่องเมทริกซ์ ซึ่งไม่ได้แสดงการพิสูจน์ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 บทที่ 2 เมทริกซ์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1

ให้ A, B, C และ $\underline{0}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $m \times n$ และ c, d เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

1) $A+B=B+A$
2) $A+(B+C)=(A+B)+C$
3) $A+\underline{0}=\underline{0}+A=A$
4) $A+(-A)=(-A)+A=\underline{0}$
5) $c(A+B)=cA+cB$
6) $(c+d)A=cA+dA$
7) $(cd)A=c(dA)$
8) $1A=A$
9) $0A=\underline{0}$

พิสูจน์

ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$, $C=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ และ c, d เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1) เนื่องจาก $A+B = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$
$= \left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}$

$$= \left[b_{ij} + a_{ij}\right]_{m\times n}$$
$$= \left[b_{ij}\right]_{m\times n} + \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$
$$= B + A$$

นั่นคือ $A + B = B + A$

2) เนื่องจาก $A + (B + C) = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left(\left[b_{ij}\right]_{m\times n} + \left[c_{ij}\right]_{m\times n}\right)$

$$= \left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left[b_{ij} + c_{ij}\right]_{m\times n}$$
$$= \left[a_{ij} + \left(b_{ij} + c_{ij}\right)\right]_{m\times n}$$
$$= \left[\left(a_{ij} + b_{ij}\right) + c_{ij}\right]_{m\times n}$$
$$= \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n} + \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$$
$$= (A + B) + C$$

นั่นคือ $A + (B + C) = (A + B) + C$

3) ให้ $\underline{0}$ เป็นเอกลักษณ์การบวกของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$

เนื่องจาก $A + \underline{0} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} + [0]_{m\times n}$

$$= \left[a_{ij} + 0\right]_{m\times n}$$
$$= \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$
$$= A \qquad \text{----- (1)}$$

และ $\underline{0} + A = [0]_{m\times n} + \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$

$$= \left[0 + a_{ij}\right]_{m\times n}$$
$$= \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$
$$= A \qquad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $A + \underline{0} = \underline{0} + A = A$

4) เนื่องจาก $A + (-A) = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left(-\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\right)$

$$= \left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left[-a_{ij}\right]_{m\times n}$$
$$= \left[a_{ij} + \left(-a_{ij}\right)\right]_{m\times n}$$
$$= [0]_{m\times n}$$
$$= \underline{0} \qquad \text{----- (1)}$$

และ $$\begin{aligned}(-A)+A &= \left(-\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\right)+\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\\ &= \left[-a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\\ &= \left[\left(-a_{ij}\right)+a_{ij}\right]_{m\times n}\\ &= \left[0\right]_{m\times n}\\ &= \underline{0} \qquad \text{----- (1)}\end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $A+(-A)=(-A)+A=\underline{0}$

5) เนื่องจาก $$\begin{aligned}c(A+B) &= c\left(\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[b_{ij}\right]_{m\times n}\right)\\ &= c\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}\\ &= \left[c\left(a_{ij}+b_{ij}\right)\right]_{m\times n}\\ &= \left[ca_{ij}+cb_{ij}\right]_{m\times n}\\ &= \left[ca_{ij}\right]_{m\times n}+\left[cb_{ij}\right]_{m\times n}\\ &= c\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+c\left[b_{ij}\right]_{m\times n}\\ &= cA+cB\end{aligned}$$

นั่นคือ $c(A+B)=cA+cB$

6) เนื่องจาก $$\begin{aligned}(c+d)A &= (c+d)\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\\ &= \left[(c+d)a_{ij}\right]_{m\times n}\\ &= \left[ca_{ij}+da_{ij}\right]_{m\times n}\\ &= \left[ca_{ij}\right]_{m\times n}+\left[da_{ij}\right]_{m\times n}\\ &= c\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+d\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\\ &= cA+dA\end{aligned}$$

จะได้ว่า $(c+d)A=cA+dA$

7) เนื่องจาก $$\begin{aligned}(cd)A &= (cd)\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\\ &= \left[(cd)a_{ij}\right]_{m\times n}\\ &= \left[c\left(da_{ij}\right)\right]_{m\times n}\\ &= c\left[da_{ij}\right]_{m\times n}\\ &= c\left(d\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\right)\end{aligned}$$

$= c(dA)$

จะได้ว่า $(cd)A = c(dA)$

8) เนื่องจาก $1A = 1\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$

$= \left[1a_{ij}\right]_{m\times n}$

$= \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$

จะได้ว่า $1A = A$

9) เนื่องจาก $0A = 0\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$

$= \left[0a_{ij}\right]_{m\times n}$

$= \left[0\right]_{m\times n}$

$= \underline{0}$

ทฤษฎีบท 3

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$ เมื่อ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $m\times n$

2) $(AB)^t = B^tA^t$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m\times n$ และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times p$

3) $\left(A^t\right)^t = A$

4) $(cA)^t = cA^t$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง

พิสูจน์

1) ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$

จะได้ $A^t + B^t = \left[a_{ji}\right]_{n\times m} + \left[b_{ji}\right]_{n\times m}$

$= \left[a_{ji} + b_{ji}\right]_{n\times m}$

$= \left(\left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n}\right)^t$

$= (A+B)^t$

ดังนั้น $(A+B)^t = A^t + B^t$

2) ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times p}$

จากบทนิยาม 7 จะได้

$AB=\left[m_{ij}\right]_{m\times p}$ เมื่อ $m_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

และ $A^tB^t=\left[m_{ji}\right]_{p\times m}$ เมื่อ $m_{ji}=b_{j1}a_{1i}+b_{j2}a_{2i}+\cdots+b_{jn}a_{ni}=\sum_{k=1}^{n}b_{jk}a_{ki}$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned}(AB)^t &= \left(\left[m_{ij}\right]_{m\times p}\right)^t\\ &= \left(\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right]_{m\times p}\right)^t\\ &= \left[\sum_{k=1}^{n}a_{ki}b_{jk}\right]_{p\times m}\\ &= \left[\sum_{k=1}^{n}b_{jk}a_{ki}\right]_{p\times m}\\ &= \left[m_{ji}\right]_{p\times m}\\ &= A^tB^t\end{aligned}$$

ดังนั้น $(AB)^t=B^tA^t$

3) ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$

จะได้
$$\begin{aligned}\left(A^t\right)^t &= \left(\left(\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\right)^t\right)^t\\ &= \left(\left[a_{ji}\right]_{n\times m}\right)^t\\ &= \left[a_{ij}\right]_{m\times n}\\ &= A\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left(A^t\right)^t=A$

4) ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จะได้
$$\begin{aligned}(cA)^t &= \left(c\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\right)^t\\ &= \left(\left[ca_{ij}\right]_{m\times n}\right)^t\\ &= \left[ca_{ji}\right]_{n\times m}\end{aligned}$$

$$= c\left[a_{ji}\right]_{n\times m}$$
$$= c\left(\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\right)^t$$
$$= cA^t$$

ดังนั้น $(cA)^t = cA^t$

ทฤษฎีบท 5

ถ้า A มีเมทริกซ์ผกผัน แล้วเมทริกซ์ผกผันของ A จะมีเพียงเมทริกซ์เดียวเท่านั้น

พิสูจน์

ให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $n\times n$ ซึ่งมี B และ C เป็นเมทริกซ์ผกผัน

จากบทนิยาม 13 จะได้ว่า $BA = AB = I_n$ และ $CA = AC = I_n$

เนื่องจาก $(BA)C = I_nC = C$ และ $(BA)C = B(AC) = BI_n = B$

ดังนั้น $B = C$

ทฤษฎีบท 6

ให้ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ เมื่อ $ad-bc\neq 0$

พิสูจน์ ให้ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

1. จะแสดงว่า ถ้า $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ แล้ว $ad-bc\neq 0$

ให้ $B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

สมมติ $ad-bc=0$ จะได้ $ad=bc$

เนื่องจาก $I_2 = AB$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \quad \text{----- (1)}$$

คูณสมาชิกในแถวที่ 1 ของทุกเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง c และคูณสมาชิกในแถวที่ 2 ของทุกเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง c

จะได้ $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ace+bcg & acf+bch \\ ace+adg & acf+adh \end{bmatrix}$

เนื่องจาก $ad = bc$

จะได้ $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ace+bcg & acf+bch \\ ace+bcg & acf+bch \end{bmatrix}$

นั่นคือ $a = 0$ และ $c = 0$

จาก (1) จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bg & bh \\ dg & dh \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $bg = dh = 1$ และ $dg = bh = 0$

เนื่องจาก $bg = dh = 1$ จะได้ว่า $b \neq 0, d \neq 0, g \neq 0$ และ $h \neq 0$

นั่นคือ $dg \neq 0$ และ $bh \neq 0$ ซึ่งขัดแย้งกับที่สมมติให้ $ad - bc = 0$

ดังนั้น $ad - bc \neq 0$

2. จะแสดงว่า ถ้า $ad - bc \neq 0$ แล้ว $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ให้ $B = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & ad-bc \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= I_2 \end{aligned}$$

และ
$$BA = \left(\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & bd-bd \\ -ac+ac & ad-bc \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I_2$$

จะได้ว่า A มีตัวผกผัน คือ $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

จาก 1 และ 2 จะได้ว่า $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ เมื่อ $ad-bc \neq 0$

2.7 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทและเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

ในส่วนนี้จะนำเสนอตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทที่ 2 เมทริกซ์ สำหรับรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ซึ่งครูสามารถเลือกนำไปใช้ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดผลประเมินผล

ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. ให้ $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา
   1) $A+B$ 2) $A-B$
   3) AB 4) BA
2. ให้ $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}-A=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา A
3. ให้ $\begin{bmatrix} y & 1 \\ x-2 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ จงหา x และ y
4. ให้ $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ และ $C=2A+\frac{1}{2}B$
   จงหา $c_{13}+c_{31}$ เมื่อ c_{13} และ c_{31} เป็นสมาชิกของ C
5. ให้ $A=\begin{bmatrix} 2x+y \\ 4x+3y \end{bmatrix}$ จงพิจารณาว่าข้อความในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ
   1) A เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 2×2 และมีสมาชิก 4 ตัว
   2) $A=\begin{bmatrix} 2x \\ 3y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4y \end{bmatrix}$
   3) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
   4) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
6. ให้ $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ และ $C=\left[c_{ij}\right]_{2\times 2}=\left(AB^t\right)^t-2A$ จงหา $c_{21}-c_{12}$

7. ให้ $A=\begin{bmatrix} x & -1 & x^2 \\ y^2 & 1 & 3 \\ 3 & x^2 & y \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $A+A^t=2B$ จงหา $x+y$

8. ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{2\times 2}$ โดยที่ไม่มีสมาชิกตัวใดของ A ที่ซ้ำกัน และ $A^t=-A$ จงพิจารณาว่าข้อความในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

   1) $a_{12}=a_{21}$ และ $a_{11}=a_{22}=0$

   2) $a_{12}=a_{21}$ และ $a_{11}=a_{22}$

   3) $a_{12}=-a_{21}$ และ $a_{11}=a_{22}=0$

   4) $a_{12}=-a_{21}$ และ $a_{11}\neq a_{22}$

9. ให้ $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา $2A^{-1}$

10. ให้ $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $A^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=B$ จงหา $y-x$

11. ให้ $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $B^{-1}A^{-1}$

12. ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 3×3 โดยที่ $\det(A)=3$ และ $\det(B)=2$ จงหา $\det\left(A^2B^3\right)^t$

13. ให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 3×3 ซึ่ง $A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

    ถ้า $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ และ $AX=B$ แล้ว จงหา $x-y+z$

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. 1) $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+(-1) & 0+(-4) \\ -1+0 & 3+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

2) $A-B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1-(-1) & 0-(-4) \\ -1-0 & 3-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (1)(-1)+(0)(0) & (1)(-4)+(0)(2) \\ (-1)(-1)+(3)(0) & (-1)(-4)+(3)(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$$

4) $BA = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (-1)(1)+(-4)(-1) & (-1)(0)+(-4)(3) \\ (0)(1)+(2)(-1) & (0)(0)+(2)(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -12 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

2. จาก $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1-(-3) & 2-0 \\ 3-4 & 5-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. จาก $\begin{bmatrix} y & 1 \\ x-2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

จะได้ $y = x+3$ และ $x-2 = -4$

ดังนั้น $x = -2$ และ $y = 1$

4. จาก $C = 2A + \frac{1}{2}B$

จะได้ $C = 2\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 4 & -8 & 12 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2+2 & -2-1 & 6+2 \\ 4+0 & -8+1 & 12+1 \\ 8+3 & -4-2 & 10-1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & -3 & 8 \\ 4 & -7 & 13 \\ 11 & -6 & 9 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $c_{13} = 8$ และ $c_{31} = 11$

ดังนั้น $c_{13} + c_{31} = 8 + 11 = 19$

5. 1) เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์ที่มี 2 แถว 1 หลัก นั่นคือ A เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 2×1 และมีสมาชิก 2 ตัว คือ $2x + y$ และ $4x + 3y$

ดังนั้น ข้อความ “A เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 2×2 และมีสมาชิก 4 ตัว” เป็นเท็จ

2) เนื่องจาก $\begin{bmatrix} 2x \\ 3y \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 2×1 และ $\begin{bmatrix} x \\ 4y \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 2×1

จะได้ว่า $\begin{bmatrix} 2x \\ 3y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4y \end{bmatrix}$ ไม่นิยาม

ดังนั้น ข้อความ “$A = \begin{bmatrix} 2x \\ 3y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4y \end{bmatrix}$” เป็นเท็จ

3) เนื่องจาก $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{bmatrix}$

แต่ $\begin{bmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2x+y \\ 4x+3y \end{bmatrix}$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq A$

ดังนั้น ข้อความ “$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$” เป็นเท็จ

4) เนื่องจาก $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x+y \\ 4x+3y \end{bmatrix}$ และ $A=\begin{bmatrix} 2x+y \\ 4x+3y \end{bmatrix}$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A$

ดังนั้น ข้อความ “$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$” เป็นจริง

6. จาก $C = \left(AB^t\right)^t - 2A$

จะได้ $C = BA^t - 2A$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3)(2)+(0)(1) & (3)(0)+(0)(-3) \\ (1)(2)+(2)(1) & (1)(0)+(2)(-3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-4 & 0-2 \\ 4-0 & -6+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $c_{21}=4$ และ $c_{12}=-2$

ดังนั้น $c_{21}-c_{12}=4-(-2)=6$

7. จาก $A+A^t = 2B$

จะได้ $\begin{bmatrix} x & -1 & x^2 \\ y^2 & 1 & 3 \\ 3 & x^2 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y^2 & 3 \\ -1 & 1 & x^2 \\ x^2 & 3 & y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2x & y^2-1 & x^2+3 \\ y^2-1 & 2 & x^2+3 \\ x^2+3 & x^2+3 & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $2x=-2$, $x^2+3=4$, $2y=2$ และ $y^2-1=0$

จะได้ $x=-1$ และ $y=1$

ดังนั้น $x+y=-1+1=0$

8. ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{2\times 2}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ โดยที่ $a_{11}\neq a_{12}\neq a_{21}\neq a_{22}$

จะได้ $A^t=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ และ $-A=-\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}$

เนื่องจาก $A^t=-A$

จะได้ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}$

นั่นคือ $a_{11}=-a_{11}$, $a_{12}=-a_{21}$, $a_{21}=-a_{12}$ และ $a_{22}=-a_{22}$

จะได้ $a_{11}=a_{22}=0$

1) ข้อความ “$a_{12}=a_{21}$ และ $a_{11}=a_{22}=0$” เป็นเท็จ

2) ข้อความ “$a_{12}=a_{21}$ และ $a_{11}=a_{22}$” เป็นเท็จ

3) ข้อความ “$a_{12}=-a_{21}$ และ $a_{11}=a_{22}=0$” เป็นจริง

4) ข้อความ “$a_{12}=-a_{21}$ และ $a_{11}\neq a_{22}$” เป็นเท็จ

9. จาก $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

จะได้ $A^{-1}=\frac{1}{(2)(-1)-(-3)(1)}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $2A^{-1}=2\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

10. **วิธีที่ 1** จาก $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

จะได้ $A^{-1}=\frac{1}{(4)(1)-(2)(3)}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$

เนื่องจาก $A^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B$

จะได้ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x+y \\ \frac{3}{2}x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $-\frac{1}{2}x+y=1$ และ $\frac{3}{2}x-2y=3$

จะได้ $x=10$ และ $y=6$

ดังนั้น $y-x=6-10=-4$

วิธีที่ 2 จาก $A^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B$

จะได้ $A\cdot A^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = AB$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = AB$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $x=10$ และ $y=6$

ดังนั้น $y-x=6-10=-4$

11. **วิธีที่ 1** จาก $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ จะได้ $A^{-1}=\frac{1}{(2)(4)-(2)(3)}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

จาก $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ จะได้ $B^{-1}=\frac{1}{(3)(1)-(1)(4)}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $B^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -\frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{7}{2} & 2\\ \frac{25}{2} & -7\end{bmatrix}$

วิธีที่ 2 เนื่องจาก $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$

จะได้ $B^{-1}A^{-1} = \left(\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}\right)^{-1}$

$= \begin{bmatrix}14 & 4\\ 25 & 7\end{bmatrix}^{-1}$

$= \frac{1}{(14)(7)-(4)(25)}\begin{bmatrix}7 & -4\\ -25 & 14\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}-\frac{7}{2} & 2\\ \frac{25}{2} & -7\end{bmatrix}$

12. เนื่องจาก $\det\left(A^2B^3\right)^t = \det\left(A^2B^3\right) = \det\left(A^2\right)\det\left(B^3\right) = \left(\det(A)\right)^2\left(\det(B)\right)^3$

จะได้ $\det\left(A^2B^3\right)^t = 3^2\times 2^3 = 9\times 8 = 72$

13. จาก $AX = B$

จะได้ $A^{-1}AX = A^{-1}B$

$X = A^{-1}B$

$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -4\\ 6\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(2)(1)+(-1)(-4)+(1)(6)\\ (3)(1)+(-2)(-4)+(1)(6)\\ (0)(1)+(0)(-4)+(1)(6)\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\ 17\\ 6\end{bmatrix}$

นั่นคือ $x=12,\ y=17$ และ $z=6$

ดังนั้น $x-y+z=12-17+6=1$

บทที่ 3

เวกเตอร์

ในชีวิตจริงนักเรียนคุ้นเคยกับปริมาณที่บ่งบอกขนาดในรูปของจำนวน แต่มีบางปริมาณที่ต้องบอกขนาดของสิ่งที่พิจารณาควบคู่กับการบอกทิศทางของสิ่งเหล่านั้นด้วย เรียก ปริมาณเหล่านี้ว่า “เวกเตอร์” เช่น แรง การกระจัดของการเคลื่อนที่ ความเร็ว ความเร่ง ความรู้เรื่องเวกเตอร์นำไปสู่บทประยุกต์ในชีวิตจริง เช่น การแล่นเรือใบ และยังมีการนำแนวคิดมาใช้ในการศึกษาเรื่องต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และศาสตร์อื่น ๆ โดยในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 นำเสนอบทนิยามของเวกเตอร์และสมบัติของเวกเตอร์ ระบบพิกัดฉากสามมิติ เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก ผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์

ในบทเรียนนี้มุ่งเน้นให้นักเรียนบรรลุผลการเรียนรู้ตามสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมและบรรลุจุดมุ่งหมายดังต่อไปนี้

ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

ผลการเรียนรู้

- หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์
- นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

- เวกเตอร์ นิเสธของเวกเตอร์
- การบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
- ผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์

จุดมุ่งหมาย

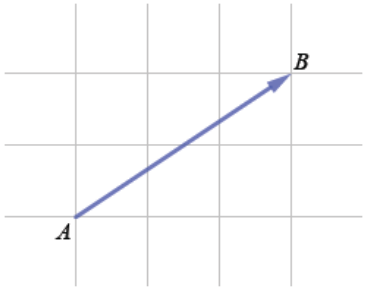
1. เข้าใจความหมายของเวกเตอร์
2. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
3. หาผลคูณเชิงสเกลาร์
4. หาผลคูณเชิงเวกเตอร์
5. นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ไปใช้ในการแก้ปัญหา

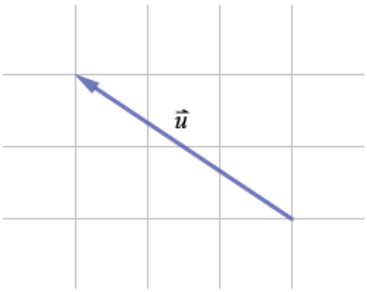
ความรู้ก่อนหน้า

- ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- เมทริกซ์

ipst.me/8454

3.1 เนื้อหาสาระ

1. **บทนิยาม 1**
   ปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่า **ปริมาณสเกลาร์** ส่วนปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เรียกว่า **ปริมาณเวกเตอร์**
2. ปริมาณสเกลาร์หรือเรียกสั้น ๆ ว่า สเกลาร์ แสดงด้วยจำนวนจริง ส่วนปริมาณเวกเตอร์หรือเรียกสั้น ๆ ว่า เวกเตอร์ แสดงในเชิงเรขาคณิตได้ด้วย**ส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทาง** โดยความยาวของส่วนของเส้นตรงบอกขนาดของเวกเตอร์และหัวลูกศรบอกทิศทางของเวกเตอร์
3. 

จากรูป แสดงเวกเตอร์จาก A ไป B เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{AB}$ หรือ $\overrightarrow{AB}$ (ในที่นี้จะใช้ $\overrightarrow{AB}$ อ่านว่า เวกเตอร์ เอบี) เรียก A ว่า **จุดเริ่มต้น** ของเวกเตอร์ และเรียก B ว่า **จุดสิ้นสุด** ของเวกเตอร์ ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB หรือ BA คือ ขนาดของเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย $\left|\overrightarrow{AB}\right|$
4. 

ในกรณีที่ต้องการกล่าวถึงเวกเตอร์ใด ๆ โดยที่ไม่ต้องการระบุจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์จะใช้อักษรตัวเดียว และมีเครื่องหมาย $\bar{}$ กำกับไว้ เช่น $\vec{u}$ ดังแสดงในรูป และแทนขนาดของ $\vec{u}$ ด้วยสัญลักษณ์ $|\vec{u}|$
5. **บทนิยาม 2**
   $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ **ขนานกัน** ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีทิศทางเดียวกันหรือทิศทางตรงข้ามกัน
6. $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u}\ //\ \vec{v}$
7. **บทนิยาม 3**
   $\vec{u}$ **เท่ากับ** $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน
8. $\vec{u}$ เท่ากับ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u}=\vec{v}$

9. **บทนิยาม 4**

นิเสธ ของ $\bar{u}$ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\bar{u}$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางของ $\bar{u}$

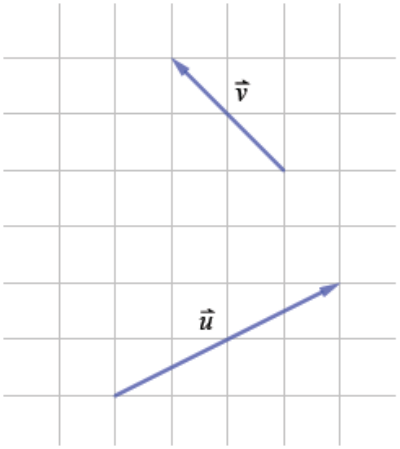
10. นิเสธของ $\bar{u}$ เขียนแทนด้วย $-\bar{u}$

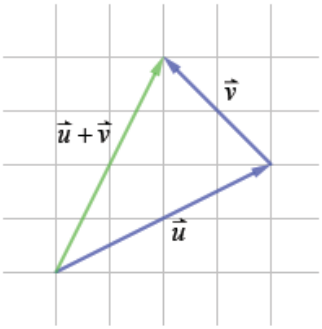
หมายเหตุ จะเห็นว่า $-(-\bar{u})=\bar{u}$

11. **บทนิยาม 5**

ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ เขียน $\bar{v}$ โดยให้จุดเริ่มต้นของ $\bar{v}$ อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ **ผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$** คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$

12. ผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u}+\bar{v}$ แสดงได้ดังรูป





13. **บทนิยาม 6**

เวกเตอร์ศูนย์ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์

14. เวกเตอร์ศูนย์ เขียนแทนด้วย $\bar{0}$

15. **สมบัติการบวกของเวกเตอร์**

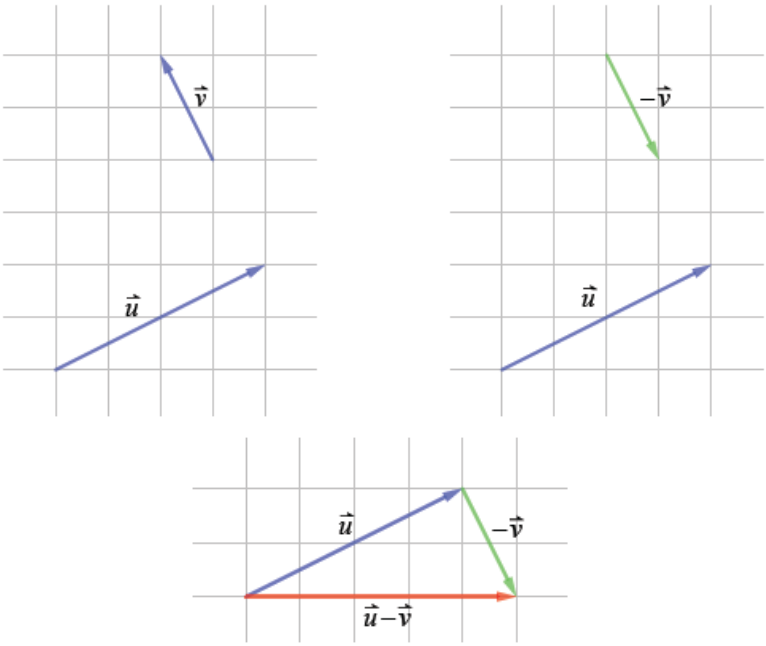
ให้ $\bar{u}, \bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์

1) $\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u}$
2) $(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}=\bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})$
3) $\bar{u}+\bar{0}=\bar{0}+\bar{u}=\bar{u}$
4) $\bar{u}+(-\bar{u})=(-\bar{u})+\bar{u}=\bar{0}$

16. **บทนิยาม 7**

ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ **เวกเตอร์** $\bar{u}$ **ลบด้วย** $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u}-\bar{v}$ คือ ผลบวกของ $\bar{u}$ และนิเสธของ $\bar{v}$ นั่นคือ $\bar{u}-\bar{v}=\bar{u}+(-\bar{v})$

17. ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ $\bar{u}-\bar{v}$ แสดงได้ดังรูป



18. **บทนิยาม 8**

ให้ a เป็นสเกลาร์ และ $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ **ผลคูณของ** $\bar{u}$ **กับสเกลาร์** a เป็นเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย $a\bar{u}$ โดยที่

1) ถ้า $a=0$ แล้ว $a\bar{u}=\bar{0}$
2) ถ้า $a>0$ แล้ว $a\bar{u}$ จะมีขนาด $|a||\bar{u}|$ หน่วย และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$
3) ถ้า $a<0$ แล้ว $a\bar{u}$ จะมีขนาด $|a||\bar{u}|$ หน่วย แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$

หมายเหตุ จากบทนิยาม 8 จะเห็นว่า

1) $(-1)\bar{u}=-\bar{u}$
2) ถ้า $a\neq 0$ และ $\bar{u}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ แล้ว $a\bar{u}$ จะขนานกับ $\bar{u}$

19. **สมบัติการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์**

ให้ a, b เป็นสเกลาร์ และ $\bar{u}, \bar{v}$ เป็นเวกเตอร์

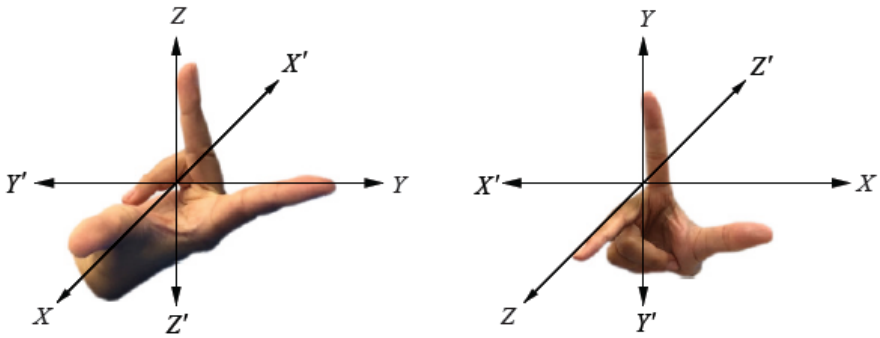
1) $1\bar{u} = \bar{u}$

2) $a(\bar{u} + \bar{v}) = a\bar{u} + a\bar{v}$

3) $(a+b)\bar{u} = a\bar{u} + b\bar{u}$

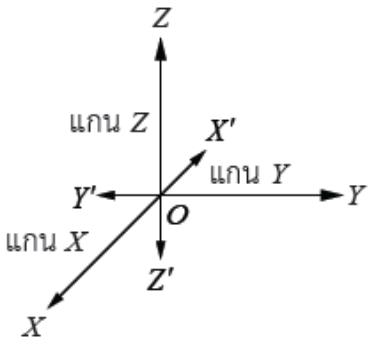
4) $(ab)\bar{u} = a(b\bar{u}) = b(a\bar{u})$

20. ระบบพิกัดฉากสามมิติ จะกำหนดโดยให้เส้นตรง XX', YY' และ ZZ' เป็นเส้นตรงสามเส้นที่ตั้งฉากซึ่งกันและกันที่จุด O ซึ่งเรียกว่า จุดกำเนิด ส่วนการกำหนดทิศทางของเส้นตรงทั้งสามนั้นจะใช้ระบบมือขวา ดังรูป



โดยให้นิ้วโป้งแทนทิศทางทางบวกของแกน X นิ้วชี้แทนทิศทางทางบวกของแกน Y และนิ้วกลางแทนทิศทางทางบวกของแกน Z

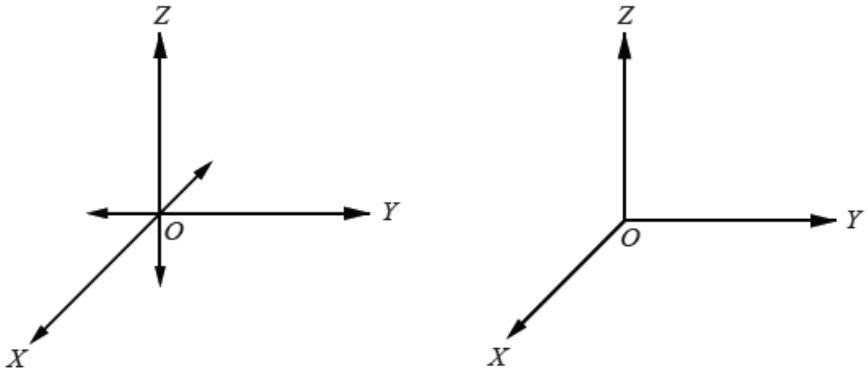
21.



เส้นตรง XX', YY' และ ZZ' เรียกว่า **แกนพิกัด** X **แกนพิกัด** Y และ**แกนพิกัด** Z หรือเรียกสั้น ๆ ว่า **แกน** X **แกน** Y และ**แกน** Z ตามลำดับ และเรียกจุด O ซึ่งเป็นจุดตัดแกน X แกน Y และแกน Z ว่า **จุดกำเนิด**

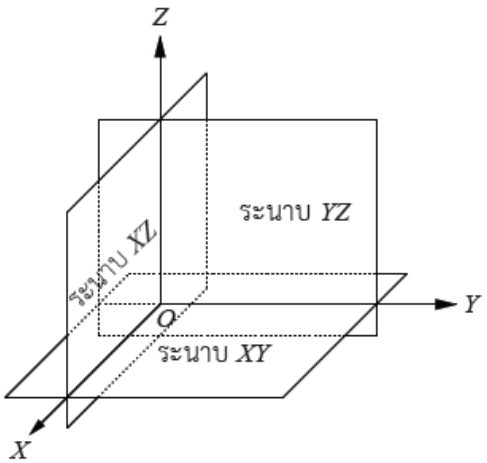
เรียกรังสี OX, OY และ OZ ว่า **แกน** X **ทางบวก แกน** Y **ทางบวก** และ**แกน** Z **ทางบวก** ตามลำดับ และเรียกรังสี OX', OY' และ OZ' ว่า **แกน** X **ทางลบ แกน** Y **ทางลบ** และ**แกน** Z **ทางลบ** ตามลำดับ

22. โดยทั่วไป เมื่อเขียนรูปแกนพิกัดในระบบพิกัดฉากสามมิติ นิยมเขียนเฉพาะแกน X แกน Y และแกน Z ทางบวก ซึ่งมีหัวลูกศรกำกับ ดังรูป



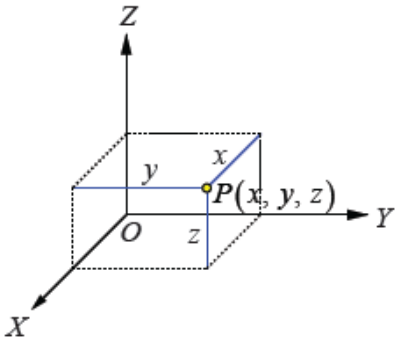
โดยละแกน X แกน Y และแกน Z ทางลบไว้ในฐานที่เข้าใจ

23. จากแกน X แกน Y และแกน Z จะกำหนดระนาบขึ้น 3 ระนาบ เรียกว่า **ระนาบอ้างอิง** เรียกระนาบที่กำหนดด้วยแกน X และแกน Y ว่า **ระนาบอ้างอิง** XY เรียกระนาบที่กำหนดด้วยแกน Y และแกน Z ว่า **ระนาบอ้างอิง** YZ และเรียกระนาบที่กำหนดด้วยแกน X และแกน Z ว่า **ระนาบอ้างอิง** XZ หรือเรียกสั้น ๆ ว่า **ระนาบ** XY **ระนาบ** YZ และ**ระนาบ** XZ ตามลำดับ ดังรูป

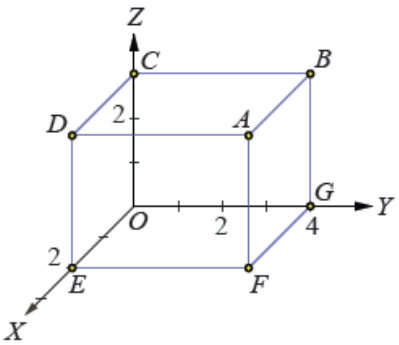


24. ระนาบ XY ระนาบ YZ และระนาบ XZ ทั้งสามระนาบดังกล่าวจะแบ่งระบบพิกัดฉากสามมิติออกเป็น 8 บริเวณ คือ เหนือระนาบ XY จำนวน 4 บริเวณ และใต้ระนาบ XY จำนวน 4 บริเวณ เรียกแต่ละบริเวณว่า **อัฐภาค**

25. เมื่อกำหนดจุด P เป็นจุดใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ จะสามารถระบุ**พิกัด**ของจุด P โดยใช้จำนวนจริงสามจำนวนเรียงกันตามลำดับหรือเรียกว่า **สามสิ่งอันดับ** ในรูป (x, y, z) บางครั้งจะเขียนจุดและพิกัดกำกับไว้ด้วยกันเป็น $P(x, y, z)$ ดังรูป



26.



ถ้าลากเส้นผ่านจุด $P(x, y, z)$ ให้ขนานกับแกน Z ไปตัดระนาบ XY ได้จุดตัด $Q(x, y, 0)$ เรียกจุดนี้ว่า เป็น **ภาพฉาย** ของจุด P ในระนาบ XY ในทำนองเดียวกัน จะเรียกจุด $R(0, y, z)$ ว่า เป็นภาพฉายของจุด P ในระนาบ YZ และเรียกจุด $S(x, 0, z)$ ว่า เป็นภาพฉายของจุด P ในระนาบ XZ

และเรียกจุด $P'(x, 0, 0)$, $P''(0, y, 0)$ และ $P'''(0, 0, z)$ ว่า เป็นภาพฉายของจุด P บนแกน X แกน Y และแกน Z ตามลำดับ

27. **ทฤษฎีบท 1**
ระยะทางระหว่างจุด $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$ หรือ PQ เท่ากับ $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ หน่วย

28. ในกรณีทั่วไป เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะเขียน $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ แทนเวกเตอร์ซึ่งเป็นผลบวกของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ โดยที่เวกเตอร์แรกมีขนาด $|a|$ หน่วย ซึ่งถ้า $a>0$ แล้วเวกเตอร์นี้จะมีทิศทางไปตามแนวแกน X ทางบวก และถ้า $a<0$ แล้วเวกเตอร์นี้จะมีทิศทางไปตามแนวแกน X ทางลบ และเวกเตอร์ที่สองมีขนาด $|b|$ หน่วย ซึ่งถ้า $b>0$ แล้วเวกเตอร์นี้จะมีทิศทางไปตามแนวแกน Y ทางบวก และถ้า $b<0$ แล้วเวกเตอร์นี้จะมีทิศทางไปตามแนวแกน Y ทางลบ

29. ในเชิงเรขาคณิต เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด และจุดสิ้นสุดที่ (a, b) หรือมีจุดเริ่มต้นที่ (x, y) และจุดสิ้นสุดที่ $(x+a, y+b)$

30. ถ้า $\overrightarrow{AB}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $A(x_1, y_1)$ และจุดสิ้นสุดที่ $B(x_2, y_2)$ จะเขียนแทน $\overrightarrow{AB}$ ด้วย $\begin{bmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{bmatrix}$ และถ้าให้ $a=x_2-x_1$ และ $b=y_2-y_1$ แล้วจะเขียนแทน $\overrightarrow{AB}$ ด้วย $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

31. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและจุดสิ้นสุดที่ $P(a, b, c)$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

32. เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และจุดสิ้นสุดที่ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $\overrightarrow{P_1P_2}$ หมายถึง เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \\ z_2-z_1 \end{bmatrix}$ ดังนั้น $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ แทนเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและจุดสิ้นสุดที่ (a, b, c) หรือมีจุดเริ่มต้นที่ (x, y, z) และจุดสิ้นสุดที่ $(x+a, y+b, z+c)$

33. สำหรับเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ การเท่ากันของเวกเตอร์ นิเสธของเวกเตอร์ การบวกเวกเตอร์ เวกเตอร์ศูนย์ การลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ สามารถสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ให้ a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริงใด ๆ

	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ
การเท่ากัน	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = d$, $b = e$ และ $c = f$
นิเสธของเวกเตอร์	นิเสธของ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือ $-\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$	นิเสธของ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ คือ $-\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{bmatrix}$
การบวกเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix}$
เวกเตอร์ศูนย์	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
การลบเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c \\ b-d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-d \\ b-e \\ c-f \end{bmatrix}$
การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	$\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ	$\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{bmatrix}$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ

34. ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

$\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง k ที่ $k \neq 0$ ซึ่ง $\bar{u} = k\bar{v}$

- ถ้า $k > 0$ แล้ว $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีทิศทางเดียวกัน
- ถ้า $k < 0$ แล้ว $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน

35. ถ้า $\overrightarrow{PQ}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ P มีพิกัดเป็น (x_1, y_1) และ Q มีพิกัดเป็น (x_2, y_2) จะได้ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$ และ $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ถ้าให้ $a = x_2 - x_1$ และ $b = y_2 - y_1$ แล้ว จะได้ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และขนาดของ $\overrightarrow{PQ}$ เท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2}$ หน่วย

36. ถ้า $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ A มีพิกัดเป็น (x_1, y_1, z_1) และ B มีพิกัดเป็น (x_2, y_2, z_2) จะได้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$ และ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

ถ้าให้ $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$ และ $c = z_2 - z_1$ แล้ว จะได้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ และขนาดของ $\overrightarrow{AB}$ เท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ หน่วย

37. **บทนิยาม 9**

เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย เรียกว่า **เวกเตอร์หนึ่งหน่วย**

38. ในระบบพิกัดฉากสองมิติ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

39. ในระบบพิกัดฉากสามมิติ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

40. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสองมิติที่สำคัญ คือ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ เพื่อความสะดวกจึงแทน $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\vec{i}$ และแทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ด้วย $\vec{j}$

41. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติที่สำคัญ คือ $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ โดยแทน $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ ด้วย $\vec{i}$ แทน $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ ด้วย $\vec{j}$ และแทน $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ ด้วย $\vec{k}$

42. ให้ $\vec{u}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ สามารถเขียน $\vec{u}$ ให้อยู่ในรูปของ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$ ได้เป็น $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$

43. ให้ $\vec{u}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ สามารถเขียน $\vec{u}$ ให้อยู่ในรูปของ $\vec{i}$, $\vec{j}$ และ $\vec{k}$ ได้เป็น $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$

หมายเหตุ เนื่องจาก $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ และ $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ มีขนาด $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ หน่วย

ดังนั้น $\left|a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}\right|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

44. **บทนิยาม 10**

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติหรือสามมิติ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 และ b_3 เป็นสเกลาร์ **ผลคูณเชิงสเกลาร์** ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u}\cdot\vec{v}$ กำหนดดังนี้

1) ถ้า $\vec{u}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ และ $\vec{v}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ จะได้ $\vec{u}\cdot\vec{v}=a_1b_1+a_2b_2$

2) ถ้า $\vec{u}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ และ $\vec{v}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ จะได้ $\vec{u}\cdot\vec{v}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

45. $\vec{u}\cdot\vec{v}$ อ่านว่า เวกเตอร์ยู ดอท เวกเตอร์วี

46. **ทฤษฎีบท 2**

ให้ $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสองมิติหรือสามมิติ และ a เป็นสเกลาร์ จะได้ว่า

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

2) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{v})+(\vec{u}\cdot\vec{w})$ และ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})+(\vec{v}\cdot\vec{w})$

3) $a(\vec{u}\cdot\vec{v})=(a\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(a\vec{v})$

4) $\vec{0}\cdot\vec{u}=0$

5) $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$

6) $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$ และ $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$

47. **ทฤษฎีบท 3**

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ในระบบพิกัดฉากสองมิติหรือสามมิติ และ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ซึ่ง $0^\circ\le\theta\le180^\circ$ (มุมระหว่างเวกเตอร์หมายถึง มุมที่ไม่ใช่มุมกลับ ซึ่งมีแขนของมุมเป็นรังสีที่ขนานและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ทั้งสอง) จะได้ว่า $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

หมายเหตุ เพื่อความสะดวก จะถือว่าเวกเตอร์ศูนย์ตั้งฉากกับทุกเวกเตอร์

48. **ทฤษฎีบท 4**

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสองมิติหรือสามมิติ จะได้ว่า

$\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

49. **บทนิยาม 11**

ให้ $\vec{u}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ และ $\vec{v}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u}\times\vec{v}$

กำหนดโดย $\vec{u}\times\vec{v}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$

50. $\vec{u}\times\vec{v}$ อ่านว่า เวกเตอร์ยู ครอส เวกเตอร์วี

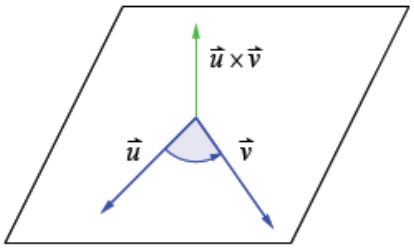
51. **ทฤษฎีบท 5**

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ จะได้ว่า

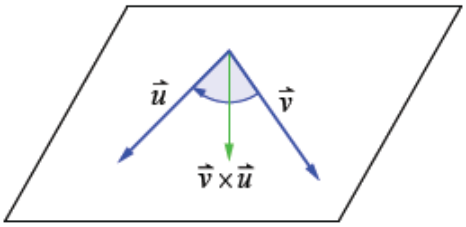
$\vec{u}\times\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ และมีขนาดเป็น $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$

เมื่อ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ โดยที่ $0^\circ\le\theta\le180^\circ$

52. ทิศทางของ $\vec{u}\times\vec{v}$ แสดงได้โดยใช้กฎมือขวา ดังรูป



และทิศทางของ $\vec{v}\times\vec{u}$ แสดงได้โดยใช้กฎมือขวา ดังรูป



53. ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ขนานกัน จะได้ว่า $\vec{u}\times\vec{v}$ และ $\vec{v}\times\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบที่ผ่าน $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ และมีทิศทางตรงข้ามกัน ดังนั้น $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$

54. การคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

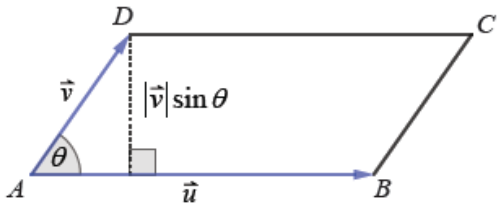
1) $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ และ $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$
2) $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$ และ $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$
3) $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}$, $\vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}$ และ $\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$

55. **ทฤษฎีบท 6**

กำหนด $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ และ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1) $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$
2) $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\times\vec{w})+(\vec{v}\times\vec{w})$
3) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})$
4) $\vec{u}\times(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\times\vec{v})$
5) $(\alpha\vec{u})\times\vec{v}=\alpha(\vec{u}\times\vec{v})$
6) $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$

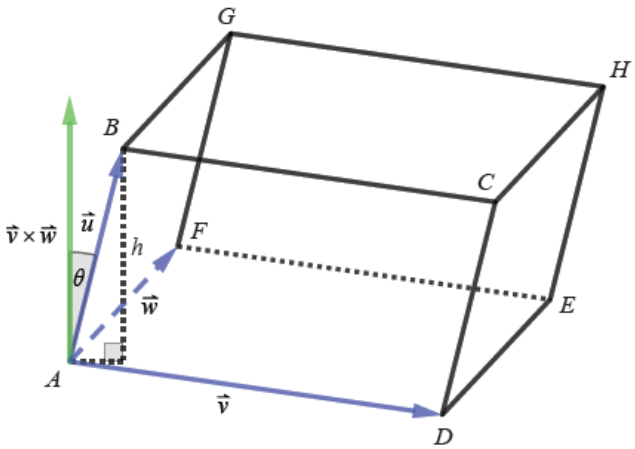
56. กำหนดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ ให้ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$ และ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ จะได้ว่า $|\vec{v}|\sin\theta$ เป็นส่วนสูงของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังรูป



ดังนั้น $|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$ เป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านที่ไม่ขนานกันยาว $|\vec{u}|$ และ $|\vec{v}|$ หน่วย แต่เนื่องจาก $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$ ดังนั้น $|\vec{u}\times\vec{v}|$ คือ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานดังกล่าว

นอกจากนี้ จะได้ว่า พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABD เท่ากับ $\frac{1}{2}|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta=\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$

57. กำหนดทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCDEFGH$ ให้ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{w}=\overrightarrow{AF}$ และ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}\times\vec{w}$ ในที่นี้จะพิจารณารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ADEF$ เป็นฐาน และ h เป็นความสูง จะได้ว่า $h=|\vec{u}||\cos\theta|$ ดังรูป



ดังนั้น ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ

$$\begin{aligned}|\vec{u}||\cos\theta||\vec{v}\times\vec{w}| &= |\vec{u}||\vec{v}\times\vec{w}||\cos\theta| \\ &= |\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|\end{aligned}$$

หมายเหตุ ในการเลือกลำดับของด้านประกอบของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานไม่มีผลต่อปริมาตรที่หาได้ กล่าวคือ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน เท่ากับ

$$|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|=|\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})|=|\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})|$$

3.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน

เวกเตอร์และสมบัติของเวกเตอร์

กิจกรรม : สเกลาร์และเวกเตอร์

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง ปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 – 4 คน แบบคละความสามารถ จากนั้นครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มพิจารณาสถานการณ์ต่อไปนี้

   ภราดรเป็นนักกีฬาที่มีความสูง 185 เซนติเมตร ในวันหนึ่งที่มีอุณหภูมิ 35 องศาเซลเซียส เขาโยนวัตถุที่มีมวล 50 กรัม ออกไปด้านหน้าด้วยความเร็วต้น 20 เมตรต่อวินาที วัตถุดังกล่าวเคลื่อนที่เป็นเวลา 10 วินาที ก่อนจะตกลงพื้น

2. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำที่ขีดเส้นใต้ที่อยู่ในสถานการณ์ที่กำหนดให้ในข้อ 1 โดยพิจารณาว่า

   - คำใดที่บอกขนาดเพียงอย่างเดียว

     แนวคำตอบ ความสูง อุณหภูมิ เวลา

   - คำใดที่บอกทั้งขนาดและทิศทาง

     แนวคำตอบ มวล ความเร็ว

   ทั้งนี้ ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนสืบค้นเพื่อหาข้อมูลประกอบการอภิปราย

3. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับกลุ่มคำที่จัดในข้อ 2 โดยเชื่อมโยงกับบทนิยาม 1 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ซึ่งจะได้ว่ากลุ่มคำแสดงปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่า ปริมาณสเกลาร์ และกลุ่มคำแสดงปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์

หมายเหตุ

- ครูอาจเปลี่ยนสถานการณ์ที่กำหนดให้เป็นสถานการณ์อื่นได้
- ครูอาจเปิดโอกาสให้นักเรียนกำหนดสถานการณ์ในข้อ 1 ทั้งนี้ สถานการณ์นั้นต้องมีคำแสดงปริมาณที่สเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์

กิจกรรม : การบวกเวกเตอร์

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อให้นักเรียนสำรวจวิธีการบวกเวกเตอร์ และนำไปสู่บทนิยามการบวกเวกเตอร์และสมบัติการสลับที่ของการบวกเวกเตอร์

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูจับคู่นักเรียนแบบคละความสามารถ จากนั้นเปิดไฟล์ Vector Addition.ggb จากเว็บไซต์ https://www.geogebra.org/m/Cy8bxaKS
2. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่สังเกตการหา $\vec{u}+\vec{v}$ โดยเลื่อนปุ่มบน Slider ที่ชื่อว่า Slide Completely to Illustrate u + v จากนั้นเขียนอธิบายสิ่งที่ได้จากการเลื่อนปุ่มบน Slider ตั้งแต่เริ่มต้นจนสิ้นสุด

   แนวคำตอบ

   เมื่อเลื่อนปุ่มบน Slider จะเห็นว่า $\vec{v}$ เคลื่อนที่ตามแนวเวกเตอร์ $\vec{u}$ จนกระทั่งจุดเริ่มต้นของ $\vec{v}$ อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{u}$ ซึ่งทำให้ได้ $\vec{u}+\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\vec{u}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{v}$
3. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่สังเกตการหา $\vec{v}+\vec{u}$ โดยเลื่อนปุ่มบน Slider ที่ชื่อว่า Slide Completely to Illustrate v + u จากนั้นเขียนอธิบายสิ่งที่ได้จากการเลื่อนปุ่มบน Slider ตั้งแต่เริ่มต้นจนสิ้นสุด

   แนวคำตอบ

   เมื่อเลื่อนปุ่มบน Slider จะเห็นว่า $\vec{u}$ เคลื่อนที่ตามแนวเวกเตอร์ $\vec{v}$ จนกระทั่งจุดเริ่มต้นของ $\vec{u}$ อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{v}$ ซึ่งทำให้ได้ $\vec{v}+\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\vec{v}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{u}$
4. ครูให้นักเรียนปรับขนาดและทิศทางของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ หลาย ๆ แบบ เพื่อสำรวจ $\vec{u}+\vec{v}$ และ $\vec{v}+\vec{u}$

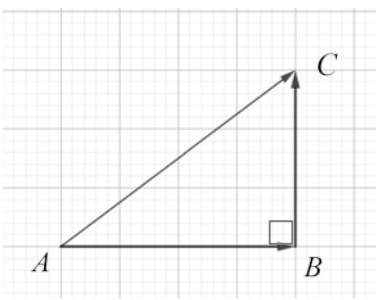
5. จากผลที่ได้ในข้อ 2, 3 และ 4 ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อให้ได้ข้อสรุปว่า เมื่อ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ
   - ผลบวกของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ หาได้จากการเขียน $\vec{v}$ โดยให้จุดเริ่มต้นของ $\vec{v}$ อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{u}$ ซึ่งเวกเตอร์ที่เป็นผลบวกของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\vec{u}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{v}$
   - $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

หมายเหตุ

- จากการทำกิจกรรมข้างต้น ครูอาจเชื่อมโยงความรู้เรื่องการบวกเวกเตอร์ที่ได้กับสมบัติอื่น ๆ เกี่ยวกับการบวกของเวกเตอร์ เช่น $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$, $\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ และ $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ในการพิจารณาเกี่ยวกับการขนานกันของเวกเตอร์ การเท่ากันของเวกเตอร์ และนิเสธของเวกเตอร์ ครูควรสนับสนุนนักเรียนให้อธิบายเหตุผลประกอบ ดังแสดงในตัวอย่างที่ 2 ที่ใช้ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิตเกี่ยวกับสมบัติของรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า บทนิยามของการขนานกันของเวกเตอร์ การเท่ากันของเวกเตอร์ และนิเสธของเวกเตอร์
- นักเรียนสามารถเขียนแสดงนิเสธของเวกเตอร์ได้หลายแบบ โดยให้เป็นไปตามบทนิยามของนิเสธของเวกเตอร์ เช่น นิเสธของ $\overrightarrow{AB}$ อาจเขียนแทนด้วย $-\overrightarrow{AB}$ หรือ $\overrightarrow{BA}$
- ครูอาจยกตัวอย่างต่อไปนี้ประกอบการอธิบายว่า $|\vec{u}+\vec{v}|\neq|\vec{u}|+|\vec{v}|$



จากรูป สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก ด้าน AB ยาว 4 หน่วย ด้าน BC ยาว 3 หน่วย และด้าน AC ยาว 5 หน่วย

จะเห็นว่า $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

นั่นคือ $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right| = 5$ แต่ $\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right| = 4+3 = 7$

ดังนั้น $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right| \neq \left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|$ นั่นคือ ถ้าให้ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ และ $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ จะได้ $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| \neq \left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|$

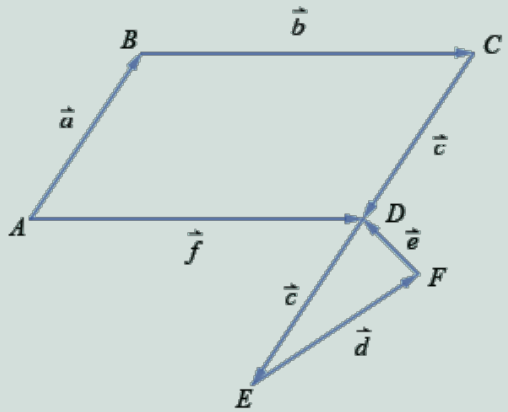
หมายเหตุ ในกรณีที่ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีทิศทางเดียวกัน จะได้ $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|$

- การคูณเวกเตอร์มี 3 แบบ ได้แก่ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์ ทั้งนี้ การเขียนแสดงการคูณของจำนวนจริง ไม่สามารถนำมาใช้กับการเขียนแสดงการคูณของเวกเตอร์ได้

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

- ในแบบฝึกหัด 3.1 ข ข้อ 1

  จากรูป จงเขียน $\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AE}$ และ $\overrightarrow{EA}$ ในรูปของ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ และ $\vec{f}$



ในแบบฝึกหัดนี้ การเขียนเวกเตอร์ให้อยู่ในรูปเวกเตอร์ที่กำหนดให้สามารถเขียนได้หลายแบบ เช่น สามารถเขียน $\overrightarrow{CA}$ ได้เป็น

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{c}-\vec{f} \quad \text{หรือ} \quad \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=-\vec{b}-\vec{a}$$

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

นักเรียนมักเข้าใจผิดว่า $\bar{0}$ เป็นสิ่งเดียวกับ 0 ซึ่งครูต้องเน้นย้ำว่า $\bar{0}$ และ 0 แตกต่างกัน โดย $\bar{0}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์ มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน และโดยทั่วไปจะไม่กล่าวถึงทิศทางของเวกเตอร์ แต่ 0 เป็นปริมาณสเกลาร์ซึ่งมีขนาดเป็น 0 และไม่มีทิศทาง

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

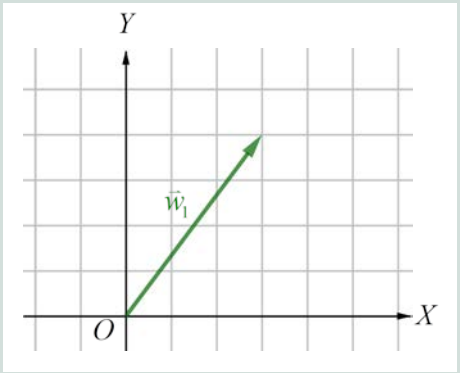
กิจกรรม : เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ

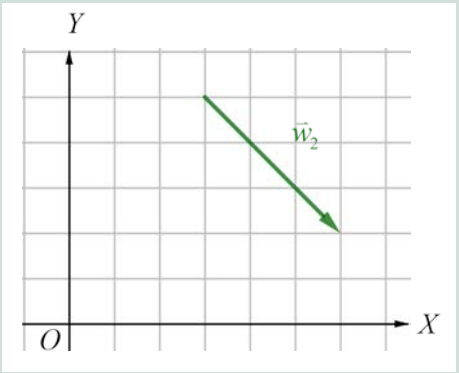
จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

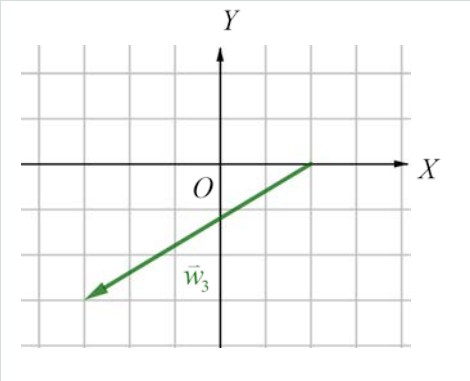
กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่องเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ

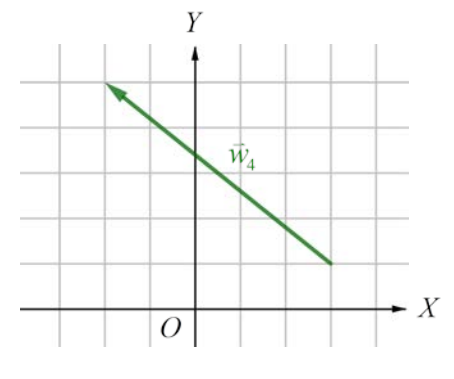
แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 – 4 คน แบบคละความสามารถ จากนั้นครูกำหนดเวกเตอร์ $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ และ $\vec{w}_4$ ดังรูป









2. จากเวกเตอร์ที่กำหนดให้ในข้อ 1 ครูให้นักเรียนแต่ละคนในกลุ่มพิจารณาว่า ถ้าเขียนแทน $\vec{w}_1$ ด้วย $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ และเขียนแทน $\vec{w}_2$ ด้วย $\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}$ แล้วนักเรียนจะเขียนแทน $\vec{w}_3$ และ $\vec{w}_4$ ได้อย่างไร

แนวคำตอบ

เขียนแทน $\vec{w}_3$ ด้วย $\begin{bmatrix}-5\\-3\end{bmatrix}$ และเขียนแทน $\vec{w}_4$ ด้วย $\begin{bmatrix}-5\\4\end{bmatrix}$

3. ครูให้นักเรียนแต่ละคนอภิปรายภายในกลุ่มเกี่ยวกับคำตอบข้อ 2 ของตนเอง
4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อให้นักเรียนได้ข้อสังเกตว่า เวกเตอร์ $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด และจุดสิ้นสุดที่ (a, b) หรือมีจุดเริ่มต้นที่ (x, y) และจุดสิ้นสุดที่ $(x+a, y+b)$

หมายเหตุ

- ครูอาจเชื่อมโยงกิจกรรมนี้ไปสู่การเขียนแสดงเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ เมื่อทราบจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์

กิจกรรม : เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อเสริมประสบการณ์ให้แก่นักเรียนในการหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ที่กำหนด

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 – 4 คน แบบคละความสามารถ จากนั้นครูกำหนดให้ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์
2. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันหาขนาดของ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

   แนวคำตอบ ขนาดของ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือ $\sqrt{a^2+b^2}$
3. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันหาสเกลาร์ m ที่ทำให้ $m\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

   แนวคำตอบ

   สเกลาร์ m ที่ทำให้ $m\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือ $m = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$
4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

   แนวคำตอบ

   เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

5. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มแสดงการหาเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ตามวิธีการข้อ 2 – 4

แนวคำตอบ

- ขนาดของ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ คือ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
- สเกลาร์ m ที่ทำให้ $m\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ คือ $m = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
- เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

6. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

แนวคำตอบ

- เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือ $-\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
- เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ คือ $-\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

7. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อให้ได้ข้อสรุปว่าสำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$ คือ $-\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- การสอนเรื่องขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ ครูควรเชื่อมโยงกับการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดฉากสองมิติซึ่งนักเรียนได้เรียนมาแล้วในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ ซึ่งนักเรียนได้เรียนมาแล้วในทฤษฎีบท 1

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

- นักเรียนบางคนอาจเข้าใจผิดว่า $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ $(0, 0)$ และจุดสิ้นสุดที่ (a, b) เท่านั้น ทั้งนี้ ครูควรเน้นย้ำกับนักเรียนว่า $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ไม่จำเป็นต้องมีจุดเริ่มต้นที่ $(0, 0)$ และจุดสิ้นสุดที่ (a, b) แต่ควรให้นักเรียนเข้าใจว่า $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือ เวกเตอร์ที่เป็นผลบวกของสองเวกเตอร์ โดยเวกเตอร์แรกมีขนาด $|a|$ หน่วย ซึ่งถ้า $a > 0$ แล้วเวกเตอร์นี้จะมีทิศทางไปตามแนวแกน X ทางบวก และถ้า $a < 0$ แล้วเวกเตอร์นี้จะมีทิศทางไปตามแนวแกน X ทางลบ และเวกเตอร์ที่สองจะมีขนาด $|b|$ หน่วย ซึ่งถ้า $b > 0$ แล้วเวกเตอร์นี้จะมีทิศทางไปตามแนวแกน Y ทางบวก และถ้า $b < 0$ แล้วเวกเตอร์นี้จะมีทิศทางไปตามแนวแกน Y ทางลบ

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

การพิสูจน์สมบัติต่าง ๆ ในแบบฝึกหัด 3.3ก ข้อ 5 สำหรับกรณีเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ สามารถทำได้ทำนองเดียวกับกรณีเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ ทั้งนี้ คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 นี้ จะนำเสนอการพิสูจน์สำหรับเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติไว้ในความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู

ผลคูณเชิงสเกลาร์

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ครูควรเน้นย้ำนักเรียนให้เห็นว่าบทนิยามของผลคูณเชิงสเกลาร์เป็นการนิยามการคูณระหว่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์
- การพิจารณามุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะกรณีที่เวกเตอร์ทั้งสองอยู่ในระบบพิกัดฉาก โดยจะพิจารณาให้เวกเตอร์ทั้งสองมีจุดเริ่มต้นเดียวกันที่ $(0, 0)$
- การตรวจสอบว่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ (ดังตัวอย่างที่ 28) จะต้องตรวจสอบว่ามีเวกเตอร์เพียงคู่เดียวที่มีผลคูณเชิงสเกลาร์เป็น 0 (ในแบบฝึกหัดอาจจะมีประเด็นในทำนองเดียวกันนี้อีก)

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

นักเรียนมักสับสนเกี่ยวกับการตั้งฉากกันของเวกเตอร์กับการตั้งฉากกันของเส้นตรงสองเส้นใด ๆ ทำให้เข้าใจผิดว่า $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-1$ ในที่นี้ครูต้องเน้นย้ำว่า $\vec{u}\cdot\vec{v}$ เป็นการคูณระหว่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์ ไม่ใช่ความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกัน ทั้งนี้ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ผลคูณเชิงเวกเตอร์ เป็นการคูณระหว่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์อีกแบบหนึ่งที่มีผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ทั้งสอง โดยผลคูณเชิงเวกเตอร์จะนิยามเฉพาะในระบบพิกัดฉากสามมิติเท่านั้น
- การสอนเกี่ยวกับผลคูณเชิงเวกเตอร์ตามบทนิยาม 11 และทฤษฎีบท 6 นั้น ครูอาจให้นักเรียนพิจารณาข้อความต่อไปนี้เพิ่มเติม

  ให้ $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

  1) ข้อความ “ถ้า $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{u}\times\vec{w}$ แล้ว $\vec{v}=\vec{w}$” เป็นจริงหรือไม่

  2) $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$, $(\vec{u}\cdot\vec{v})\times\vec{w}$ และ $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$ สามารถหาได้หรือไม่ ถ้าหาได้ แล้วผลคูณที่ได้เป็นเวกเตอร์หรือสเกลาร์

  การพิจารณาข้อความข้างต้น ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนช่วยกันทำเป็นกลุ่ม พร้อมให้เหตุผลประกอบคำตอบ เช่น

  1) ข้อความ “ถ้า $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{u}\times\vec{w}$ แล้ว $\vec{v}=\vec{w}$” ไม่เป็นจริง

  ตัวอย่าง 1 เมื่อ $\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ และ $\vec{w}=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$

  จะเห็นว่า $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{k}$

  และ $\vec{u}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&0\\2&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&0\\2&0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{k}$

  นั่นคือ $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{u}\times\vec{w}$ แต่ $\vec{v}\neq\vec{w}$

ตัวอย่าง 2 เมื่อ $\vec{u}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ และ $\vec{w}=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{0}$

และ $\vec{u}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&0\\2&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0&0\\2&0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{0}$

นั่นคือ $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{u}\times\vec{w}$ แต่ $\vec{v}\neq\vec{w}$

2) $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$ สามารถหาได้ เนื่องจาก $\vec{u}\times\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์
ดังนั้น $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$ สามารถหาได้ โดยผลคูณที่ได้เป็นเวกเตอร์
$(\vec{u}\cdot\vec{v})\times\vec{w}$ ไม่สามารถหาได้ เนื่องจาก $\vec{u}\cdot\vec{v}$ เป็นสเกลาร์ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์
ดังนั้น $(\vec{u}\cdot\vec{v})\times\vec{w}$ ไม่สามารถหาได้
$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$ สามารถหาได้ เนื่องจาก $\vec{u}\times\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์
ดังนั้น $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$ สามารถหาได้ โดยผลคูณที่ได้เป็นสเกลาร์

- การหาขนาดของผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ในกรณีที่ทราบ $\vec{u},\vec{v}$ และขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ สามารถหาได้โดยไม่จำเป็นต้องหา $\vec{u}\times\vec{v}$ โดยใช้ทฤษฎีบท 5
- จากทฤษฎีบท 5 ในกรณีที่ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ตั้งฉากกัน $(\theta=90^\circ)$ จะได้ว่า $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|$

3.3 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน

การวัดผลระหว่างเรียนมีจุดมุ่งหมายเพื่อปรับปรุงการเรียนรู้และพัฒนาการเรียนการสอน และตรวจสอบนักเรียนแต่ละคนว่ามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่ครูสอนมากน้อยเพียงใด การให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเป็นแนวทางหนึ่งที่ครูอาจใช้เพื่อประเมินผลด้านความรู้ระหว่างเรียนของนักเรียน ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดที่ครอบคลุมเนื้อหาที่สำคัญของแต่ละบทไว้ สำหรับในบทที่ 3 เวกเตอร์ ครูอาจใช้แบบฝึกหัดเพื่อวัดผลประเมินผลความรู้ในแต่ละเนื้อหาได้ดังนี้

เนื้อหา	แบบฝึกหัด	
เวกเตอร์และสมบัติของเวกเตอร์	3.1ก	ข้อ 1 – 5
การบวกและการลบเวกเตอร์	3.1ข	ข้อ 1 – 2
การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	3.1ค	ข้อ 1 – 6
ระบบพิกัดฉากสามมิติ	3.2	ข้อ 1 – 6
เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ และเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ	3.3ก	ข้อ 1 – 7
ขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ	3.3ข	ข้อ 1 – 4
ผลคูณเชิงสเกลาร์	3.4	ข้อ 1 – 14
ผลคูณเชิงเวกเตอร์	3.5	ข้อ 1 – 7
การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม และปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน	3.5	ข้อ 8 – 10

3.4 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 มีจุดมุ่งหมายว่าเมื่อนักเรียนได้เรียนจบบทที่ 3 เวกเตอร์ แล้วนักเรียนสามารถ

1. เข้าใจความหมายของเวกเตอร์
2. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
3. หาผลคูณเชิงสเกลาร์
4. หาผลคูณเชิงเวกเตอร์
5. นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ไปใช้ในการแก้ปัญหา

ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดท้ายบทเพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียน โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมาย ซึ่งประกอบด้วยโจทย์ฝึกทักษะที่มีความน่าสนใจและโจทย์ท้าทาย ครูอาจเลือกใช้แบบฝึกหัดท้ายบทวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบทเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนมีความสามารถตามจุดมุ่งหมายเมื่อเรียนจบบทเรียนหรือไม่

ทั้งนี้ แบบฝึกหัดท้ายบทแต่ละข้อในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 บทที่ 3 เวกเตอร์ สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียน ดังนี้

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
1. เข้าใจความหมายของเวกเตอร์	1	1) – 3)
	2	
	12	2)*, 4)*
	16	
	17	
	18*	
	19*	
	20	
	21*	1) – 2)
	22	1) – 3)*

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
	23	1) – 3)
	27*	
2. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	3	1) – 6)
	4	
	5	1) – 3)
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
	12	1), 2)*, 3), 4)*
	13	
	14	
	15	
	18*	
	19*	
	21*	1) – 2)
	22	3)*
	26*	
3. หาผลคูณเชิงสเกลาร์	24	1) – 4)
	25	1) – 4)
	26*	
	27*	

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
	28	
	29	
	30	
	31	
	32	
4. หาผลคูณเชิงเวกเตอร์	34	1) – 8)
	35	
	36	
	37	
5. นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ไปใช้ในการแก้ปัญหา	11	1) – 3)
	38	
	39	
	40	
	41	
	42	
โจทย์ท้าทาย	33	

หมายเหตุ

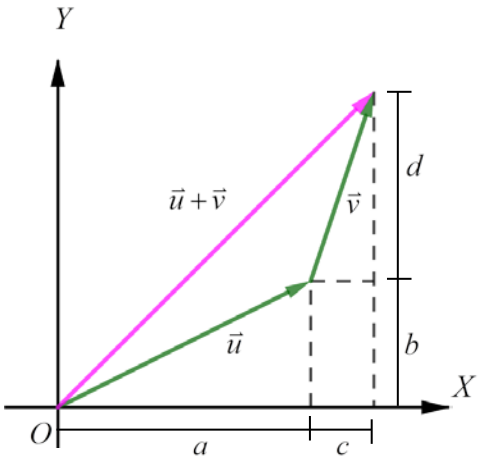
แบบฝึกหัดท้ายบทข้อ 12. 2), 12. 4), 18, 19, 21, 22. 3), 26 และ 27 สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียนมากกว่า 1 จุดมุ่งหมาย

3.5 ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู

- แนวคิดในการหาผลบวกของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ เป็นดังนี้

  ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ และ $d \geq 0$

  $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ ดังรูป



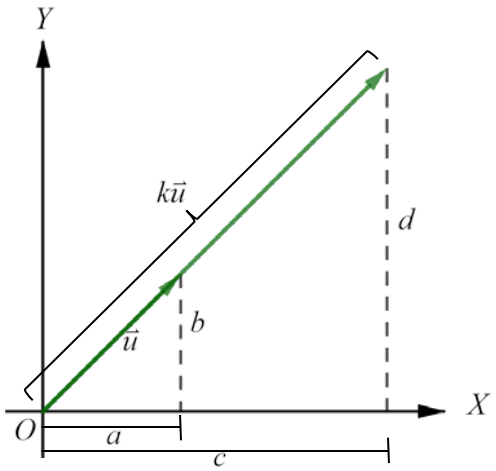
จากรูป จะได้ $\bar{u} + \bar{v} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$

- แนวคิดในการหาผลคูณของเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ เป็นดังนี้

ให้ a, b และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $a \geq 0, b \geq 0$ และ $k > 1$

$\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และ $k\bar{u} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ ดังรูป



พิจารณารูปโดยใช้รูปสามเหลี่ยมคล้าย จะได้ $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = \frac{|k\bar{u}|}{|\bar{u}|} = k$

ดังนั้น $c = ka$ และ $d = kb$

จะได้ $k\bar{u} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka \\ kb \end{bmatrix}$

นั่นคือ $k\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka \\ kb \end{bmatrix}$

(ในกรณีที่ $k \leq 1$ สามารถใช้แนวคิดของรูปสามเหลี่ยมคล้ายข้างต้น แสดงได้ในทำนองเดียวกัน)

- ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเรื่องเวกเตอร์ ที่ไม่ได้แสดงการพิสูจน์ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 บทที่ 3 เวกเตอร์ แสดงการพิสูจน์ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2

ให้ $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสองมิติหรือสามมิติ และ a เป็นสเกลาร์ จะได้ว่า

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{v})+(\vec{u}\cdot\vec{w})$ และ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})+(\vec{v}\cdot\vec{w})$
3) $a(\vec{u}\cdot\vec{v})=(a\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(a\vec{v})$
4) $\vec{0}\cdot\vec{u}=0$
5) $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$
6) $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$ และ $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$

พิสูจน์

2) ให้ $\vec{u}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$, $\vec{v}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$ และ $\vec{w}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ จะได้

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) &= \vec{u}\cdot\left[(b_1\vec{i}+b_2\vec{j})+(c_1\vec{i}+c_2\vec{j})\right]\\ &= \vec{u}\cdot\left[(b_1+c_1)\vec{i}+(b_2+c_2)\vec{j}\right]\\ &= a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)\\ &= (a_1b_1+a_1c_1)+(a_2b_2+a_2c_2)\\ &= (a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)\\ &= (\vec{u}\cdot\vec{v})+(\vec{u}\cdot\vec{w})\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{v})+(\vec{u}\cdot\vec{w})$

และ

$$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} &= \left[(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})+(b_1\vec{i}+b_2\vec{j})\right]\cdot\vec{w}\\ &= \left[(a_1+b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{j}\right]\cdot\vec{w}\\ &= (a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2\\ &= (a_1c_1+b_1c_1)+(a_2c_2+b_2c_2)\\ &= (a_1c_1+a_2c_2)+(b_1c_1+b_2c_2)\\ &= (\vec{u}\cdot\vec{w})+(\vec{v}\cdot\vec{w})\end{aligned}$$

ดังนั้น $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})+(\vec{v}\cdot\vec{w})$

หมายเหตุ กรณีที่ $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

3) ให้ $\vec{u}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ และ $\vec{v}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ และ a เป็นสเกลาร์ใด ๆ

จะได้
$$\begin{aligned} a\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v}) &= a\cdot\left[\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}\right)\cdot\left(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}\right)\right] \\ &= a\left(a_1b_1+a_2b_2\right) \\ &= aa_1b_1+aa_2b_2 \\ &= \left(aa_1\right)b_1+\left(aa_2\right)b_2 \\ &= \left[\left(aa_1\right)\vec{i}+\left(aa_2\right)\vec{j}\right]\cdot\left(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}\right) \\ &= \left(a\vec{u}\right)\cdot\vec{v} \end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned} a\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v}) &= a\cdot\left[\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}\right)\cdot\left(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}\right)\right] \\ &= a\left(a_1b_1+a_2b_2\right) \\ &= aa_1b_1+aa_2b_2 \\ &= a_1\left(ab_1\right)+a_2\left(ab_2\right) \\ &= \left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}\right)\cdot\left[\left(ab_1\right)\vec{i}+\left(ab_2\right)\vec{j}\right] \\ &= \vec{u}\cdot\left(a\vec{v}\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น $a\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)=\left(a\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\left(a\vec{v}\right)$

หมายเหตุ กรณีที่ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

4) ให้ $\vec{u}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ

จะได้
$$\begin{aligned} \vec{0}\cdot\vec{u} &= \left(0\vec{i}+0\vec{j}\right)\cdot\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}\right) \\ &= (0)a+(0)b \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{0}\cdot\vec{u}=0$

หมายเหตุ กรณีที่ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

6) ให้ $\vec{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \vec{j}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ และ $\vec{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

จะได้ $\vec{i}\cdot\vec{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=(1)(1)+(0)(0)+(0)(0)=1$

$\vec{j}\cdot\vec{j}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=(0)(0)+(1)(1)+(0)(0)=1$

$\vec{k}\cdot\vec{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=(0)(0)+(0)(0)+(1)(1)=1$

ดังนั้น $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$

และ $\vec{i}\cdot\vec{j}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=(1)(0)+(0)(1)+(0)(0)=0$

$\vec{i}\cdot\vec{k}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=(1)(0)+(0)(0)+(0)(1)=0$

$\vec{j}\cdot\vec{k}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=(0)(0)+(1)(0)+(0)(1)=0$

ดังนั้น $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$

ทฤษฎีบท 6

กำหนด $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ และ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1) $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$

2) $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w} = (\vec{u}\times\vec{w})+(\vec{v}\times\vec{w})$

3) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})$

4) $\vec{u}\times(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}\times\vec{v})$

5) $(\alpha\vec{u})\times\vec{v} = \alpha(\vec{u}\times\vec{v})$

6) $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}$

พิสูจน์

2) ให้ $\vec{u}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$ และ $\vec{w}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

จะได้ $$\vec{u}+\vec{v} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{bmatrix}$$

นั่นคือ $$(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w} = \begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

$$= \left[(a_2+b_2)c_3-(a_3+b_3)c_2\right]\vec{i}-\left[(a_1+b_1)c_3-(a_3+b_3)c_1\right]\vec{j}$$
$$+\left[(a_1+b_1)c_2-(a_2+b_2)c_1\right]\vec{k}$$

$$= a_2c_3\vec{i}+b_2c_3\vec{i}-a_3c_2\vec{i}-b_3c_2\vec{i}-a_1c_3\vec{j}-b_1c_3\vec{j}+a_3c_1\vec{j}+b_3c_1\vec{j}$$
$$+a_1c_2\vec{k}+b_1c_2\vec{k}-a_2c_1\vec{k}-b_2c_1\vec{k}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(a_2c_3\vec{i} - a_3c_2\vec{i} - a_1c_3\vec{j} + a_3c_1\vec{j} + a_1c_2\vec{k} - a_2c_1\vec{k}\right) \\
&\quad + \left(b_2c_3\vec{i} - b_3c_2\vec{i} - b_1c_3\vec{j} + b_3c_1\vec{j} + b_1c_2\vec{k} - b_2c_1\vec{k}\right) \\
&= \left[\left(a_2c_3 - a_3c_2\right)\vec{i} - \left(a_1c_3 - a_3c_1\right)\vec{j} + \left(a_1c_2 - a_2c_1\right)\vec{k}\right] \\
&\quad + \left[\left(b_2c_3 - b_3c_2\right)\vec{i} - \left(b_1c_3\vec{j} - b_3c_1\right)\vec{j} + \left(b_1c_2 - b_2c_1\right)\vec{k}\right] \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= \left(\vec{u} \times \vec{w}\right) + \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \times \vec{w} = \left(\vec{u} \times \vec{w}\right) + \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)$

3) ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{w} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

จะได้ $\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $\vec{u} \times \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} \\
&= \left[a_2\left(b_3 + c_3\right) - a_3\left(b_2 + c_2\right)\right]\vec{i} - \left[a_1\left(b_3 + c_3\right) - a_3\left(b_1 + c_1\right)\right]\vec{j} \\
&\quad + \left[a_1\left(b_2 + c_2\right) - a_2\left(b_1 + c_1\right)\right]\vec{k} \\
&= a_2b_3\vec{i} + a_2c_3\vec{i} - a_3b_2\vec{i} - a_3c_2\vec{i} - a_1b_3\vec{j} - a_1c_3\vec{j} + a_3b_1\vec{j} + a_3c_1\vec{j} \\
&\quad + a_1b_2\vec{k} + a_1c_2\vec{k} - a_2b_1\vec{k} - a_2c_1\vec{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(a_2b_3\vec{i} - a_3b_2\vec{i} - a_1b_3\vec{j} + a_3b_1\vec{j} + a_1b_2\vec{k} - a_2b_1\vec{k}\right) \\
&\quad + \left(a_2c_3\vec{i} - a_3c_2\vec{i} - a_1c_3\vec{j} + a_3c_1\vec{j} + a_1c_2\vec{k} - a_2c_1\vec{k}\right) \\
&= \left[\left(a_2b_3 - a_3b_2\right)\vec{i} - \left(a_1b_3 - a_3b_1\right)\vec{j} + \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)\vec{k}\right] \\
&\quad + \left[\left(a_2c_3 - a_3c_2\right)\vec{i} - \left(a_1c_3 - a_3c_1\right)\vec{j} + \left(a_1c_2 - a_2c_1\right)\vec{k}\right] \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= \left(\vec{u}\times\vec{v}\right) + \left(\vec{u}\times\vec{w}\right)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\vec{u}\times\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \left(\vec{u}\times\vec{v}\right) + \left(\vec{u}\times\vec{w}\right)$

4) ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ และ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จะได้ $\alpha\vec{v} = \alpha\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \alpha b_1 \\ \alpha b_2 \\ \alpha b_3 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $\vec{u}\times\left(\alpha\vec{v}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha b_1 \\ \alpha b_2 \\ \alpha b_3 \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha b_1 & \alpha b_2 & \alpha b_3 \end{vmatrix} \\
&= \left[a_2\left(\alpha b_3\right) - a_3\left(\alpha b_2\right)\right]\vec{i} - \left[a_1\left(\alpha b_3\right) - a_3\left(\alpha b_1\right)\right]\vec{j} \\
&\quad + \left[\left(a_1\left(\alpha b_2\right) - a_2\left(\alpha b_1\right)\right)\right]\vec{k} \\
&= \alpha\left[\left(a_2b_3 - a_3b_2\right)\vec{i} - \left(a_1b_3 - a_3b_1\right)\vec{j} + \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)\vec{k}\right]
\end{aligned}
$$

$$= \alpha\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha(\vec{u}\times\vec{v})$$

ดังนั้น $\vec{u}\times(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}\times\vec{v})$

6) ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

จะได้ $\vec{u}\times\vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2a_3 - a_2a_3)\vec{i} - (a_1a_3 - a_1a_3)\vec{j} + (a_1a_2 - a_1a_2)\vec{k}$$

$$= 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$= \vec{0}$$

ดังนั้น $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}$

- จากทฤษฎีบท 3 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ในระบบพิกัดฉากสองมิติหรือสามมิติ และ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ซึ่ง $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ (มุมระหว่างเวกเตอร์ หมายถึง มุมที่ไม่ใช่มุมกลับ ซึ่งมีแขนของมุมเป็นรังสีที่ขนานและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ทั้งสอง) จะได้ว่า

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

ดังนั้น ถ้า θ เป็นมุมแหลม จะได้ว่า $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$

ถ้า θ เป็นมุมฉาก จะได้ว่า $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

ถ้า θ เป็นมุมป้าน จะได้ว่า $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$

นอกจากนี้ เมื่อ $\theta = 0^\circ$ จะได้ว่า $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos 0^\circ = |\vec{u}||\vec{v}|$

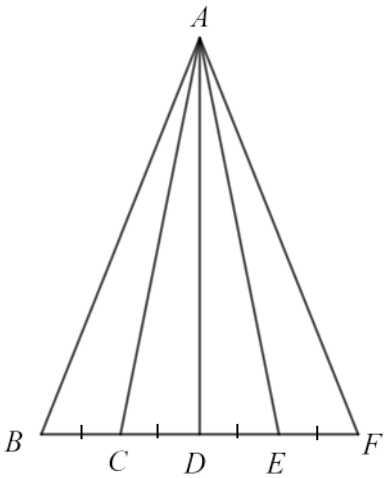
และเมื่อ $\theta = 180^\circ$ จะได้ว่า $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos 180^\circ = -|\vec{u}||\vec{v}|$

3.6 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทและเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

ในส่วนนี้จะนำเสนอตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทที่ 3 เวกเตอร์ สำหรับรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ซึ่งครูสามารถเลือกนำไปใช้ได้ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดผลประเมินผล

ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. กำหนดรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABF ดังรูป ให้ $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF}$, $\vec{u} = \overline{AB}$ และ $\vec{v} = \overline{AF}$ จงเขียน $\overline{BC}$, $\overline{AE}$ และ $\overline{DA}$ ในรูปของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$



2. นักวิทยาศาสตร์สร้างระบบจำลองเหตุการณ์หยดน้ำกระทบบนผิวโลหะชนิดพิเศษ โดยแสดงผลความเร็วของน้ำ ณ แต่ละตำแหน่งในรูปเวกเตอร์ ดังนี้

ตำแหน่ง	ความเร็วของน้ำ ณ ตำแหน่งนั้น
A	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
B	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
C	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
D	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
E	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
F	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
G	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
H	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

จงเขียนเวกเตอร์แสดงความเร็วของน้ำ ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ลงในแกนพิกัดฉากเดียวกัน

3. กำหนด $\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}=x\left(\vec{i}+\vec{j}\right)+y\left(\vec{j}-\vec{i}\right)+z\left(2\vec{k}-\vec{j}\right)$ จงหา $x+y+z$

4. ให้ $\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์
จงหาเวกเตอร์ $\vec{a}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $|\vec{a}|\left(\vec{a}+|\vec{a}|\vec{a}\right)=6\vec{a}$

5. ให้ $\vec{a},\vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ โดยที่ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$
จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ
   1) เวกเตอร์ที่เกิดจากการบวกกันของสองเวกเตอร์ใด ๆ มีทิศทางตรงกันข้ามกับอีกเวกเตอร์หนึ่งเสมอ
   2) มุมระหว่าง $\vec{c}$ และ $\vec{a}$ มีขนาดเท่ากับมุมระหว่าง $\vec{c}$ และ $\vec{b}$ เสมอ

6. ให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ
$\vec{u}$ เป็นภาพฉายของ $\overrightarrow{OP}$ บนระนาบ XY
$\vec{v}$ เป็นภาพฉายของ $\overrightarrow{OP}$ บนระนาบ YZ
และ $\vec{w}$ เป็นภาพฉายของ $\overrightarrow{OP}$ บนระนาบ XZ
จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ
   1) ถ้า $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ แล้ว $y=0$
   2) $|\vec{v}+\vec{w}|\geq|\overrightarrow{OP}|$

7. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ซึ่ง $\vec{u}$ มีขนาด 7 หน่วย $\vec{v}$ มีขนาด 11 หน่วย ถ้าขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็น 60 องศา แล้วจงหาขนาดของ $\vec{u}+\vec{v}$

8. จงหาเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติที่มีขนาด 7 หน่วย และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

9. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ตั้งฉากกัน จงแสดงว่า $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}-\vec{v}|$

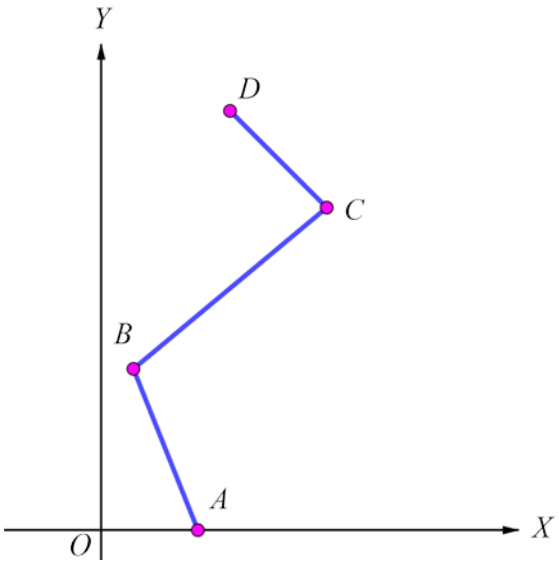
10. ให้ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน โดยที่ $|\vec{u}|=1,|\vec{v}|=2$ และ $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ จงหาขนาดของ $\vec{w}$

11. ให้ $\vec{u}=-\vec{i}+3\vec{j},\vec{v}=-2\vec{i}-5\vec{j}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์
ถ้า $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$ แล้ว จงหา $\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

12. กำหนดให้ $\vec{u}=\vec{i}+5\vec{j},\vec{v}=-2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ และ $\vec{w}=3\vec{i}-a\vec{j}+\vec{k}$ ถ้า $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$ แล้ว จงหา a

13. ให้ $\vec{u}=\vec{i}-\vec{k},\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ และ $\vec{w}=\vec{i}+\vec{j}$
จงพิจารณาว่าค่าของ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}),\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})$ และ $\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$ มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

14. นักเดินป่ากลุ่มหนึ่งเดินทางเข้าไปในป่าลึกลับ และได้ตั้งกล้องถ่ายรูปที่จุด A โดยหันกล้องถ่ายรูปไปในแนวตั้งฉากกับแกน X ตามแนวเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ แล้วถ่ายรูปสิ่งมีชีวิตลึกลับได้ สิ่งมีชีวิตนั้นวิ่งผ่านหน้ากล้องจากจุด A ไปยังจุด B, C และ D ตามลำดับ ซึ่งกล้องเก็บข้อมูลเชิงเวกเตอร์ได้ว่า $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}$ และ $\overrightarrow{CD}=\begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix}$ ถ้าต้องการถ่ายภาพสิ่งมีชีวิตดังกล่าวซึ่งหยุดนิ่งที่จุด D แล้วจะต้องหมุนกล้องถ่ายรูปจากตำแหน่งเดิมไปเท่าใด



เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

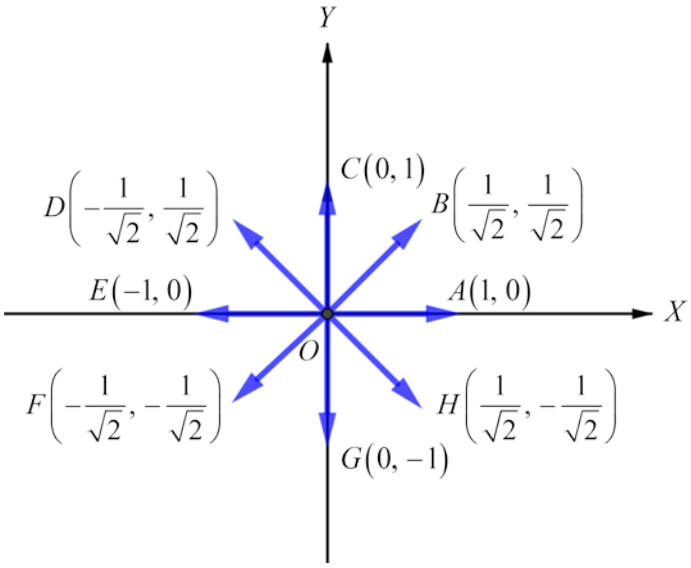
1. เนื่องจาก $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ และ $\overrightarrow{AF}=\vec{v}$

จะได้ $$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}\\ &= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(-\vec{u}+\vec{v}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\vec{u}+\frac{1}{4}\vec{v}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE} \\
&= \overrightarrow{AF}+\frac{1}{4}\overrightarrow{FB} \\
&= \overrightarrow{AF}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}\right) \\
&= \overrightarrow{AF}+\frac{1}{4}\left(-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}\right) \\
&= \vec{v}+\frac{1}{4}\left(-\vec{v}+\vec{u}\right) \\
&= \vec{v}-\frac{1}{4}\vec{v}+\frac{1}{4}\vec{u} \\
&= \frac{1}{4}\vec{u}+\frac{3}{4}\vec{v} \\
\overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{FB}-\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}\right)-\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}\right)-\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\vec{v}+\vec{u}\right)-\vec{u} \\
&= -\frac{1}{2}\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{u} \\
&= -\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}
\end{aligned}
$$

2. **ตัวอย่างคำตอบ**

เขียนเวกเตอร์แสดงความเร็วของน้ำ ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ลงในแกนพิกัดฉากเดียวกันได้ดังนี้



หมายเหตุ

นักเรียนอาจเขียนแสดงความเร็วของน้ำ ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ลงในแกนพิกัดฉากเดียวกัน โดยแต่ละเวกเตอร์มีจุดเริ่มต้นที่แตกต่างกัน และไม่ใช่จุด $(0, 0)$ ได้

3. จาก $\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k} = x(\vec{i}+\vec{j})+y(\vec{j}-\vec{i})+z(2\vec{k}-\vec{j})$

$= (x\vec{i}+x\vec{j})+(y\vec{j}-y\vec{i})+(2z\vec{k}-z\vec{j})$

$= (x-y)\vec{i}+(x+y-z)\vec{j}+2z\vec{k}$

จะได้ $x-y=1,\ x+y-z=-4$ และ $2z=1$

นั่นคือ $x=-\frac{5}{4},\ y=-\frac{9}{4}$ และ $z=\frac{1}{2}$

ดังนั้น $x+y+z=-\frac{5}{4}+\left(-\frac{9}{4}\right)+\frac{1}{2}=-3$

4. จาก $|\vec{a}|(\vec{a}+|\vec{a}|\vec{a}) = 6\vec{a}$

จะได้ $\vec{a}(|\vec{a}|+|\vec{a}|^2) = 6\vec{a}$

$\vec{a}(|\vec{a}|+|\vec{a}|^2)-6\vec{a} = \vec{0}$

$\vec{a}(|\vec{a}|^2+|\vec{a}|-6) = \vec{0}$

เนื่องจาก $\vec{a}\neq\vec{0}$ จะได้ว่า $|\vec{a}|^2+|\vec{a}|-6 = 0$

$(|\vec{a}|+3)(|\vec{a}|-2) = 0$

นั่นคือ $|\vec{a}|=-3$ หรือ $|\vec{a}|=2$

เนื่องจาก $|\vec{a}|\geq 0$ จะได้ว่า $|\vec{a}|=2$

ดังนั้น $\vec{a}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $|\vec{a}|(\vec{a}+|\vec{a}|\vec{a})=6\vec{a}$ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาด 2 หน่วย

5. 1) จาก $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$

จะได้ $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$ หรือ $\vec{a}+\vec{c}=-\vec{b}$ หรือ $\vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}$

ดังนั้น ข้อความ “เวกเตอร์ที่เกิดจากการบวกกันของสองเวกเตอร์ใด ๆ มีทิศทางตรงกันข้ามกับอีกเวกเตอร์หนึ่งเสมอ” เป็นจริง

2) สมมติให้ $\vec{a}=-3\vec{c}$ และ $\vec{b}=2\vec{c}$

จะได้ว่า $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-3\vec{c}+2\vec{c}+\vec{c}=\vec{0}$

แต่มุมระหว่าง $\vec{c}$ และ $\vec{a}$ คือ 180 องศา และมุมระหว่าง $\vec{c}$ และ $\vec{b}$ คือ 0 องศา

ดังนั้น ข้อความ “มุมระหว่าง $\vec{c}$ และ $\vec{a}$ มีขนาดเท่ากับมุมระหว่าง $\vec{c}$ และ $\vec{b}$ เสมอ” เป็นเท็จ

6. เนื่องจาก $\vec{u}$ เป็นภาพฉายของ $\overrightarrow{OP}$ บนระนาบ XY จะได้ว่า $\vec{u}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$

เนื่องจาก $\vec{v}$ เป็นภาพฉายของ $\overrightarrow{OP}$ บนระนาบ YZ จะได้ว่า $\vec{v}=\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix}$

เนื่องจาก $\vec{w}$ เป็นภาพฉายของ $\overrightarrow{OP}$ บนระนาบ XZ จะได้ว่า $\vec{w}=\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$

1) ให้ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$

จะได้ $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$0\cdot x + y^2 + 0\cdot z = 0$$

$$y^2 = 0$$

$$y = 0$$

ดังนั้น ข้อความ “ถ้า $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ แล้ว $y=0$” เป็นจริง

2) เนื่องจาก จุด P มีพิกัดเป็น (x, y, z)

จะได้ว่า $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

นั่นคือ $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

เนื่องจาก $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix}$ และ $\vec{w} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$

จะได้ $\vec{v}+\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} x \\ y \\ 2z \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $\left|\vec{v}+\vec{w}\right| = \sqrt{x^2+y^2+(2z)^2}$

$$= \sqrt{x^2+y^2+4z^2}$$

เนื่องจาก $\sqrt{x^2+y^2+4z^2} \geq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

จะได้ว่า $\left|\vec{v}+\vec{w}\right| \geq \left|\overrightarrow{OP}\right|$

ดังนั้น ข้อความ “$\left|\vec{v}+\vec{w}\right| \geq \left|\overrightarrow{OP}\right|$” เป็นจริง

7. เนื่องจาก
$$\begin{aligned}|\vec{u}+\vec{v}|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= |\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2\\ &= |\vec{u}|^2+2|\vec{u}||\vec{v}|\cos 60^\circ+|\vec{v}|^2\\ &= 7^2+2(7)(11)\left(\frac{1}{2}\right)+11^2\\ &= 49+77+121\\ &= 247\end{aligned}$$

จะได้ ขนาดของ $\vec{u}+\vec{v}$ คือ $\sqrt{247}$ หน่วย

8. จาก $\vec{u}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

ให้ $\vec{v}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ตั้งฉากกับ $\vec{u}$

จะได้
$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= 0\\ \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} &= 0\\ 3x+4y &= 0\\ y &= -\frac{3}{4}x\end{aligned}$$

นั่นคือ $\vec{v}=\begin{bmatrix}x\\-\frac{3}{4}x\end{bmatrix}$ ซึ่ง $|\vec{v}|=\sqrt{x^2+\left(-\frac{3}{4}x\right)^2}=\frac{5|x|}{4}$

เมื่อ $x\geq 0$ จะได้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ คือ $\frac{1}{\frac{5x}{4}}\begin{bmatrix}x\\-\frac{3}{4}x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{3}{5}\end{bmatrix}$

นั่นคือ เวกเตอร์ที่มีขนาด 7 หน่วย และมีทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ คือ $7\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{3}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{28}{5}\\-\frac{21}{5}\end{bmatrix}$

เมื่อ $x<0$ จะได้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ คือ $\frac{1}{\left(\frac{-5x}{4}\right)}\begin{bmatrix} x \\ -\frac{3}{4}x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

นั่นคือ เวกเตอร์ที่มีขนาด 7 หน่วย และมีทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ คือ $7\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{28}{5} \\ \frac{21}{5} \end{bmatrix}$

ดังนั้น เวกเตอร์ที่มีขนาด 7 หน่วย และตั้งฉากกับ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ คือ $\begin{bmatrix} \frac{28}{5} \\ -\frac{21}{5} \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} -\frac{28}{5} \\ \frac{21}{5} \end{bmatrix}$

9. จาก $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$
$= \vec{u}\cdot\vec{u}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}$
$= |\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2$
$= |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$ (เนื่องจาก $\vec{u}\perp\vec{v}$)

จะได้ $|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2}$

และ $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$
$= \vec{u}\cdot\vec{u}-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}$
$= |\vec{u}|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2$
$= |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$ (เนื่องจาก $\vec{u}\perp\vec{v}$)

จะได้ $|\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2}$

ดังนั้น $|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}-\vec{v}|$

10. จาก $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w} = \vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$

จะได้ $|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2}$

$|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|^2 = 1^2+2^2+3^2$

$(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}) = 1^2+2^2+3^2$

$\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{w}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+2\vec{u}\cdot\vec{w}+2\vec{v}\cdot\vec{w} = 1^2+2^2+3^2$

$\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{w} = 1^2+2^2+3^2$

$|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+|\vec{w}|^2 = 1^2+2^2+3^2$

$1^2+2^2+|\vec{w}|^2 = 1^2+2^2+3^2$

$$|\vec{w}|^2 = 3^2$$
$$|\vec{w}| = 3$$

ดังนั้น ขนาดของ $\vec{w}$ คือ 3 หน่วย

11. ให้ $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j}$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

จาก $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$

จะได้ $(-\vec{i} + 3\vec{j}) + (-2\vec{i} - 5\vec{j}) + (a\vec{i} + b\vec{j}) = 0\vec{i} + 0\vec{j}$

$$[-1 + (-2) + a]\vec{i} + [3 + (-5) + b]\vec{j} = 0\vec{i} + 0\vec{j}$$
$$(-3 + a)\vec{i} + (-2 + b)\vec{j} = 0\vec{i} + 0\vec{j}$$

นั่นคือ $-3 + a = 0$ และ $-2 + b = 0$

จะได้ $a = 3$ และ $b = 2$

ดังนั้น $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$

จะได้ $\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = (-\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (3\vec{i} + 2\vec{j}) + (-2\vec{i} - 5\vec{j}) \cdot (3\vec{i} + 2\vec{j})$

$$= (-3 + 6) + (-6 - 10)$$
$$= -13$$

12. จาก $\vec{u} = \vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{v} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ และ $\vec{w} = 3\vec{i} - a\vec{j} + \vec{k}$

จะได้ $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{i} + 5\vec{j}) \cdot (-2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k})$

$$= (1)(-2) + (5)(3) + (0)(-1)$$
$$= -2 + 15 + 0$$
$$= 13$$

และ $\vec{u} \cdot \vec{w} = (\vec{i} + 5\vec{j}) \cdot (3\vec{i} - a\vec{j} + \vec{k})$

$$= (1)(3) + (5)(-a) + (0)(1)$$
$$= 3 - 5a + 0$$
$$= 3 - 5a$$

เนื่องจาก $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$

จะได้ $13 = 3 - 5a$

$$a = -2$$

13. จาก $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ ที่กำหนดให้

จะได้ว่า

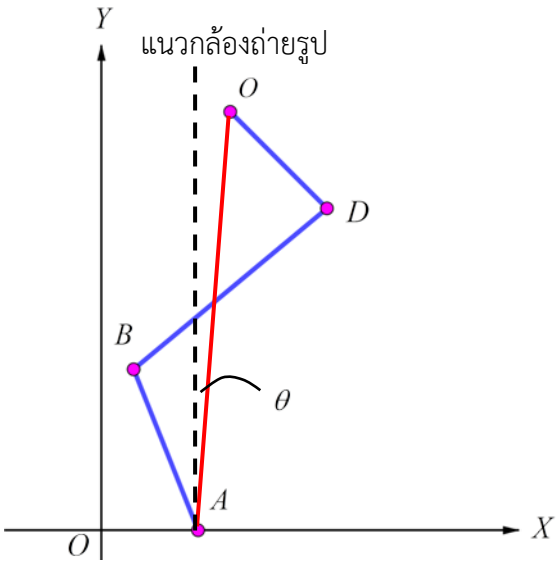
$$\begin{aligned}
\vec{v}\times\vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= -\vec{i} + \vec{j} \\
\vec{w}\times\vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\
\vec{u}\times\vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}
\end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) &= (\vec{i} - \vec{k})\cdot(-\vec{i} + \vec{j}) \\
&= -1 \\
\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u}) &= (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})\cdot(-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) \\
&= -1+1-1 \\
&= -1 \\
\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) &= (\vec{i} + \vec{j})(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) \\
&= 1-2 \\
&= -1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u}) = \vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = -1$

14.



จากรูปจะได้ว่า $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 13 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก ตั้งกล้องถ่ายรูปที่จุด A โดยหันกล้องถ่ายรูปไปในแนวตั้งฉากกับแกน X ตามแนว $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ให้ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\overrightarrow{AD}$ กับ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ซึ่ง $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$

จาก $\overrightarrow{AD} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left|\overrightarrow{AD}\right|\left(\sqrt{0^2+1^2}\right)\cos\theta$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1 \\ 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\sqrt{1^2+13^2}\right)\left(\sqrt{0^2+1^2}\right)\cos\theta$

$$13 = \sqrt{170} \cdot \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{13}{\sqrt{170}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{170}}\right)$$

ดังนั้น จะต้องหมุนกล้องจากตำแหน่งเดิมไป $\arccos\left(\frac{13}{\sqrt{170}}\right)$ องศา ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

เฉลยแบบฝึกหัดและวิธีทำโดยละเอียด

บทที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แบบฝึกหัด 1.1

1. 1) $\sin 8\pi = \sin\left(4(2\pi)\right)$
$= \sin(2\pi)$
$= 0$
$\cos 8\pi = \cos\left(4(2\pi)\right)$
$= \cos(2\pi)$
$= 1$
ดังนั้น $\sin 8\pi = 0$ และ $\cos 8\pi = 1$

2) **วิธีที่ 1** $\sin(-8\pi) = \sin\left(-4(2\pi)\right)$
$= 0$
$\cos(-8\pi) = \cos\left(-4(2\pi)\right)$
$= 1$

วิธีที่ 2 $\sin(-8\pi) = -\sin 8\pi$
$= -\sin\left(4(2\pi)\right)$
$= -\sin 2\pi$
$= 0$
$\cos(-8\pi) = \cos 8\pi$
$= \cos\left(4(2\pi)\right)$
$= \cos 2\pi$
$= 1$
ดังนั้น $\sin(-8\pi) = 0$ และ $\cos(-8\pi) = 1$

3) $\sin\frac{7\pi}{2} = \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{2}\right)$
$= \sin\left(2\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$$\sin\frac{7\pi}{2} = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\sin\frac{\pi}{2}$$
$$= -1$$
$$\cos\frac{7\pi}{2} = \cos\left(3\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \cos\left(2\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= \cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\cos\frac{\pi}{2}$$
$$= 0$$

ดังนั้น $\sin\frac{7\pi}{2}=-1$ และ $\cos\frac{7\pi}{2}=0$

4) **วิธีที่ 1** $\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left(-3\pi-\frac{\pi}{2}\right)$
$= 1$
$\cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = \cos\left(-3\pi-\frac{\pi}{2}\right)$
$= 0$

วิธีที่ 2 $\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = -\sin\frac{7\pi}{2}$
$= -(-1)$
$= 1$
$\cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = \cos\frac{7\pi}{2}$
$= 0$

ดังนั้น $\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right)=1$ และ $\cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right)=0$

5) $\sin 57\pi = \sin(56\pi+\pi) = \sin\pi = 0$
$\cos 57\pi = \cos(56\pi+\pi) = \cos\pi = -1$

ดังนั้น $\sin 57\pi = 0$ และ $\cos 57\pi = -1$

6) **วิธีที่ 1** $\sin(-57\pi) = \sin(-56\pi-\pi) = 0$

$\cos(-57\pi) = \cos(-56\pi-\pi) = -1$

วิธีที่ 2 $\sin(-57\pi) = -\sin 57\pi = 0$

$\cos(-57\pi) = \cos 57\pi = -1$

ดังนั้น $\sin(-57\pi)=0$ และ $\cos(-57\pi)=-1$

2. ตัวอย่างคำตอบ

1) $0, \pi, -\pi, 2\pi, 3\pi$

2) $0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, 6\pi$

3) $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}$

4) $\pi, 3\pi, 5\pi, -\pi, -3\pi$

5) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}$

6) $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}$

7) $\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$

8) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$

3. จตุภาคที่ 1 และจตุภาคที่ 2

4. จตุภาคที่ 2 และจตุภาคที่ 3

5. 1) $\sin\frac{5\pi}{3} = \sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}$

$\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$

2) $\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6}$

$\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6}$

3) $\sin\frac{9\pi}{5} = \sin\left(2\pi-\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\frac{\pi}{5}$

$\cos\frac{9\pi}{5} = \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5}$

4) $\sin\frac{7\pi}{10} = \sin\left(\pi-\frac{3\pi}{10}\right) = \sin\frac{3\pi}{10}$

$\cos\frac{7\pi}{10} = \cos\left(\pi-\frac{3\pi}{10}\right) = -\cos\frac{3\pi}{10}$

5) $\sin\left(-\frac{37\pi}{12}\right) = -\sin\frac{37\pi}{12}$

$= -\sin\left(2\pi+\frac{13\pi}{12}\right)$

$= -\sin\frac{13\pi}{12}$

$= -\sin\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)$

$= -\left(-\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{12}$

$\cos\left(-\frac{37\pi}{12}\right) = \cos\frac{37\pi}{12}$

$= \cos\left(2\pi+\frac{13\pi}{12}\right)$

$= \cos\frac{13\pi}{12}$

$= \cos\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)$

$= -\cos\frac{\pi}{12}$

6) $\sin\left(-\frac{16\pi}{7}\right) = -\sin\frac{16\pi}{7} = -\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{7}\right) = -\sin\frac{2\pi}{7}$

$\cos\left(-\frac{16\pi}{7}\right) = \cos\frac{16\pi}{7} = \cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{7}\right) = \cos\frac{2\pi}{7}$

6. 1) $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\frac{5\pi}{4}$

$= -\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$= -\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{4}$

$= \cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$= -\cos\frac{\pi}{4}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = -\sin\frac{7\pi}{4}$

$= -\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$= -\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\frac{7\pi}{4}$

$= \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$$= \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น $\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\sin\left(2\pi+\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4}$

$= \sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(2\pi+\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$

$= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$= -\cos\frac{\pi}{4}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น $\sin\left(2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\cos\left(2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

5) $\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= \sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$$= -\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

ดังนั้น $\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

6) $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\frac{7\pi}{6}$

$$= -\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\frac{7\pi}{6}$$

$$= \cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\cos\frac{\pi}{6}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ และ $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\sin\frac{7\pi}{3}$

$= -\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$= -\sin\frac{\pi}{3}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \cos\frac{7\pi}{3}$

$= \cos\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{3}$

$= \frac{1}{2}$

ดังนั้น $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

8) $\sin\frac{13\pi}{3} = \sin\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{13\pi}{3} = \cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{3}$

$= \frac{1}{2}$

ดังนั้น $\sin\frac{13\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos\frac{13\pi}{3}=\frac{1}{2}$

9) $\sin\frac{37\pi}{6} = \sin\left(6\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{6}$

$= \frac{1}{2}$

$\cos\frac{37\pi}{6} = \cos\left(6\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{6}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\sin\frac{37\pi}{6}=\frac{1}{2}$ และ $\cos\frac{37\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

10) $\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3}$

$= -\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

7. 1) $\sin\frac{37\pi}{6} = \sin\left(6\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{6}$

$= \frac{1}{2}$

2) $\sin\frac{109\pi}{36} = \sin\left(2\pi+\frac{37\pi}{36}\right)$

$= \sin\frac{37\pi}{36}$

$= \sin\left(\pi+\frac{\pi}{36}\right)$

$= -\sin\frac{\pi}{36}$

$\approx -\frac{9}{100}$

3) $\sin\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = -\sin\frac{13\pi}{4}$

$= -\sin\left(2\pi+\frac{5\pi}{4}\right)$

$= -\sin\frac{5\pi}{4}$

$= -\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$= -\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\sin\left(-\frac{29\pi}{3}\right) = -\sin\frac{29\pi}{3}$

$= -\sin\left(8\pi+\frac{5\pi}{3}\right)$

$= -\sin\frac{5\pi}{3}$

$= -\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$= -\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $\cos\frac{31\pi}{4} = \cos\left(6\pi+\frac{7\pi}{4}\right)$

$= \cos\frac{7\pi}{4}$

$= \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

6) $\cos\frac{34\pi}{3} = \cos\left(10\pi+\frac{4\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{4\pi}{3}$

$= \cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$= -\cos\frac{\pi}{3}$

$= -\frac{1}{2}$

7) $\cos\left(-\frac{29\pi}{6}\right) = \cos\frac{29\pi}{6}$

$= \cos\left(4\pi+\frac{5\pi}{6}\right)$

$= \cos\frac{5\pi}{6}$

$= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$= -\cos\frac{\pi}{6}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

8) $\cos\left(-\frac{73\pi}{36}\right) = \cos\frac{73\pi}{36}$

$= \cos\left(2\pi+\frac{\pi}{36}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{36}$

เนื่องจาก $\sin^2\frac{\pi}{36}+\cos^2\frac{\pi}{36} = 1$

จะได้ $\cos^2\frac{\pi}{36} = 1-\sin^2\frac{\pi}{36}$

$\cos^2\frac{\pi}{36} \approx 1-\left(\frac{9}{100}\right)^2$

$\cos^2\frac{\pi}{36} \approx \frac{9919}{10000}$

เนื่องจากจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{36}$ หน่วย เมื่อวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะอยู่ในจตุภาคที่ 1

จะได้ $\cos\frac{\pi}{36} \approx \frac{\sqrt{9919}}{100}$

ดังนั้น $\cos\left(-\frac{73\pi}{36}\right) \approx \frac{\sqrt{9919}}{100}$

8. เนื่องจาก $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$

จะได้ $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$

จาก $\sin\theta=\frac{1}{5}$ จะได้ $\cos^2\theta = 1-\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$

เนื่องจาก $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ จะได้ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย เมื่อวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะอยู่ในจตุภาคที่ 1

จะได้ $\cos\theta=\frac{\sqrt{24}}{5}$

ดังนั้น $\sin\theta=\frac{1}{5}$ และ $\cos\theta=\frac{\sqrt{24}}{5}$

1) $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta = \frac{1}{5}$

2) $\sin(-\theta) = -\sin\theta = -\frac{1}{5}$

3) $\sin(\theta-\pi) = \sin(-(\pi-\theta)) = -\sin(\pi-\theta) = -\frac{1}{5}$

4) $\cos\theta = \frac{\sqrt{24}}{5}$

5) $\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta = -\frac{\sqrt{24}}{5}$

6) $\cos(\theta-2\pi) = \cos(-(2\pi-\theta)) = \cos(2\pi-\theta) = \cos\theta = \frac{\sqrt{24}}{5}$

9) จาก $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ จะได้ $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$

และจาก $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{1}{2}$ จะได้ $\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)=\frac{1}{2}$

นั่นคือ $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$

จะได้ $\cos=\frac{\sqrt{3}}{2}$ หรือ $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจากกำหนดให้ $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi$

ดังนั้น $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 1) เป็นเท็จ เช่น เมื่อ $\theta=\frac{3\pi}{2}$ จะได้ $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$ และ $\cos\frac{3\pi}{2}=0$

จะเห็นว่า $\sin\frac{3\pi}{2}<\cos\frac{3\pi}{2}$

2) เป็นจริง

3) เป็นจริง

แบบฝึกหัด 1.2

1. 1) จตุภาคที่ 1
2) จตุภาคที่ 3
3) จตุภาคที่ 2
4) จตุภาคที่ 2
5) จตุภาคที่ 4

2. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของจำนวนที่กำหนดให้แสดงดังตารางต่อไปนี้

	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
1)	0	0	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม
2)	$\frac{\pi}{2}$	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม	0
3)	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
4)	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1
5)	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
6)	π	0	-1	0	ไม่นิยาม	-1	ไม่นิยาม
7)	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1
8)	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
9)	$\frac{7\pi}{2}$	-1	0	ไม่นิยาม	-1	ไม่นิยาม	0
10)	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
11)	2π	0	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม
12)	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1
13)	$-\frac{5\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1
14)	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
15)	$-\pi$	0	-1	0	ไม่นิยาม	-1	ไม่นิยาม
16)	$-\frac{5\pi}{2}$	-1	0	ไม่นิยาม	-1	ไม่นิยาม	0
17)	$-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
18)	-2π	0	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม

3. เนื่องจาก $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

จะได้ $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta = 1-0.6^2 = 0.64$

จากที่กำหนดให้ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ จะได้ว่า $\cos\theta=0.8$

ดังนั้น $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{0.6}{0.8}=0.75$

$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{0.6}=\frac{10}{6}\approx1.67$

$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{0.8}=\frac{10}{8}=1.25$

$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{0.8}{0.6}=\frac{8}{6}\approx1.33$

4. เนื่องจาก $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

จะได้ $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta = 1-\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

จากที่กำหนดให้ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ จะได้ว่า $\cos\theta=\frac{3}{5}$

นั่นคือ $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{3}$ และ $\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{4}$

ดังนั้น $\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta=\frac{5}{3}+\frac{5}{4}=\frac{35}{12}$

5. เนื่องจาก $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$

จะได้ $\sec^2\theta=1+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$

จากที่กำหนดให้ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ จะได้ว่า $\sec\theta=\frac{\sqrt{10}}{3}$

นั่นคือ $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ และ $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=3$

ดังนั้น $2\cos\theta+\cot\theta=2\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)+3=\frac{3\sqrt{10}+15}{5}$

6. 1) $\cos^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{11\pi}{6}$

$= \cos^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$= \cos^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}$

$= \left(\cos^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{4}\right)+\left(\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}\right)$

$= 1+1$

$= 2$

2) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{5\pi}{3}-\tan\frac{5\pi}{3}$

$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}+\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)}$

$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3}-\frac{\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{3}}$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$

$= \frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}$

$= \frac{2+\sqrt{3}}{2}$

3) $\sin\frac{3\pi}{2}+\tan\pi\cos\frac{\pi}{2}-\cot\frac{5\pi}{6}-\sin\frac{7\pi}{6}$

$= \sin\frac{3\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{\cos\pi}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$$= \sin\frac{3\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{\cos\pi}\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}} - \left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= (-1) + 0 + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$$

$$= (-1) + \sqrt{3} + \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$$

4) $\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{5\pi}{3} + \tan\frac{9\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{6} + \tan\frac{7\pi}{6}$

$$= \cos\frac{\pi}{2} - \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)} - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= \cos\frac{\pi}{2} - \left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} - \left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}+3}{3}$$

5) $\sin\frac{5\pi}{6}+\tan\frac{7\pi}{6}-\cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{4\pi}{3}$

$= \sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)}-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{6}+\frac{\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)}-\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{6}+\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{4}$

$= \frac{6+4\sqrt{3}-3\sqrt{6}}{12}$

7. 1) เป็นเท็จ

เนื่องจาก $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

และ $\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

จะเห็นว่า $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\neq\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}$

2) เป็นจริง

เนื่องจาก $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

3) เป็นเท็จ

เนื่องจาก $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ และ $\sin\frac{\pi}{2}=1$

จะเห็นว่า $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}\neq\sin\frac{\pi}{2}$

4) เป็นเท็จ

เนื่องจาก $\cos\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(2\times\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}+2}{2}$

และ $\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

จะเห็นว่า $\cos\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{3}\neq\cos\frac{5\pi}{6}$

5) เป็นเท็จ

เนื่องจาก $\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ และ $\sin\frac{\pi}{2}=1$

จะเห็นว่า $\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\neq\sin\frac{\pi}{2}$

8. ให้ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ

จะได้ $$\begin{aligned}\operatorname{cosec}(2n\pi+\theta) &= \frac{1}{\sin(2n\pi+\theta)}\\ &= \frac{1}{\sin\theta}\\ &= \operatorname{cosec}\theta\end{aligned}$$

9. ให้ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ

จะได้ $$\begin{aligned}\sec(2n\pi+\theta) &= \frac{1}{\cos(2n\pi+\theta)}\\ &= \frac{1}{\cos\theta}\\ &= \sec\theta\end{aligned}$$

10. **กรณีที่ 1** เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

เขียน $n=2k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $$\begin{aligned}\cot(n\pi+\theta) &= \cot(2k\pi+\theta)\\ &= \frac{\cos(2k\pi+\theta)}{\sin(2k\pi+\theta)}\\ &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\ &= \cot\theta\end{aligned}$$

กรณีที่ 2 เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

เขียน $n = 2k+1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $\cot(n\pi+\theta) = \cot((2k+1)\pi+\theta)$

$$= \frac{\cos((2k+1)\pi+\theta)}{\sin((2k+1)\pi+\theta)}$$

$$= \frac{\cos(2k\pi+\pi+\theta)}{\sin(2k\pi+\pi+\theta)}$$

$$= \frac{\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi+\theta)}$$

$$= \frac{-\cos\theta}{-\sin\theta}$$

$$= \cot\theta$$

ดังนั้น $\cot(n\pi+\theta) = \cot\theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ

แบบฝึกหัด 1.3

1. 1) เนื่องจาก π เรเดียน เท่ากับ 180 องศา

ดังนั้น 4π เรเดียน เท่ากับ $4\pi \times \frac{180}{\pi}$ องศา

เนื่องจาก $4\pi \times \frac{180}{\pi} = 720$

ดังนั้น มุมที่มีขนาด 4π เรเดียน มีขนาดเท่ากับ 720 องศา

2) เนื่องจาก π เรเดียน เท่ากับ 180 องศา

ดังนั้น $-\frac{7\pi}{4}$ เรเดียน เท่ากับ $\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\times\frac{180}{\pi}$ องศา

เนื่องจาก $\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\times\frac{180}{\pi} = -315$

ดังนั้น มุมที่มีขนาด $-\frac{7\pi}{4}$ เรเดียน มีขนาดเท่ากับ -315 องศา

3) เนื่องจาก π เรเดียน เท่ากับ 180 องศา

ดังนั้น $-\frac{2\pi}{3}$ เรเดียน เท่ากับ $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\times\frac{180}{\pi}$ องศา

เนื่องจาก $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\times\frac{180}{\pi}=-120$

ดังนั้น มุมที่มีขนาด $-\frac{2\pi}{3}$ เรเดียน มีขนาดเท่ากับ -120 องศา

4) เนื่องจาก π เรเดียน เท่ากับ 180 องศา

ดังนั้น $-\frac{5\pi}{6}$ เรเดียน เท่ากับ $\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\times\frac{180}{\pi}$ องศา

เนื่องจาก $\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\times\frac{180}{\pi}=-150$

ดังนั้น มุมที่มีขนาด $-\frac{5\pi}{6}$ เรเดียน มีขนาดเท่ากับ -150 องศา

5) เนื่องจาก π เรเดียน เท่ากับ 180 องศา

ดังนั้น $\frac{11\pi}{5}$ เรเดียน เท่ากับ $\frac{11\pi}{5}\times\frac{180}{\pi}$ องศา

เนื่องจาก $\frac{11\pi}{5}\times\frac{180}{\pi}=396$

ดังนั้น มุมที่มีขนาด $\frac{11\pi}{5}$ เรเดียน มีขนาดเท่ากับ 396 องศา

6) เนื่องจาก π เรเดียน เท่ากับ 180 องศา

ดังนั้น 3 เรเดียน เท่ากับ $3\times\frac{180}{\pi}$ องศา

เนื่องจาก $3\times\frac{180}{\pi}=\frac{540}{\pi}\approx 171.89$

ดังนั้น มุมที่มีขนาด 3 เรเดียน มีขนาดเท่ากับ $\frac{540}{\pi}$ องศา หรือประมาณ 171.89 องศา

2. 1) เนื่องจาก 180 องศา เท่ากับ π เรเดียน

ดังนั้น 300 องศา เท่ากับ $300\times\frac{\pi}{180}$ เรเดียน

เนื่องจาก $300\times\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{3}$

ดังนั้น มุมที่มีขนาด 300 องศา มีขนาดเท่ากับ $\frac{5\pi}{3}$ เรเดียน

2) เนื่องจาก 180 องศา เท่ากับ π เรเดียน

ดังนั้น -112 องศา เท่ากับ $(-112)\times\frac{\pi}{180}$ เรเดียน

เนื่องจาก $(-112)\times\frac{\pi}{180} = -\frac{28\pi}{45}$

ดังนั้น มุมที่มีขนาด -112 องศา มีขนาดเท่ากับ $-\frac{28\pi}{45}$ เรเดียน

3) เนื่องจาก 180 องศา เท่ากับ π เรเดียน

ดังนั้น -315 องศา เท่ากับ $(-315)\times\frac{\pi}{180}$ เรเดียน

เนื่องจาก $(-315)\times\frac{\pi}{180} = -\frac{7\pi}{4}$

ดังนั้น มุมที่มีขนาด -315 องศา มีขนาดเท่ากับ $-\frac{7\pi}{4}$ เรเดียน

4) เนื่องจาก 180 องศา เท่ากับ π เรเดียน

ดังนั้น 880 องศา เท่ากับ $880\times\frac{\pi}{180}$ เรเดียน

เนื่องจาก $880\times\frac{\pi}{180} = \frac{44\pi}{9}$

ดังนั้น มุมที่มีขนาด 880 องศา มีขนาดเท่ากับ $\frac{44\pi}{9}$ เรเดียน

5) เนื่องจาก 180 องศา เท่ากับ π เรเดียน

ดังนั้น -500 องศา เท่ากับ $(-500)\times\frac{\pi}{180}$ เรเดียน

เนื่องจาก $(-500)\times\frac{\pi}{180} = -\frac{25\pi}{9}$

ดังนั้น มุมที่มีขนาด -500 องศา มีขนาดเท่ากับ $-\frac{25\pi}{9}$ เรเดียน

6) เนื่องจาก 180 องศา เท่ากับ π เรเดียน

ดังนั้น 740 องศา เท่ากับ $740\times\frac{\pi}{180}$ เรเดียน

เนื่องจาก $740\times\frac{\pi}{180} = \frac{37\pi}{9}$

ดังนั้น มุมที่มีขนาด 740 องศา มีขนาดเท่ากับ $\frac{37\pi}{9}$ เรเดียน

3. เนื่องจาก มุมที่มีขนาด $\frac{2\pi}{3}$ เรเดียน มีขนาดเท่ากับ $120°$

จะได้ขนาดของมุมที่เหลือมีขนาด $180° - (36° + 120°) = 24°$

เนื่องจากมุมที่มีขนาด $24°$ มีขนาดเท่ากับ $\frac{2\pi}{15}$ เรเดียน

ดังนั้น ขนาดของมุมที่เหลือมีขนาดเท่ากับ $\frac{2\pi}{15}$ เรเดียน

4.

	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
1)	$150°$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
2)	$120°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
3)	$315°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1
4)	$-315°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
5)	$930°$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$

5. 1) จตุภาคที่ 1 หรือ 2
   2) จตุภาคที่ 2 หรือ 3
   3) จตุภาคที่ 2 หรือ 4
   4) จตุภาคที่ 1 หรือ 3
   5) จตุภาคที่ 1 หรือ 2

6. 1)
$$\begin{aligned}\frac{3\tan^2 135° - \sec^2 300°}{2\sin 330°} &= \frac{3\tan^2(180° - 45°) - \sec^2(360° - 60°)}{2\sin(360° - 30°)} \\ &= \frac{3\tan^2 45° - \sec^2 60°}{-2\sin 30°} \\ &= \frac{3\tan^2\frac{\pi}{4} - \sec^2\frac{\pi}{3}}{-2\sin\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{3(1)^2 - (2)^2}{-2\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= 1\end{aligned}$$

2) $\dfrac{\tan(-480°)-\sin(-840°)}{\cos(-390°)} = \dfrac{-\tan 480°+\sin 840°}{\cos 390°}$

$= \dfrac{-\tan(360°+120°)+\sin(720°+120°)}{\cos(360°+30°)}$

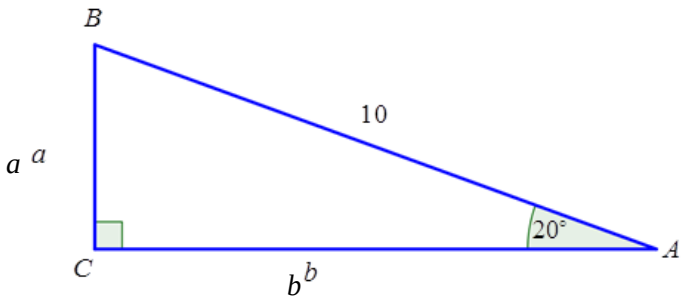
$= \dfrac{-\tan 120°+\sin 120°}{\cos 30°}$

$= \dfrac{-\tan\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{6}}$

$= \dfrac{-\left(-\sqrt{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= 3$

7.



ให้ a และ b เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A และ B ตามลำดับ

เนื่องจาก $\sin 20° = \dfrac{a}{10}$

จะได้ $a = 10\sin 20° \approx 3.42$

เนื่องจาก $\cos 20° = \dfrac{b}{10}$

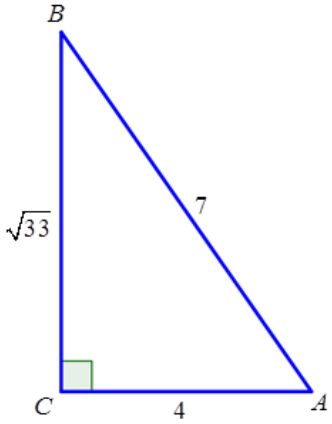
จะได้ $b = 10\cos 20° \approx 9.40$

ดังนั้น ความยาวของด้าน AC ยาวประมาณ 9.40 หน่วย และ

ความยาวของด้าน BC ยาวประมาณ 3.42 หน่วย

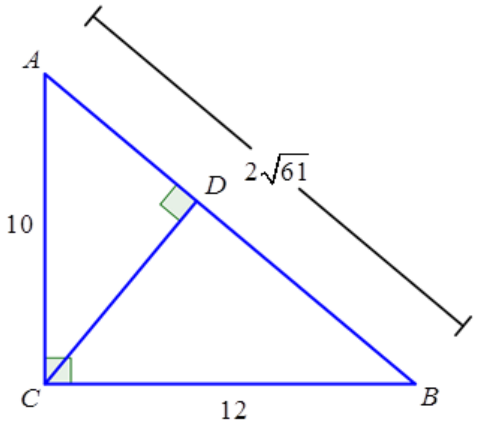
8. จาก $\cos A = \dfrac{4}{7}$ สามารถกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก

โดยให้ด้านประชิดมุม A ยาว 4 หน่วยและด้านตรงข้ามมุม C ยาว 7 หน่วย
จะได้ด้านตรงข้ามมุม A ยาว $\sqrt{7^2-4^2}=\sqrt{33}$ หน่วย ดังรูป



ดังนั้น $\sin A=\frac{\sqrt{33}}{7},\tan A=\frac{\sqrt{33}}{4},\operatorname{cosec}A=\frac{7\sqrt{33}}{33},\sec A=\frac{7}{4}$ และ $\cot A=\frac{4\sqrt{33}}{33}$

9. จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ สามารถสร้างรูปได้ดังนี้



จากรูป จะได้ว่า $\sin A=\frac{6\sqrt{61}}{61},\cos A=\frac{5\sqrt{61}}{61},\tan A=\frac{6}{5},\sin B=\frac{5\sqrt{61}}{61},\cos B=\frac{6\sqrt{61}}{61}$

และ $\tan B=\frac{5}{6}$

พิจารณาในรูปสามเหลี่ยม BCD

เนื่องจากมุม BDC เป็นมุมฉาก จะได้ว่า $\sin B=\frac{CD}{12}$ และ $\cos B=\frac{DB}{12}$

จะได้ $CD=12\sin B=12\times\frac{5\sqrt{61}}{61}=\frac{60\sqrt{61}}{61}$

และ $DB = 12\cos B = 12 \times \frac{6\sqrt{61}}{61} = \frac{72\sqrt{61}}{61}$

ดังนั้น $\sin A = \frac{6\sqrt{61}}{61}$, $\cos A = \frac{5\sqrt{61}}{61}$, $\tan A = \frac{6}{5}$

$\sin B = \frac{5\sqrt{61}}{61}$, $\cos B = \frac{6\sqrt{61}}{61}$, $\tan B = \frac{5}{6}$

ความยาวของด้าน CD เท่ากับ $\frac{60\sqrt{61}}{61}$ หน่วย

ความยาวของด้าน DB เท่ากับ $\frac{72\sqrt{61}}{61}$ หน่วย

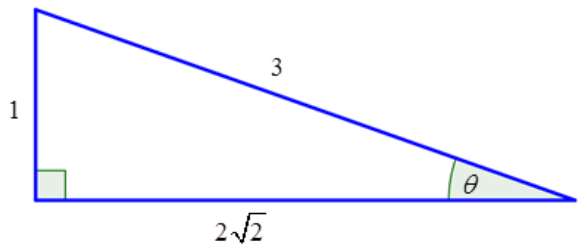
10. **วิธีที่ 1** เนื่องจาก $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

จะได้ $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

นั่นคือ $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ เพราะว่า $\sec\theta < 0$

ดังนั้น $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

วิธีที่ 2 จาก $\sin\theta = \frac{1}{3}$ สามารถกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมหนึ่งมีขนาดเป็น θ โดยให้ด้านตรงข้ามมุมที่มีขนาดเป็น θ ยาว 1 หน่วย และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 3 หน่วย จะได้ด้านประชิดมุมที่มีขนาดเป็น θ ยาว $\sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ หน่วย ดังรูป



เนื่องจาก $\sin\theta > 0$ และ $\sec\theta < 0$ จะได้ว่ามุมอยู่ในจตุภาคที่ 2

นั่นคือ $\tan\theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

11. **วิธีที่ 1** จาก $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

จะได้ $\operatorname{cosec}^2\theta=1+5^2=26$

นั่นคือ $\operatorname{cosec}\theta=-\sqrt{26}$ เพราะว่า $\sin\theta<0$

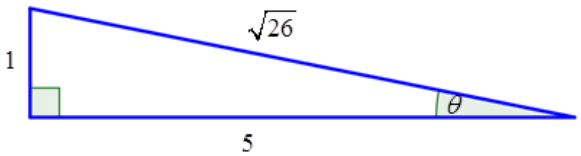
จะได้ $\sin\theta=-\frac{\sqrt{26}}{26}$

จาก $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

จะได้ $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{1}{26}=\frac{25}{26}$

ดังนั้น $\cos\theta=-\frac{5\sqrt{26}}{26}$ เพราะว่า $\cot\theta>0$ และ $\sin\theta<0$

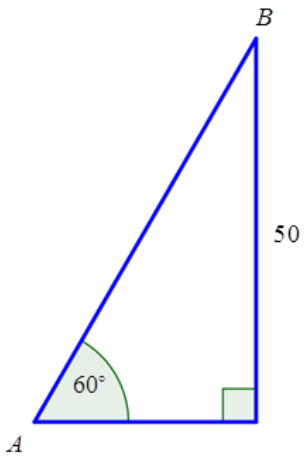
วิธีที่ 2 จาก $\cot\theta=5$ สามารถกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมหนึ่งมีขนาดเป็น θ โดยให้ด้านประชิดมุมที่มีขนาดเป็น θ ยาว 5 หน่วย และด้านตรงข้ามมุมที่มีขนาดเป็น θ ยาว 1 หน่วย จะได้ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว $\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$ หน่วย ดังรูป



เนื่องจาก $\cot\theta>0$ และ $\sin\theta<0$ จะได้ว่ามุมอยู่ในจตุภาคที่ 3

นั่นคือ $\cos\theta=-\frac{5}{\sqrt{26}}=-\frac{5\sqrt{26}}{26}$

12.

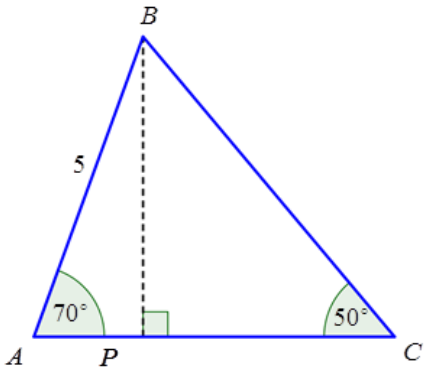


จากรูป จะได้ $\sin 60° = \frac{50}{AB}$

นั่นคือ $AB = \frac{50}{\sin 60°} = \frac{50}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{100\sqrt{3}}{3}$

ดังนั้น นักว่ายน้ำคนนี้ว่ายน้ำข้ามฝั่งเป็นระยะทาง $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ เมตร

13.



จากรูปจะได้ $\sin 70° = \frac{BP}{5}$

นั่นคือ $BP = 5\sin 70° \approx 5(0.9397) = 4.6985$ เซนติเมตร

จากรูปจะได้ $\sin 50° = \frac{BP}{BC}$

นั่นคือ $BC = \frac{BP}{\sin 50°} \approx \frac{4.6985}{0.7660} \approx 6.1338$ เซนติเมตร

จากรูปจะได้ $\cos 70° = \frac{AP}{5}$

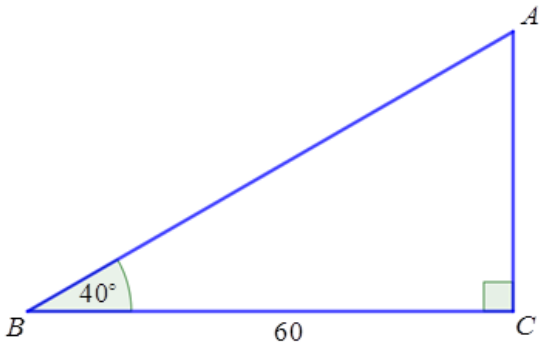
นั่นคือ $AP = 5\cos 70° \approx 5(0.3420) = 1.71$ เซนติเมตร

จากรูปจะได้ $\cos 50° = \frac{PC}{BC}$

นั่นคือ $PC = (BC)\cos 50° \approx (6.1338)(0.6428) \approx 3.9428$ เซนติเมตร

จะได้ $AC = AP + PC = 1.71 + 3.9428 = 5.6528$ เซนติเมตร

14.

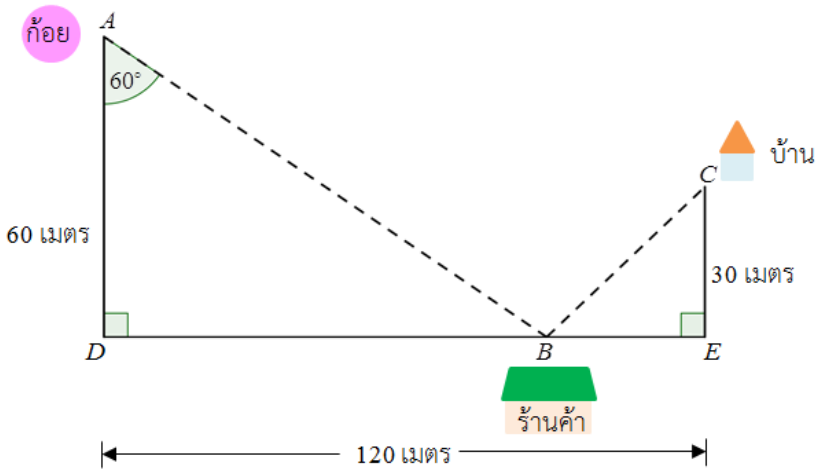


จากรูป จะได้ $\tan 40° = \frac{AC}{60}$

นั่นคือ $AC = 60\tan 40° \approx 60(0.8391) = 50.3460$

ดังนั้น ความสูงของตึกที่สูงกว่า เท่ากับ $40 + 50.4360 = 90.3460$ ฟุต

15.



จากรูป จะได้ $\cos 60° = \frac{60}{AB}$ นั่นคือ $AB = \frac{60}{\cos 60°} = \frac{60}{\frac{1}{2}} = 120$

และจากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ $AB^2 = AD^2 + DB^2$

นั่นคือ $DB^2 = AB^2 - AD^2 = 120^2 - 60^2 = 10800$

จะได้ $DB = 60\sqrt{3}$

และ $BE = 120 - 60\sqrt{3}$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ $BC^2 = BE^2 + CE^2$

นั่นคือ $BC^2 = BE^2 + CE^2 = \left(120 - 60\sqrt{3}\right)^2 + 30^2 \approx 1158.47$

จะได้ $BC \approx 34.04$

ดังนั้น ระยะทางที่สั้นที่สุดที่ก้อยจะเดินจากโรงเรียนไปซื้อของที่ร้านค้าแล้วกลับบ้าน คือระยะ $AB + BC$ หรือ ประมาณ 154.04 เมตร

แบบฝึกหัด 1.4

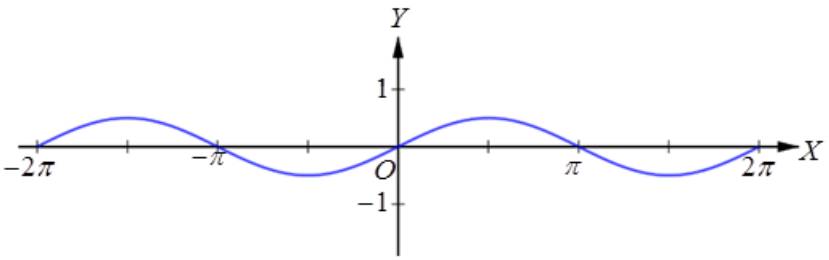
1. 1) จาก $y = \frac{1}{2}\sin\theta$

จะได้ คาบ คือ 2π

แอมพลิจูด คือ $\frac{1}{2}$

และเรนจ์ คือ $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

เขียนกราฟของ $y = \frac{1}{2}\sin\theta$ ได้ดังนี้



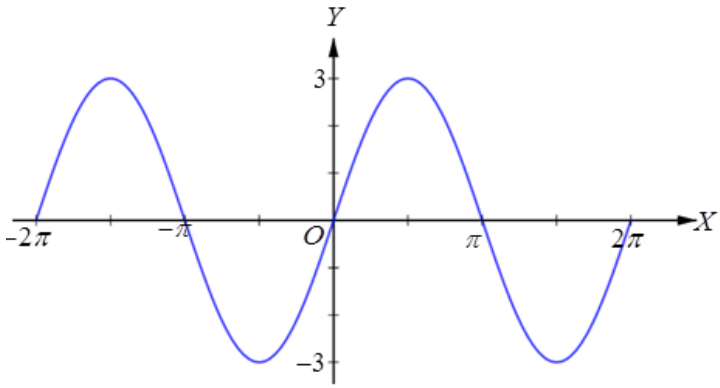
2) จาก $y = 3\sin\theta$

จะได้ คาบ คือ 2π

แอมพลิจูด คือ 3

และเรนจ์ คือ $[-3, 3]$

เขียนกราฟของ $y = 3\sin\theta$ ได้ดังนี้



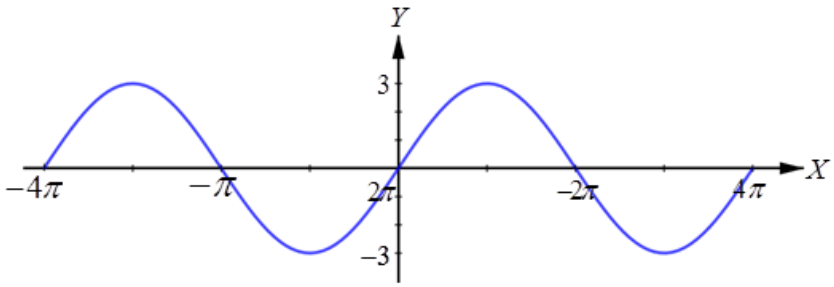
3) จาก $y = 3\sin\frac{1}{2}\theta$

จะได้ คาบ คือ 4π

แอมพลิจูด คือ 3

และเรนจ์ คือ $[-3, 3]$

เขียนกราฟของ $y = 3\sin\frac{1}{2}\theta$ ได้ดังนี้



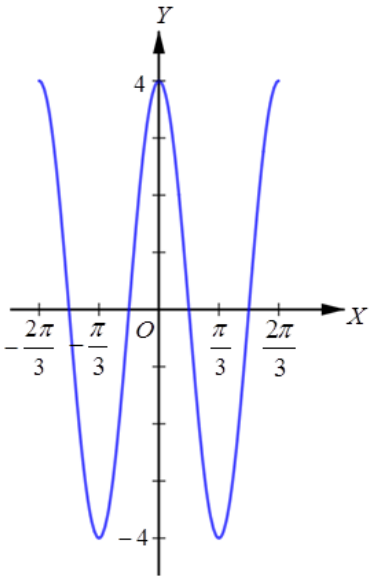
4) จาก $y = 4\cos 3\theta$

จะได้ คาบ คือ $\frac{2\pi}{3}$

แอมพลิจูด คือ 4

และเรนจ์ คือ $[-4, 4]$

เขียนกราฟของ $y = 4\cos 3\theta$ ได้ดังนี้



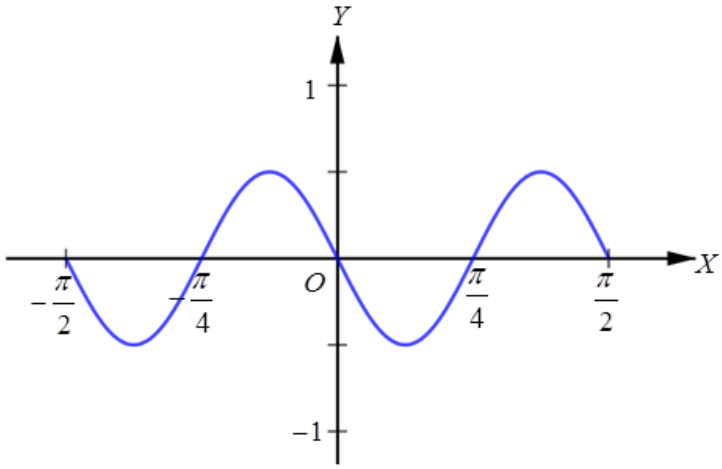
5) จาก $y=-\frac{1}{2}\sin 4\theta$

จะได้ คาบ คือ $\frac{\pi}{2}$

แอมพลิจูด คือ $\frac{1}{2}$

และเรนจ์ คือ $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

เขียนกราฟของ $y=-\frac{1}{2}\sin 4\theta$ ได้ดังนี้



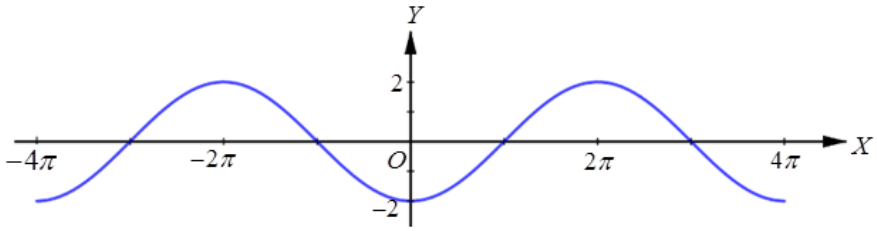
6) จาก $y=-2\cos\frac{1}{2}\theta$

จะได้ คาบ คือ 4π

แอมพลิจูด คือ 2

และเรนจ์ คือ $[-2,2]$

เขียนกราฟของ $y=-2\cos\frac{1}{2}\theta$ ได้ดังนี้



2. 1) (จ)
2) (ฉ)
3) (ก)
4) (ฌ)
5) (ซ)
6) (ข)
7) (ค)
8) (ช)
9) (ง)

แบบฝึกหัด 1.5

1. 1) จาก $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

จะได้ $\cos(60°+45°) = \cos 60°\cos 45° - \sin 60°\sin 45°$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

2) จาก $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

จะได้ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}$

$= 0\cdot\frac{1}{2} + (-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) จาก $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

จะได้ $\cos 225° = \cos(180°+45°)$

$= \cos 180°\cos 45° - \sin 180°\sin 45°$

$= (-1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) จาก $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

จะได้ $\sin 135° = \sin(90°+45°)$

$= \sin 90°\cos 45° + \cos 90°\sin 45°$

$= 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

5) จาก $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

จะได้ $\tan 75° = \tan(30°+45°)$

$$\begin{aligned}\tan 75^\circ &= \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} \\ &= 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

6) จาก $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$

จะได้ $\begin{aligned}\tan 105^\circ &= \tan(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \\ &= -2 - \sqrt{3}\end{aligned}$

7) จาก $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

จะได้ $\begin{aligned}\cos\frac{7\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$

8) จาก $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

จะได้ $\operatorname{cosec}\frac{7\pi}{12} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)}$

$$\operatorname{cosec}\frac{7\pi}{12} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$
$$= \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

9) เนื่องจาก $\sin\frac{17\pi}{12} = \sin\left(\pi+\frac{5\pi}{12}\right) = -\sin\frac{5\pi}{12}$

จาก $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

จะได้ $-\sin\frac{5\pi}{12} = -\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$
$$= -\left[\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\right]$$
$$= -\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right]$$
$$= \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ดังนั้น $\sin\frac{17\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

10) จาก $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

จะได้ $\tan\frac{19\pi}{12} = \tan\left(\pi+\frac{7\pi}{12}\right)$
$$= \tan\frac{7\pi}{12}$$
$$= \tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$\tan\frac{19\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\left(\sqrt{3}\right)(1)}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$
$$= -2-\sqrt{3}$$

11) จาก $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

จะได้ $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$
$$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

12) จาก $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

จะได้ $\cot\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{\tan\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}$
$$= -\frac{1}{\tan\frac{5\pi}{12}}$$
$$= -\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}$$
$$= -\frac{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}$$
$$= -\frac{1-(1)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$= -2+\sqrt{3}$

2. 1) จาก $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

จะได้ $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{2}\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{5\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{5\pi}{2}$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{2}\right)$

$= \cos 3\pi$

$= -1$

2) $\sin\frac{\pi}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

3) จาก $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

จะได้ $\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 20^\circ\sin 10^\circ = \sin(20^\circ+10^\circ)$

$= \sin 30^\circ$

$= \frac{1}{2}$

4) จาก $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

จะได้ $\cos 70^\circ\cos 20^\circ-\sin 70^\circ\sin 20^\circ = \cos(70^\circ+20^\circ)$

$= \cos 90^\circ$

$= 0$

5) จาก $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

จะได้ $\frac{\tan 20^\circ+\tan 25^\circ}{1-\tan 20^\circ\tan 25^\circ} = \tan(20^\circ+25^\circ)$

$= \tan 45^\circ$

$= 1$

6) จาก $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

จะได้ $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{7\pi}{12}\right)$

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -1$$

7) จาก $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

จะได้ $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)$$
$$= \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

8) จาก $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

จะได้ $\frac{\tan 75^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 75^\circ\tan 45^\circ} = \tan(75^\circ-45^\circ)$

$$= \tan 30^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

9) จาก $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

จะได้ $\cos 15^\circ\cos 30^\circ-\sin 15^\circ\sin 30^\circ = \cos(15^\circ+30^\circ)$

$$= \cos 45^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

10) จาก $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

จะได้ $\sin 20^\circ\cos 80^\circ-\cos 20^\circ\sin 80^\circ = \sin(20^\circ-80^\circ)$

$$= \sin(-60^\circ)$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. 1) เนื่องจาก $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

จะได้ $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

ดังนั้น $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ เพราะ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

และเนื่องจาก $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$

จะได้ $\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{5}$

ดังนั้น $\sin\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ เพราะ $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$

จะได้ $\sin\alpha=\frac{3}{5}, \cos\alpha=\frac{4}{5}, \sin\beta=-\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}, \tan\alpha=\frac{3}{4}$ และ $\tan\beta=-\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$= \frac{2\sqrt{5}}{25}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{4}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$= \frac{11\sqrt{5}}{25}$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$= \frac{10\sqrt{5}}{25}$

$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$

และ $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$= 2$

2) เนื่องจาก $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$

จะได้ $\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha=1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$

ดังนั้น $\sec\alpha=-\frac{5}{3}$ เพราะ $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

ดังนั้น $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ และได้ว่า $\sin\alpha=\frac{4}{5}$

เนื่องจาก $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$

จะได้ $\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

ดังนั้น $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ เพราะ $0<\beta<\frac{\pi}{2}$

จะได้ $\sin\alpha=\frac{4}{5},\cos\alpha=-\frac{3}{5},\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\beta=\frac{1}{2},\tan\alpha=-\frac{4}{3}$ และ $\tan\beta=\sqrt{3}$

ดังนั้น $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}-\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{-3-4\sqrt{3}}{10}$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

และ $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{-\frac{4}{3}-\sqrt{3}}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-4-3\sqrt{3}}{3-4\sqrt{3}}$$

3) จาก $\operatorname{cosec}\alpha=-2$ จะได้ $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$

เนื่องจาก $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

จะได้ $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

ดังนั้น $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ เพราะ $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$

เนื่องจาก $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$

จะได้ $\sec^2\beta=1+\tan^2\beta=1+\left(\frac{15}{8}\right)^2=\frac{289}{64}$

ดังนั้น $\sec\beta=-\frac{17}{8}$ เพราะ $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$

ดังนั้น $\cos\beta=-\frac{8}{17}$ และได้ว่า $\sin\beta=\frac{-15}{17}$

จะได้ $\sin\alpha=-\frac{1}{2},\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2},\sin\beta=-\frac{15}{17},\cos\beta=-\frac{8}{17},\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ และ $\tan\beta=\frac{15}{8}$

ดังนั้น $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{8}{17}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{15}{17}\right)$$

$$= \frac{8-15\sqrt{3}}{34}$$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{8}{17}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{15}{17}\right)$$

$$= \frac{-15-8\sqrt{3}}{34}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{8}{17}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{15}{17}\right)\\ &= \frac{8+15\sqrt{3}}{34}\end{aligned}$$

และ $$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\ &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{15}{8}}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\frac{15}{8}}\\ &= \frac{-45-8\sqrt{3}}{24-15\sqrt{3}}\end{aligned}$$

4. จาก $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

จะได้ $$\begin{aligned}\cos 2x &= 2\left(\frac{3}{7}\right)^2-1\\ &= 2\cdot\frac{9}{49}-1\\ &= -\frac{31}{49}\end{aligned}$$

5. จาก $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

จะได้ $$\begin{aligned}\cos 64^\circ &= \cos 2(32^\circ)\\ &= 2\cos^2 32^\circ-1\end{aligned}$$

นั่นคือ $$\begin{aligned}0.44 &= 2\cos^2 32^\circ-1\\ 2\cos^2 32^\circ &= 1.44\\ \cos^2 32^\circ &= 0.72\\ \cos 32^\circ &= \sqrt{0.72}\end{aligned}$$ เพราะว่า $0^\circ < 32^\circ < 90^\circ$

ดังนั้น $\cos 32^\circ = \sqrt{0.72} = 0.6\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$

6. เนื่องจาก $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

จะได้ $\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

ดังนั้น $\sin x = \frac{4}{5}$ เพราะ $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

และเนื่องจาก $1+\tan^2 y=\sec^2 y$

จะได้ $\sec^2 y=1+\tan^2 y=1+\left(\frac{5}{12}\right)^2=\frac{169}{144}$

ดังนั้น $\sec y=-\frac{13}{12}$ เพราะ $\pi<y<\frac{3\pi}{2}$

นั่นคือ $\cos y=-\frac{12}{13}$ และได้ว่า $\sin y=-\frac{5}{13}$

1) $\sin x=\frac{4}{5}$

2) $\sec y=-\frac{13}{12}$

3) $\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x\cos y-\sin x\sin y\\ &= \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)\\ &= \frac{56}{65}\end{aligned}$

4) $\begin{aligned}\operatorname{cosec}(x+y) &= \frac{1}{\sin(x+y)}\\ &= \frac{1}{\sin x\cos y+\cos x\sin y}\\ &= \frac{1}{\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)}\\ &= -\frac{65}{33}\end{aligned}$

7. 1) $\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) &= \sin\frac{\pi}{2}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{2}\sin\theta\\ &= (1)\cdot\cos\theta+(0)\cdot\sin\theta\\ &= \cos\theta\end{aligned}$

2) $\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta\\ &= (0)\cdot\cos\theta-(1)\cdot\sin\theta\\ &= -\sin\theta\end{aligned}$

3) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = \cos\frac{3\pi}{2}\cos\theta+\sin\frac{3\pi}{2}\sin\theta$

$$= (0)\cdot\cos\theta + (-1)\cdot\sin\theta$$
$$= -\sin\theta$$

4) $\tan(\pi-\theta) = \dfrac{\tan\pi - \tan\theta}{1+\tan\pi\tan\theta}$
$$= \frac{0-\tan\theta}{1+0\cdot\tan\theta}$$
$$= -\tan\theta$$

5) $\sin(90^\circ - A) = \sin 90^\circ\cos A - \cos 90^\circ\sin A$
$$= (1)\cdot\cos A - (0)\cdot\sin A$$
$$= \cos A$$

6) $\cot(90^\circ - B) = \dfrac{\cos(90^\circ - B)}{\sin(90^\circ - B)}$
$$= \frac{\cos 90^\circ\cos B + \sin 90^\circ\sin B}{\sin 90^\circ\cos B - \cos 90^\circ\sin B}$$
$$= \frac{(0)\cdot\cos B + (1)\cdot\sin B}{(1)\cdot\cos B + (0)\cdot\sin B}$$
$$= \frac{\sin B}{\cos B}$$
$$= \tan B$$

7) $\operatorname{cosec}(90^\circ - B) = \dfrac{1}{\sin(90^\circ - B)}$
$$= \frac{1}{\sin 90^\circ\cos B - \cos 90^\circ\sin B}$$
$$= \frac{1}{(1)\cdot\cos B - (0)\cdot\sin B}$$
$$= \frac{1}{\cos B}$$
$$= \sec B$$

8) $\cos(270^\circ - A) = \cos 270^\circ\cos A + \sin 270^\circ\sin A$
$$= (0)\cdot\cos A + (-1)\cdot\sin A$$
$$= -\sin A$$

9) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$
$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos\alpha\cos\beta \neq 0$$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{เมื่อ} \quad \tan\alpha\tan\beta \neq -1$$

10) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$

$= 1-\tan\alpha\tan\beta$ เมื่อ $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$

11) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

$= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$= 2\sin\alpha\cos\beta$

12) ให้ $x+y=\alpha$ และ $x-y=\beta$

จะได้ $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ และ $y=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

เนื่องจาก $\sin(x+y)-\sin(x-y)$

$= \sin x\cos y+\cos x\sin y-\sin x\cos y+\cos x\sin y$

$= 2\cos x\sin y$

ดังนั้น $\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

13) ให้ $x+y=\alpha$ และ $x-y=\beta$

จะได้ $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ และ $y=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

เนื่องจาก $\cos(x+y)+\cos(x-y)$

$= \cos x\cos y-\sin x\sin y+\cos x\cos y+\sin x\sin y$

$= 2\cos x\cos y$

ดังนั้น $\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

14) ให้ $x+y=\alpha$ และ $x-y=\beta$

จะได้ $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ และ $y=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

เนื่องจาก $\cos(x+y)-\cos(x-y)$

$= \cos x\cos y-\sin x\sin y-\cos x\cos y-\sin x\sin y$

$= -2\sin x\sin y$

ดังนั้น $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

15) $\cos(x-30°)-\cos(x+30°)$

$=\cos x\cos 30°+\sin x\sin 30°-\cos x\cos 30°+\sin x\sin 30°$

$=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin x$

$=\sin x$

16) $\sin(x-30°)+\sin(x+30°)$

$=\sin x\cos 30°-\cos x\sin 30°+\sin x\cos 30°+\cos x\sin 30°$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$=\sqrt{3}\sin x$

17) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

$=\cos\alpha+\sin\alpha$ เมื่อ $\cos\alpha\neq\sin\alpha$

18) $\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)$

$=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha$

$=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha$

$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha$

$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$

$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha$

$=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

19) **วิธีที่ 1**

$\frac{\cos 3\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$=\frac{4\cos^3\alpha-4\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$=\frac{-4\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\sin\alpha}$

$=\frac{-4\cos\alpha\sin^2\alpha}{\sin\alpha}$

$=-4\sin\alpha\cos\alpha$

$$= -2\left(2\sin\alpha\cos\alpha\right)$$
$$= -2\sin 2\alpha \qquad \text{เมื่อ } \sin\alpha \neq 0$$

วิธีที่ 2

$$\frac{\cos 3\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-2\sin\frac{3\alpha+\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha-\alpha}{2}}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{-2\sin 2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= -2\sin 2\alpha \qquad \text{เมื่อ } \sin\alpha \neq 0$$

20) จาก $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

จะได้ $\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

นั่นคือ $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

21) จาก $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

จะได้ $\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

นั่นคือ $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

22) $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

$$= \frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$= \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ เมื่อ $\cos\alpha \neq -1$

แบบฝึกหัด 1.6

1. 1) ให้ $\arcsin 0 = \theta$ จะได้ $\sin\theta = 0$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ มี 0 เพียงค่าเดียวที่ $\sin 0 = 0$

ดังนั้น $\arcsin 0 = 0$

2) ให้ $\arccos 1 = \theta$ จะได้ $\cos\theta = 1$

เนื่องจากในช่วง $[0, \pi]$ มี 0 เพียงค่าเดียวที่ $\cos 0 = 1$

ดังนั้น $\arccos 1 = 0$

3) ให้ $\arcsin(-1) = \theta$ จะได้ $\sin\theta = -1$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ มี $-\frac{\pi}{2}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

ดังนั้น $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

4) ให้ $\arccos(-1) = \theta$ จะได้ $\cos\theta = -1$

เนื่องจากในช่วง $[0, \pi]$ มี π เพียงค่าเดียวที่ $\cos\pi = -1$

ดังนั้น $\arccos(-1) = \pi$

5) ให้ $\arctan 0 = \theta$ จะได้ $\tan\theta = 0$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ มี 0 เพียงค่าเดียวที่ $\tan 0 = 0$

ดังนั้น $\arctan 0 = 0$

6) ให้ $\arctan(-1) = \theta$ จะได้ $\tan\theta = -1$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ มี $-\frac{\pi}{4}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$

ดังนั้น $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

7) ให้ $\arcsin\frac{1}{2} = \theta$ จะได้ $\sin\theta = \frac{1}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$

8) ให้ $\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\theta$ จะได้ $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ มี $\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

ดังนั้น $\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$

9) ให้ $\arctan\sqrt{3}=\theta$ จะได้ $\tan\theta=\sqrt{3}$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ มี $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

ดังนั้น $\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$

10) ให้ $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\theta$ จะได้ $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $-\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$

11) ให้ $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\theta$ จะได้ $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $[0,\pi]$ มี $\frac{5\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$

12) ให้ $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\theta$ จะได้ $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $-\frac{\pi}{4}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$

2. 1) ให้ $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\theta$ จะได้ $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $-\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$

และ $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

2) ให้ $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=\theta$ จะได้ $\sin\theta=-\frac{1}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $-\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$

และ $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

3) ให้ $\arcsin\frac{1}{3}=\theta$

จะได้ $\sin\theta=\frac{1}{3}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\sin\theta>0$ ดังนั้น $0<\theta\le\frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

จะได้ $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

ดังนั้น $\cos\theta=\frac{\sqrt{8}}{3}$ เพราะ $0<\theta\le\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\tan\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = \tan\theta$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}$$

4) ให้ $\arctan\frac{1}{2}=\theta$

จะได้ $\tan\theta=\frac{1}{2}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\tan\theta>0$ ดังนั้น $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

จาก $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

จะได้ $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

ดังนั้น $\sec\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$ เพราะ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

นั่นคือ $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ และได้ว่า $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

ดังนั้น $\tan\left(\arctan\frac{1}{2}\right) = \tan\theta$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

5) ให้ $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}=\theta$

จะได้ $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\sin\theta>0$ ดังนั้น $0<\theta\le\frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

จะได้ $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$

ดังนั้น $\cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$ เพราะ $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$

นั่นคือ $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$

6) ให้ $\arctan 2 = \theta$

จะได้ $\tan\theta = 2$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\tan\theta > 0$ ดังนั้น $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

จาก $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$

จะได้ $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta = 1+2^2 = 5$

ดังนั้น $\sec\theta = \sqrt{5}$ เพราะ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

นั่นคือ $\cos(\arctan 2) = \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

7) ให้ $\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5} = \theta$

จะได้ $\sin\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\sin\theta > 0$ ดังนั้น $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

จะได้ $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$

ดังนั้น $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ เพราะ $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$

นั่นคือ $\sec\left(\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{5}$

8) ให้ $\arctan(-3) = \theta$

จะได้ $\tan\theta = -3$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\tan\theta<0$ ดังนั้น $-\frac{\pi}{2}<\theta<0$

จาก $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

จะได้ $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+(-3)^2=10$

ดังนั้น $\sec\theta=\sqrt{10}$ เพราะ $-\frac{\pi}{2}<\theta<0$

นั่นคือ $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$

จาก $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

จะได้ $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{9}{10}$

ดังนั้น $\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$ เพราะ $-\frac{\pi}{2}<\theta<0$

นั่นคือ $\sin\left(\arctan(-3)\right)=\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

9) เนื่องจาก $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$

ให้ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\theta$

จะได้ $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\sin\theta>0$ ดังนั้น $0<\theta\le\frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

จะได้ $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

ดังนั้น $\cos\theta=\frac{1}{2}$ เพราะ $0<\theta\le\frac{\pi}{2}$

นั่นคือ $\tan\left(\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\right)=\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

10) ให้ $\arccos\frac{3}{5}=\alpha$

จะได้ $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ โดยที่ $0\le\alpha\le\pi$

เนื่องจาก $\cos\alpha>0$ ดังนั้น $0\le\alpha<\frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

จะได้ $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

ดังนั้น $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ เพราะ $0\le\alpha<\frac{\pi}{2}$

ให้ $\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)=\beta$

จะได้ $\sin\beta=-\frac{3}{5}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}\le\beta\le\frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\sin\beta<0$ ดังนั้น $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$

จาก $\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$

จะได้ $\cos^2\beta = 1-\sin^2\beta = 1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

ดังนั้น $\cos\beta=\frac{4}{5}$ เพราะ $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$

นั่นคือ $\sin\alpha=\frac{4}{5},\cos\alpha=\frac{3}{5},\sin\beta=-\frac{3}{5}$ และ $\cos\beta=\frac{4}{5}$

จะได้ $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}+\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \sin(\alpha+\beta)$

$= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$

$= \frac{7}{25}$

11) เนื่องจาก $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$

ให้ $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\theta$ จะได้ $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{4}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

12) เนื่องจาก $\arcsin\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \arcsin\frac{1}{2}$

ให้ $\arcsin\frac{1}{2}=\theta$ จะได้ $\sin\theta=\frac{1}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$

13) เนื่องจาก $\arccos\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

ให้ $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\theta$ จะได้ $\cos\theta=-\frac{1}{2}$

เนื่องจากในช่วง $[0,\pi]$ มี $\frac{2\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\arccos\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}$

14) เนื่องจาก $\arctan\left(\tan\frac{5\pi}{3}\right) = \arctan\left(-\sqrt{3}\right)$

ให้ $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)=\theta$ จะได้ $\tan\theta=-\sqrt{3}$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ มี $-\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

ดังนั้น $\arctan\left(\tan\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$

3. 1) ให้ $\arcsin\frac{1}{2}=\theta$ จะได้ $\sin\theta=\frac{1}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

ให้ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\alpha$ จะได้ $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$

จะได้ว่า $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$

และให้ $\arcsin(-1)=\beta$ จะได้ $\sin\beta=-1$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $-\frac{\pi}{2}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

ดังนั้น $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$

จะได้ว่า $-\arcsin(-1)=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=-\arcsin(-1)$

2) ให้ $\arcsin x=\theta$

จะได้ $\sin\theta=x$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

จาก $\cos2\theta=1-2\sin^2\theta$

ดังนั้น $\cos(2\arcsin x) = \cos2\theta$

$= 1-2\sin^2\theta$

$= 1-2x^2$ เมื่อ $x\in[-1,1]$

3) ให้ $\arctan x=\theta$

จะได้ $\tan\theta=x$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

จะได้ $\sec\theta=\sqrt{1+\tan^2\theta}$ เพราะ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\sec(\arctan x) = \sec\theta$

$= \sqrt{1+\tan^2\theta}$

$= \sqrt{1+x^2}$ เมื่อ $x\in\mathbb{R}$

4) ให้ $\arctan x = \theta$

จะได้ $\tan\theta = x$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

นั่นคือ $-\tan\theta = -x$

จาก $\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$

จะได้ $\tan(-\theta) = -x$

นั่นคือ $\arctan(-x) = -\theta$

ดังนั้น $\arctan x + \arctan(-x) = \theta + (-\theta)$

$= 0$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$

5) ให้ $\arcsin x = \theta$

จะได้ $\sin\theta = x$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

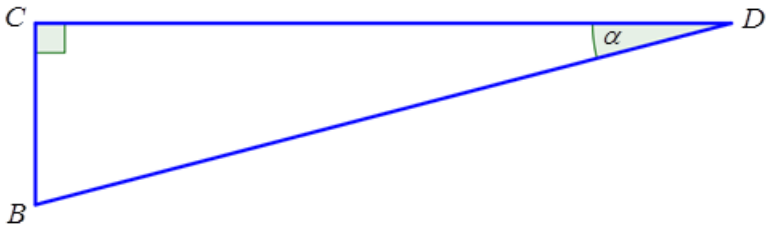
จาก $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta = x$

จะได้ $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \theta$

ดังนั้น $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$

นั่นคือ $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

4.



จากรูปสามเหลี่ยม BCD จะได้

$$\tan\alpha = \frac{4}{4}$$

$$\tan\alpha = 1$$

นั่นคือ $\arctan 1 = \alpha$

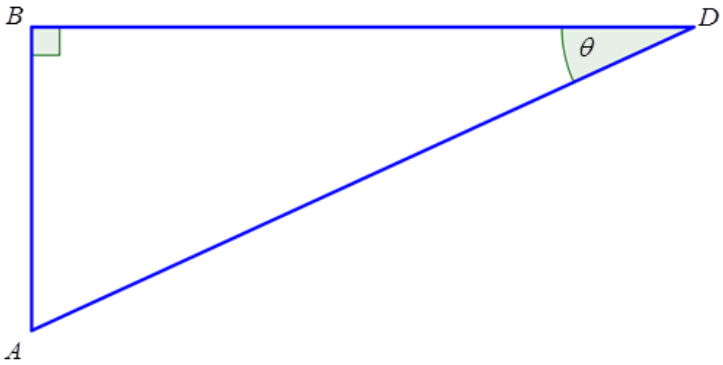
จะได้ $\alpha = \frac{\pi}{4}$

และเมื่อเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นองศา จะได้ $\alpha = 45°$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$\begin{aligned} BD^2 &= CD^2 + BC^2 \\ &= 4^2 + 4^2 \\ &= 32 \end{aligned}$$

นั่นคือ $BD = 4\sqrt{2}$



จากรูปสามเหลี่ยม ABD จะได้

$$\tan\theta = \frac{AB}{BD}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{4\sqrt{2}}$$

$$\tan\theta \approx 0.53$$

นั่นคือ $\theta = \arctan 0.53$

จะได้ $\theta \approx 0.4874$

และเมื่อเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นองศา จะได้ $\theta \approx 27.92°$

ดังนั้น มุม CDB มีขนาด $45°$ และมุม BDA มีขนาดประมาณ $27.92°$

แบบฝึกหัด 1.7.1

1. 1) $\operatorname{cosec}\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \cos\theta$

$= \cot\theta$

2) $\dfrac{\cos x}{\sec x}+\dfrac{\sin x}{\operatorname{cosec} x} = \dfrac{\cos x}{\frac{1}{\cos x}}+\dfrac{\sin x}{\frac{1}{\sin x}}$

$= \cos^2 x+\sin^2 x$

$= 1$

3) $\cos\theta\left(\tan\theta+\cot\theta\right) = \cos\theta\tan\theta+\cos\theta\cot\theta$

$= \cos\theta\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\cos\theta\cdot\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \sin\theta+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin\theta}$

$= \operatorname{cosec}\theta$

4) $\left(\sec\theta-1\right)\left(\sec\theta+1\right) = \sec^2\theta-1$

$= \tan^2\theta$

5) $\sin^2\theta\left(1+\cot^2\theta\right) = \sin^2\theta+\sin^2\theta\cot^2\theta$

$= \sin^2\theta+\sin^2\theta\cdot\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$= \sin^2\theta+\cos^2\theta$

$= 1$

6) $\left(\sin\theta+\cos\theta\right)^2+\left(\sin\theta-\cos\theta\right)^2 = \left(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\right)$

$+\left(\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\right)$

$= 2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)$

$= 2(1)$

$= 2$

7) $\sin^2\alpha\cot^2\alpha+\tan^2\alpha\cos^2\alpha = \sin^2\alpha\cdot\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha$

$= \cos^2\alpha+\sin^2\alpha$

$= 1$

8) $2\sin^2\alpha-1 = 2\left(1-\cos^2\alpha\right)-1$

$= 2-2\cos^2\alpha-1$

$$= 1-2\cos^2\alpha$$

9) $3\sin^2\theta+4\cos^2\theta = 3\left(1-\cos^2\theta\right)+4\cos^2\theta$

$$= 3-3\cos^2\theta+4\cos^2\theta$$

$$= 3+\cos^2\theta$$

10) $\dfrac{\sec\theta}{\operatorname{cosec}\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos\theta}}{\dfrac{1}{\sin\theta}}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \tan\theta+\tan\theta$$

$$= 2\tan\theta$$

11) $\sec^4\theta-\sec^2\theta = \left(\sec^2\theta\right)^2-\sec^2\theta$

$$= \left(1+\tan^2\theta\right)^2-\left(1+\tan^2\theta\right)$$

$$= \left(1+2\tan^2\theta+\tan^4\theta\right)-\left(1+\tan^2\theta\right)$$

$$= \tan^4\theta+\tan^2\theta$$

12) $1-\dfrac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta} = 1-\left(\dfrac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}\cdot\dfrac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)$

$$= 1-\frac{\cos^2\theta(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$$

$$= 1-\frac{\cos^2\theta(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$= 1-(1-\sin\theta)$$

$$= \sin\theta$$

13) $\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = \dfrac{\dfrac{1}{\tan\theta}+\dfrac{\tan\theta}{\tan\theta}}{\dfrac{1}{\tan\theta}-\dfrac{\tan\theta}{\tan\theta}}$

$$= \frac{\cot\theta+1}{\cot\theta-1}$$

14) $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}}{\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}}$

$$= \frac{\operatorname{cosec}\theta + 1}{\operatorname{cosec}\theta - 1}$$

15) $\cos\operatorname{ec} x - \sin x = \frac{1}{\sin x} - \sin x$

$$= \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

$$= \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \cos x \cot x$$

16) $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)\sin^2\theta$$

$$= \left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right)\sin^2\theta$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \cdot \sin^2\theta$$

$$= \tan^2\theta \sin^2\theta$$

17) $\frac{\sin\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = \frac{\frac{\sin\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

$$= \frac{1}{1-\cot\theta}$$

18) $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

2. 1) $\cos(45^\circ-\theta)-\sin(45^\circ+\theta) = \cos 45^\circ\cos\theta+\sin 45^\circ\sin\theta$
$-\sin 45^\circ\cos\theta-\cos 45^\circ\sin\theta$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$
$= 0$

2) $\tan(45^\circ-\alpha) = \frac{\tan 45^\circ-\tan\alpha}{1+\tan 45^\circ\tan\alpha}$
$= \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$

3) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$
$= (\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$
$= \cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta$
$= \cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta$
$= \cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta$
$= \cos^2\alpha-\sin^2\beta$

4) $\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+(2\cos^2\theta-1)}$
$= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta}$
$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
$= \tan\theta$

5) $\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}$
$= \left(\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}\right)-\sin\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right)$
$= 1-\sin\theta$

6) $\tan 3\theta = \tan(2\theta+\theta)$
$= \frac{\tan 2\theta+\tan\theta}{1-\tan 2\theta\tan\theta}$

$$= \frac{\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}+\tan\theta}{1-\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\cdot\tan\theta}$$

$$= \frac{\dfrac{2\tan\theta+\tan\theta\left(1-\tan^2\theta\right)}{1-\tan^2\theta}}{\dfrac{\left(1-\tan^2\theta\right)-2\tan\theta\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}$$

$$= \frac{2\tan\theta+\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

$$= \frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

7) $\cos^2 A+\cos^2\left(60°+A\right)+\cos^2\left(60°-A\right)$

$= \cos^2 A+\left(\cos 60°\cos A-\sin 60°\sin A\right)^2+\left(\cos 60°\cos A+\sin 60°\sin A\right)^2$

$= \cos^2 A+\left(\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)^2$

$= \cos^2 A+\left(\frac{1}{4}\cos^2 A-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\sin A+\frac{3}{4}\sin^2 A\right)$

$\quad+\left(\frac{1}{4}\cos^2 A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\sin A+\frac{3}{4}\sin^2 A\right)$

$= \cos^2 A+\frac{1}{2}\cos^2 A+\frac{3}{2}\sin^2 A$

$= \frac{3}{2}\cos^2 A+\frac{3}{2}\sin^2 A$

$= \frac{3}{2}\left(\cos^2 A+\sin^2 A\right)$

$= \frac{3}{2}$

8) $\dfrac{\sin 8\theta+\sin 2\theta}{\cos 8\theta+\cos 2\theta} = \dfrac{2\sin\left(\frac{8\theta+2\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{8\theta-2\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{8\theta+2\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{8\theta-2\theta}{2}\right)}$

$$= \frac{2\sin 5\theta\cos 3\theta}{2\cos 5\theta\cos 3\theta}$$
$$= \frac{\sin 5\theta}{\cos 5\theta}$$
$$= \tan 5\theta$$

9) $\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta+\sin 7\theta$

$= (\sin 3\theta+\sin\theta)+(\sin 7\theta+\sin 5\theta)$

$= 2\sin\left(\frac{3\theta+\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta-\theta}{2}\right)+2\sin\left(\frac{7\theta+5\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{7\theta-5\theta}{2}\right)$

$= 2\sin 2\theta\cos\theta+2\sin 6\theta\cos\theta$

$= 2\cos\theta(\sin 6\theta+\sin 2\theta)$

$= 2\cos\theta\left(2\sin\left(\frac{6\theta+2\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{6\theta-2\theta}{2}\right)\right)$

$= 4\cos\theta\sin 4\theta\cos 2\theta$

3. จาก $A+B+C=\frac{\pi}{4}$ จะได้ $A+B=\frac{\pi}{4}-C$

จะได้ $\tan(A+B) = \tan\left(\frac{\pi}{4}-C\right)$

นั่นคือ $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} = \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan C}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan C}$

$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} = \frac{1-\tan C}{1+\tan C}$

$(\tan A+\tan B)(1+\tan C) = (1-\tan C)(1-\tan A\tan B)$

$\tan A+\tan B+\tan A\tan C+\tan B\tan C = 1-\tan C-\tan A\tan B+\tan A\tan B\tan C$

ดังนั้น $\tan A+\tan B+\tan C =$
$1-\tan A\tan B-\tan A\tan C-\tan B\tan C+\tan A\tan B\tan C$

แบบฝึกหัด 1.7.2

1. 1) จาก $2\cos^2\theta+\cos\theta = 0$

จะได้ $\cos\theta(2\cos\theta+1) = 0$

นั่นคือ $\cos\theta=0$ หรือ $\cos\theta=-\frac{1}{2}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos\theta = 0$ คือ $\frac{\pi}{2}$ และ $\frac{3\pi}{2}$

และค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ คือ $\frac{2\pi}{3}$ และ $\frac{4\pi}{3}$

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ และ $\frac{3\pi}{2}$

2) จาก $2\sin^2\theta - \sin\theta - 1 = 0$

จะได้ $(2\sin\theta + 1)(\sin\theta - 1) = 0$

นั่นคือ $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ หรือ $\sin\theta = 1$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ คือ $\frac{7\pi}{6}$ และ $\frac{11\pi}{6}$

และค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin\theta = 1$ คือ $\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}$ และ $\frac{11\pi}{6}$

3) จาก $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

จะได้ $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 2$

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 2$$
$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = 2$$
$$2\sin\theta\cos\theta = 1$$

นั่นคือ $\sin 2\theta = 1$

จะได้ $\theta = \frac{\pi}{4}$ หรือ $\theta = \frac{5\pi}{4}$ เมื่อ $\theta \in [0, 2\pi)$

ตรวจคำตอบ แทน θ ในสมการ $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ ด้วย $\frac{\pi}{4}$

จะได้ $\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} = \sqrt{2}$ เป็นจริง

แทน θ ในสมการ $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ ด้วย $\frac{5\pi}{4}$

จะได้ $\sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} = \sqrt{2}$

$-\sqrt{2} = \sqrt{2}$ เป็นเท็จ

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $\frac{\pi}{4}$

4) จาก $\tan\theta\sin\theta + \tan\theta = 0$

จะได้ $\tan\theta(\sin\theta + 1) = 0$

นั่นคือ $\tan\theta = 0$ หรือ $\sin\theta = -1$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\tan\theta = 0$ คือ 0 และ π

และค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin\theta = -1$ คือ $\frac{3\pi}{2}$

แต่เนื่องจาก $\tan\frac{3\pi}{2}$ ไม่นิยาม

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ 0 และ π

5) จาก $4\sin^3\theta - \sin\theta = 0$

จะได้ $\sin\theta(4\sin^2\theta - 1) = 0$

$\sin\theta(2\sin\theta - 1)(2\sin\theta + 1) = 0$

นั่นคือ $\sin\theta = 0$ หรือ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ หรือ $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin\theta = 0$ คือ 0 และ π

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ คือ $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{5\pi}{6}$

และค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ คือ $\frac{7\pi}{6}$ และ $\frac{11\pi}{6}$

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}$ และ $\frac{11\pi}{6}$

6) จาก $\sin^2\theta - \cos\theta + 5 = 0$

จะได้ $(1 - \cos^2\theta) - \cos\theta + 5 = 0$

$\cos^2\theta + \cos\theta - 6 = 0$

$(\cos\theta + 3)(\cos\theta - 2) = 0$

นั่นคือ $\cos\theta = -3$ หรือ $\cos\theta = 2$

เนื่องจาก $-1 \le \cos\theta \le 1$

ดังนั้น ไม่มีค่า θ ใด ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง

7) จาก $2\sin^2\theta - 3\cos\theta - 3 = 0$

จะได้ $2\left(1-\cos^2\theta\right) - 3\cos\theta - 3 = 0$

$$2\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1 = 0$$
$$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta + 1) = 0$$

นั่นคือ $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ หรือ $\cos\theta = -1$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ คือ $\frac{2\pi}{3}$ และ $\frac{4\pi}{3}$

และค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos\theta = -1$ คือ π

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $\frac{2\pi}{3}, \pi$ และ $\frac{4\pi}{3}$

8) จาก $\cot\theta + 2\sin\theta = \operatorname{cosec}\theta$

จะได้ $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 2\sin\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

$$\cos\theta + 2\sin^2\theta = 1$$
$$\cos\theta + 2\left(1-\cos^2\theta\right) = 1$$
$$2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$$
$$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) = 0$$

นั่นคือ $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ หรือ $\cos\theta = 1$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ คือ $\frac{2\pi}{3}$ และ $\frac{4\pi}{3}$

และค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos\theta = 1$ คือ 0

แต่เนื่องจาก $\sin\theta \neq 0$

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $\frac{2\pi}{3}$ และ $\frac{4\pi}{3}$

2. 1) จาก $2\sin\theta - 1 = 0$

จะได้ $\sin\theta = \frac{1}{2}$

ค่าของ θ เมื่อ $0° \leq \theta < 360°$ ที่ทำให้ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ คือ $30°$ และ $150°$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{30°, 150°\}$

2) จาก $3\tan^2\theta - 1 = 0$

จะได้ $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$

นั่นคือ $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ หรือ $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

ค่าของ θ เมื่อ $0° \le \theta < 360°$ ที่ทำให้ $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ คือ $30°$ และ $210°$

และค่าของ θ เมื่อ $0° \le \theta < 360°$ ที่ทำให้ $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ คือ $150°$ และ $330°$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{30°, 150°, 210°, 330°\}$

3) จาก $4\tan^2\theta - 3\sec^2\theta = 0$

จะได้ $4\tan^2\theta - 3\left(1 + \tan^2\theta\right) = 0$

$$\tan^2\theta - 3 = 0$$

$$\tan^2\theta = 3$$

นั่นคือ $\tan\theta = \sqrt{3}$ หรือ $\tan\theta = -\sqrt{3}$

ค่าของ θ เมื่อ $0° \le \theta < 360°$ ที่ทำให้ $\tan\theta = \sqrt{3}$ คือ $60°$ และ $240°$

และค่าของ θ เมื่อ $0° \le \theta < 360°$ ที่ทำให้ $\tan\theta = -\sqrt{3}$ คือ $120°$ และ $300°$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{60°, 120°, 240°, 300°\}$

4) จาก $4\cos^4\theta = \left(\sin 2\theta\right)^2$

จะได้ $4\cos^4\theta - \sin^2 2\theta = 0$

$$4\cos^4\theta - 4\sin^2\theta\cos^2\theta = 0$$

$$4\cos^2\theta\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = 0$$

$$4\cos^2\theta\left(\cos\theta - \sin\theta\right)\left(\cos\theta + \sin\theta\right) = 0$$

นั่นคือ $\cos\theta = 0$ หรือ $\cos\theta = \sin\theta$ หรือ $\cos\theta = -\sin\theta$

ค่าของ θ ในช่วง $0° \le \theta < 360°$ ที่ทำให้ $\cos\theta = 0$ คือ $90°$ และ $270°$

ค่าของ θ ในช่วง $0° \le \theta < 360°$ ที่ทำให้ $\cos\theta = \sin\theta$ คือ $45°$ และ $225°$

ค่าของ θ ในช่วง $0° \le \theta < 360°$ ที่ทำให้ $\cos\theta = -\sin\theta$ คือ $135°$ และ $315°$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{45°, 90°, 135°, 225°, 270°, 315°\}$

5) จาก $\sin 5\theta + \sin 3\theta = 0$

จะได้ $2\sin\left(\frac{5\theta+3\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{5\theta-3\theta}{2}\right) = 0$

$2\sin 4\theta\cos\theta = 0$

นั่นคือ $\sin 4\theta = 0$ หรือ $\cos\theta = 0$

ค่าของ θ ในช่วง $0° \le \theta < 360°$ ที่ทำให้ $\sin 4\theta = 0$ คือ $0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°$ และ $315°$

ค่าของ θ ในช่วง $0° \le \theta < 360°$ ที่ทำให้ $\cos\theta = 0$ คือ $90°$ และ $270°$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°\}$

3. 1) จาก $4\sin^2\theta = 1$

จะได้ $\sin^2\theta = \frac{1}{4}$

นั่นคือ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ หรือ $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi]$ ที่ทำให้ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ คือ $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{5\pi}{6}$

และค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi]$ ที่ทำให้ $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ คือ $\frac{7\pi}{6}$ และ $\frac{11\pi}{6}$

ดังนั้น ค่าทั่วไปของ θ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $n\pi - \frac{\pi}{6}$ และ $n\pi + \frac{\pi}{6}$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

2) จาก $\sec^2\theta - 2\tan\theta = 0$

จะได้ $\left(\tan^2\theta + 1\right) - 2\tan\theta = 0$

$\tan^2\theta - 2\tan\theta + 1 = 0$

$\left(\tan\theta - 1\right)^2 = 0$

นั่นคือ $\tan\theta = 1$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi]$ ที่ทำให้ $\tan\theta = 1$ คือ $\frac{\pi}{4}$ และ $\frac{5\pi}{4}$

ดังนั้น ค่าทั่วไปของ θ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ และ $2n\pi + \frac{5\pi}{4}$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

แบบฝึกหัด 1.8

1. 1) จากกฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

จะได้ $a^2 = 40^2 + 60^2 - 2(40)(60)\cos 60°$

$= 1600 + 3600 - 2(40)(60)\left(\frac{1}{2}\right)$

$= 2800$

ดังนั้น $a \approx 52.92$

2) จากกฎของโคไซน์ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

จะได้ $b^2 = 4^2 + 6^2 - 2(4)(6)\cos 120°$

$= 16 + 36 - 2(4)(6)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= 76$

ดังนั้น $b \approx 8.72$

3) จากกฎของโคไซน์ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

จะได้ $c^2 = 193^2 + 80^2 - 2(193)(80)\cos 133°$

$\approx 37249 + 6400 - 2(193)(80)(-0.6820)$

$= 64709.16$

ดังนั้น $c \approx 254.38$

4) จากกฎของโคไซน์ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

จะได้ $7^2 = 12^2 + 8^2 - 2(12)(8)\cos B$

นั่นคือ $\cos B \approx 0.8281$

ดังนั้น $B \approx 34.10°$

5) จากกฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

จะได้ $8.4^2 = 3.7^2 + 5.2^2 - 2(3.7)(5.2)\cos A$

นั่นคือ $\cos A \approx -0.7752$

ดังนั้น $A \approx 140.82°$

2. 1) เนื่องจาก $A + B + C = 180°$

ดังนั้น $B = 180° - (A + C)$

$= 180° - (45° + 60°)$

$= 75°$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

ดังนั้น $\frac{\sin 75^\circ}{20} = \frac{\sin 60^\circ}{c}$

จะได้ $c = \frac{20\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}$

≈ 17.93

2) เนื่องจาก $A+B+C = 180^\circ$

ดังนั้น $C = 180^\circ - (A+B)$

$= 180^\circ - (30^\circ + 65^\circ)$

$= 85^\circ$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$

ดังนั้น $\frac{\sin 30^\circ}{a} = \frac{\sin 85^\circ}{32}$

จะได้ $a = \frac{32\sin 30^\circ}{\sin 85^\circ}$

≈ 16.06

3) เนื่องจาก $A+B+C = 180^\circ$

ดังนั้น $B = 180^\circ - (A+C)$

$= 180^\circ - (105^\circ + 60^\circ)$

$= 15^\circ$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

ดังนั้น $\frac{\sin 105^\circ}{a} = \frac{\sin 15^\circ}{4}$

จะได้ $a = \frac{4\sin 105^\circ}{\sin 15^\circ}$

≈ 14.93

และ $\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}$

ดังนั้น $\frac{\sin 60^\circ}{c} = \frac{\sin 15^\circ}{4}$

จะได้ $c = \frac{4\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ}$

≈ 13.38

3. 1) พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $ABC = \frac{1}{2}ab\sin C$

$= \frac{1}{2}(15)(20)\sin 65°$

≈ 135.95 ตารางหน่วย

2) พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $ABC = \frac{1}{2}bc\sin A$

$= \frac{1}{2}(80)(5.5)\sin 103.5°$

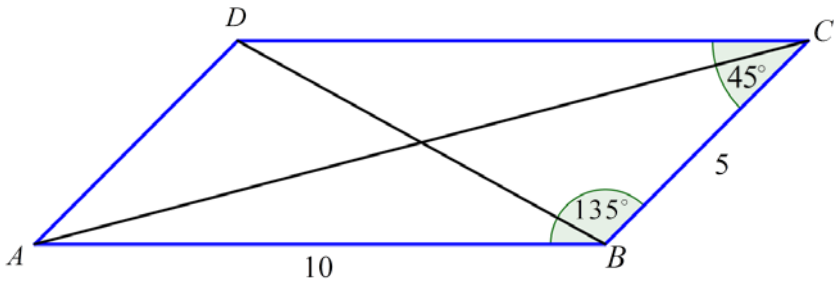
≈ 213.92 ตารางหน่วย

3) พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $ABC = \frac{1}{2}ac\sin B$

$= \frac{1}{2}(14.1)(27.4)\sin 112°$

≈ 179.10 ตารางหน่วย

4.



ให้ AC และ BD เป็นเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC

จากรูป ได้ว่า มุม ABC เท่ากับ $135°$

จากกฎของโคไซน์ $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)\cos 135°$

$= 10^2 + 5^2 - 2(10)(5)\cos 135°$

≈ 195.71

นั่นคือ $AC \approx 13.99$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม BCD

จากรูป จะได้ว่า มุม BCD เท่ากับ $\frac{360° - 2(135°)}{2} = 45°$

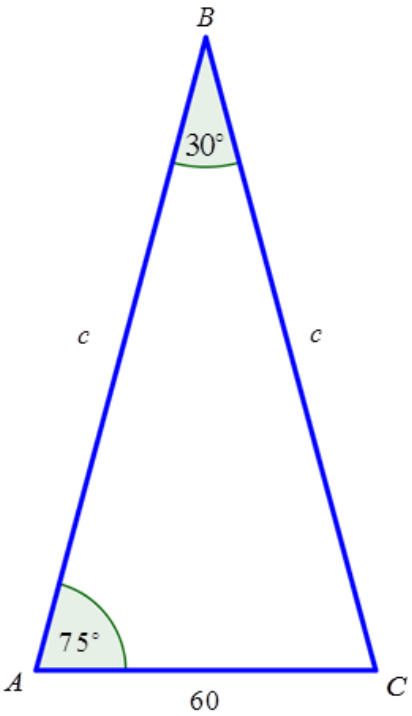
จากกฎของโคไซน์ $BD^2 = CD^2 + BC^2 - 2(CD)(BC)\cos 45°$

$$= 10^2 + 5^2 - 2(10)(5)\cos 45°$$
$$\approx 54.29$$

จะได้ $BD = 7.37$

ดังนั้น เส้นทแยงมุมเส้นสั้นของรูปสี่เหลี่ยมนี้ยาวประมาณ 7.37 เซนติเมตร

5.



จากรูป ให้ c แทนความยาวด้าน AB และ $AB = AC$

เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีมุมยอดขนาด $30°$

จะได้มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาด $\frac{180° - 30°}{2} = 75°$

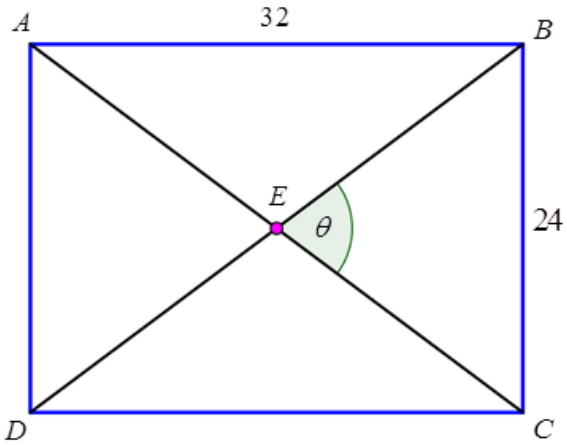
จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin C}{AB}$

จะได้ $\frac{\sin 30°}{60} = \frac{\sin 75°}{c}$

$$c = \frac{60\sin 75°}{\sin 30°}$$
$$\approx 115.91$$

เนื่องจากรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะได้ว่า ด้าน AC ยาว 115.91 หน่วย
ดังนั้น ความยาวรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วข้างต้น ยาวประมาณ
$60+2(115.91)$ = 291.82 หน่วย

6.



ให้จุด E แทนจุดตัดของเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $ABCD$ ที่
$AB=32$ และ $BC=24$
และให้ θ แทนขนาดของมุมแหลมที่เกิดจากเส้นทแยงมุมสองเส้นตัดกัน
จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส $AC^2 = AB^2 + BC^2$

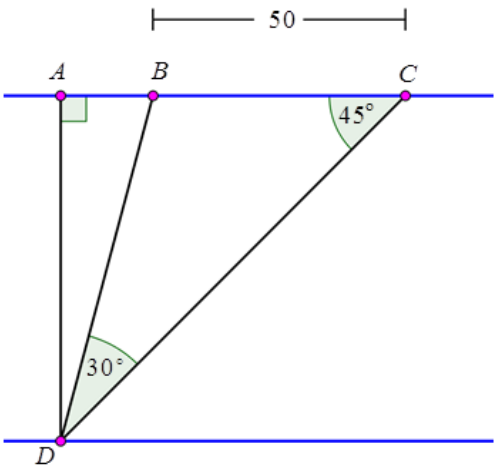
$= 32^2 + 24^2$
$= 1600$
$AC = 40$

ดังนั้น $EC = EB = 20$
จากกฎของโคไซน์ $BC^2 = EB^2 + EC^2 - 2(EB)(EC)\cos\theta$

$24^2 = 20^2 + 20^2 - 2(20)(20)\cos\theta$
$\cos\theta = 0.28$

จะได้ $\theta \approx 73.74°$
ดังนั้น ขนาดของมุมแหลมที่เกิดจากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ตัดกัน ประมาณ
$73.74°$

7.



ให้จุด A, B, C และ D แทนตำแหน่งบ้านของหมอก ขวัญ คะนึง และฤดี ตามลำดับ

จากกฎของไซน์ $\dfrac{\sin 45^\circ}{BD} = \dfrac{\sin 30^\circ}{50}$

$$BD = \frac{50\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}$$
$$= 50\sqrt{2}$$

เนื่องจากมุม $ABD = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$

จากกฎของไซน์ $\dfrac{\sin 90^\circ}{50\sqrt{2}} = \dfrac{\sin 75^\circ}{AD}$

$$AD = \frac{50\sqrt{2}\sin 75^\circ}{\sin 90^\circ}$$
$$\approx 68.30$$

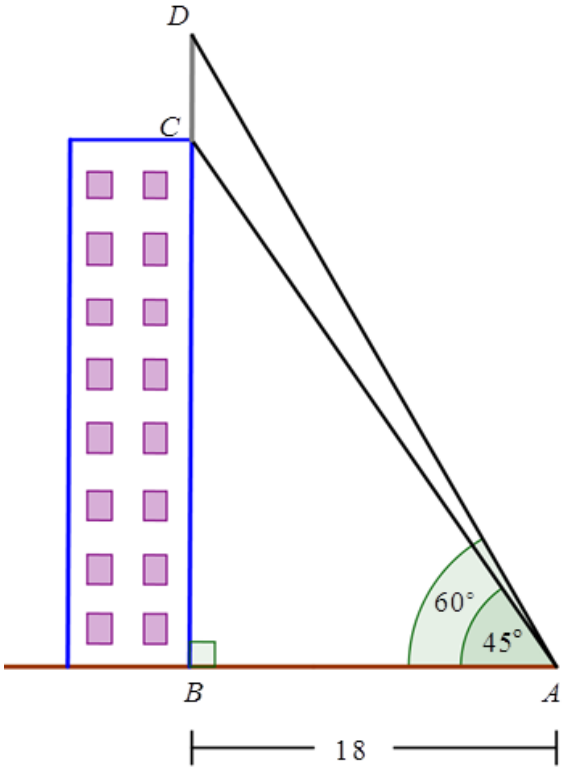
ดังนั้น ความกว้างของคลองนี้ประมาณ 68.30 เมตร

แบบฝึกหัด 1.9

1. ให้ A เป็นจุดที่พิเชษฐ์ยืนมองยอดตึกและยอดเสาอากาศ
   B เป็นฐานของตึก
   C เป็นยอดของตึก
   และ D เป็นยอดเสาอากาศซึ่งตั้งอยู่บนยอดตึก

จะได้ ระยะ AB เท่ากับ 18 เมตร

ระยะ BC และ CD เป็นความสูงของตึกและเสาอากาศ ตามลำดับ ดังรูป



จาก $B\hat{A}C = 45°$ และ $B\hat{A}D = 60°$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC จะได้

$$\begin{aligned} \tan B\hat{A}C &= \frac{BC}{AB} \\ \tan 45° &= \frac{BC}{18} \\ BC &= 18\tan 45° \\ &= (18)(1) \\ &= 18 \end{aligned}$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD จะได้

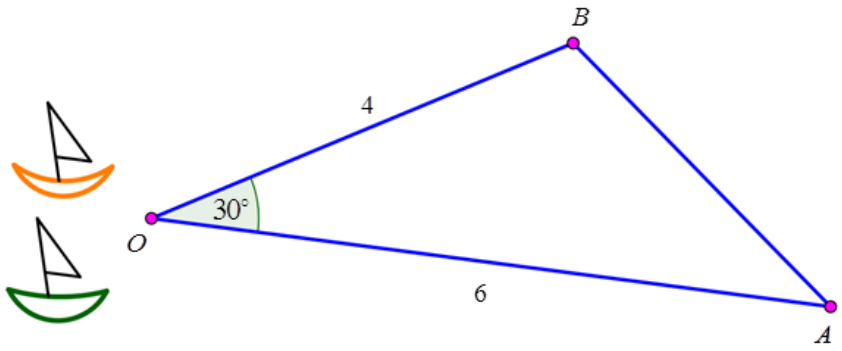
$$\begin{aligned} \tan B\hat{A}D &= \frac{BD}{AB} \\ \tan 60° &= \frac{BD}{18} \\ BD &= 18\tan 60° \end{aligned}$$

$= 18\sqrt{3}$

นั่นคือ $CD = BD - BC = 18\sqrt{3} - 18$

ดังนั้น เสาอากาศสูง $18\sqrt{3} - 18$ เมตร

2.



จากรูป และจากกฎของโคไซน์ จะได้

$$AB^2 = 6^2 + 4^2 - 2(6)(4)\cos 30°$$

$$= 36 + 16 - 2(6)(4)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\approx 10.43$$

จะได้ $AB \approx 3.23$

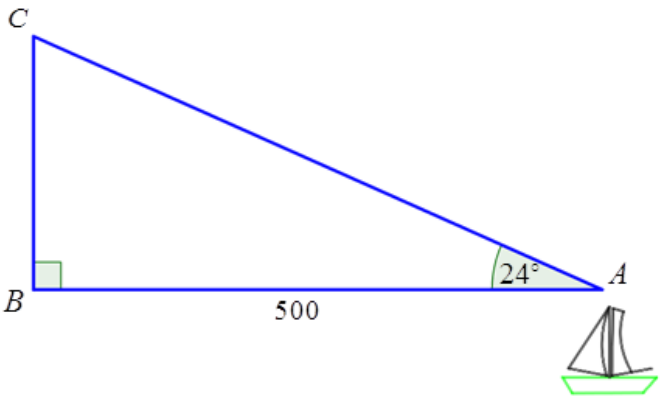
ดังนั้น ระยะระหว่างจุด A และจุด B ห่างกันประมาณ 3.23 กิโลเมตร

3. 1) ให้ A เป็นจุดที่ทิพย์มองยอดหน้าผา

B เป็นฐานของหน้าผาบนชายฝั่ง

ระยะ AB เท่ากับ 500 เมตร

และ BC เป็นความสูงของหน้าผาส่วนที่เหนือระดับสายตา ดังรูป



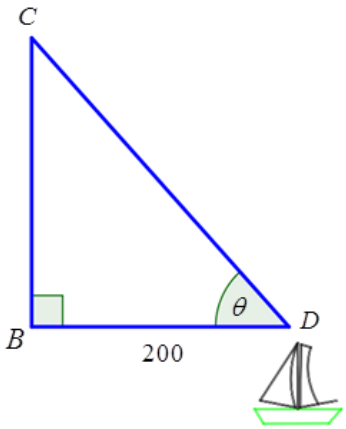
จาก $B\hat{A}C = 24°$ จะได้

$$\begin{aligned} \tan B\hat{A}C &= \frac{BC}{AB} \\ \tan 24° &= \frac{BC}{500} \\ BC &= 500\tan 24° \\ &\approx (500)(0.4452) \\ &\approx 222.6 \end{aligned}$$

ดังนั้น หน้าผาสูงประมาณ 222.6 เมตร

2) ให้ D เป็นจุดที่ทิพย์มองยอดหน้าผาเมื่อเรือใบอยู่ห่างจากแนวชายฝั่ง 200 เมตร ระยะ BD เท่ากับ 200 เมตร

และ θ เป็นขนาดของมุมเงยที่ทิพย์มองเห็นยอดหน้าผา ดังรูป



เนื่องจาก $B\hat{D}C = \theta$ จะได้

$$\tan\theta = \frac{BC}{BD}$$

นั่นคือ $$\tan\theta = \frac{222.6}{200}$$

$$\tan\theta = 1.113$$

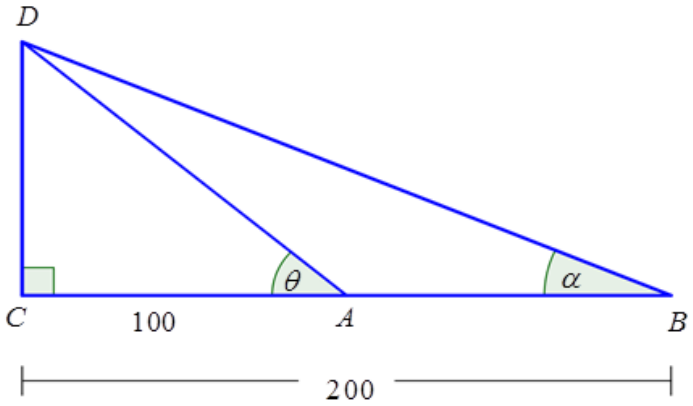
จะได้ $$\theta \approx 48.06^\circ$$

ดังนั้น ทิพย์มองเห็นยอดหน้าผาด้วยมุมเงย 48.06°

4. ให้ A เป็นจุดที่พิชัยยืนมองยอดเสาอากาศเป็นมุม θ

B เป็นจุดที่พิชัยยืนมองยอดเสาอากาศเป็นมุม α

และ CD เป็นความสูงของเสาอากาศ ดังรูป



จาก $\theta + \alpha = 90^\circ$ จะได้ $\alpha = 90^\circ - \theta$

เนื่องจาก $C\hat{A}D = \theta$ จะได้ $A\hat{D}C = 90^\circ - \theta = \alpha$

และเนื่องจาก $C\hat{B}D = \alpha$ จะได้ $B\hat{D}C = 90^\circ - \alpha = \theta$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ACD จะได้

$$\tan C\hat{A}D = \frac{CD}{AC}$$

$$\tan\theta = \frac{CD}{AC}$$

$$CD = AC\tan\theta$$

$$= 100\tan\theta$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม BCD จะได้

$$\tan B\hat{D}C = \frac{BC}{CD}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{CD}$$

$$CD = \frac{BC}{\tan\theta}$$

$$= \frac{200}{\tan\theta}$$

นั่นคือ $100\tan\theta = \frac{200}{\tan\theta}$

$$\tan^2\theta = 2$$

$$\tan\theta = \sqrt{2} \qquad \text{เพราะว่า } \theta > 0$$

จะได้ $CD = 100\tan\theta = 100\sqrt{2}$

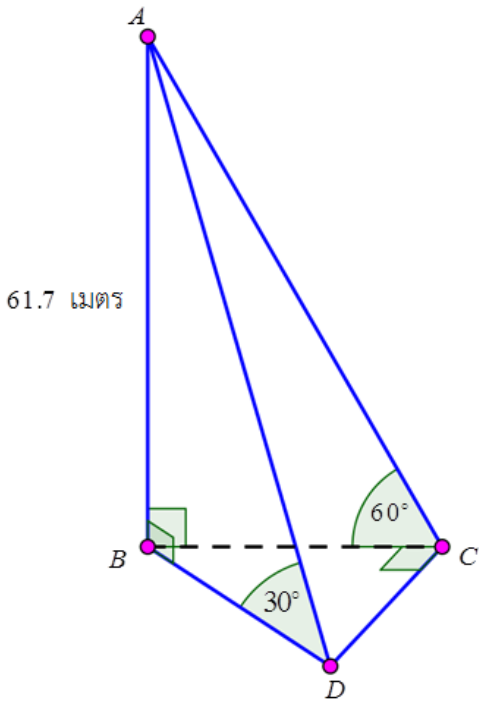
ดังนั้น เสาอากาศสูง $100\sqrt{2}$ เมตร

5. ให้ A เป็นจุดที่ก้านยืนมองรถบรรทุกและป้อมยาม

B เป็นฐานของตึก

ระยะ $AB = 4(15)+1.7 = 61.7$ เมตร

C และ D เป็นตำแหน่งของป้อมยามและรถบรรทุก ตามลำดับ ดังรูป



เนื่องจากก้านมองเห็นป้อมยามเป็นมุมก้ม $60°$
จะได้ $A\hat{C}B = 60°$ และ

$$\begin{aligned}\tan A\hat{C}B &= \frac{AB}{BC}\\ \tan 60° &= \frac{61.7}{BC}\\ BC &= \frac{61.7}{\tan 60°}\\ &= \frac{61.7}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

และเนื่องจากก้านมองเห็นรถบรรทุกเป็นมุมก้ม $30°$
จะได้ $A\hat{D}B = 30°$ และ

$$\begin{aligned}\tan A\hat{D}B &= \frac{AB}{BD}\\ \tan 30° &= \frac{61.7}{BD}\\ BD &= \frac{61.7}{\tan 30°}\\ &= 61.7\left(\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

เนื่องจากรถบรรทุกอยู่ทางทิศใต้ของป้อมยาม จะได้ $B\hat{C}D = 90°$
นั่นคือรูปสามเหลี่ยม BCD เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$\begin{aligned}BD^2 &= BC^2 + CD^2\\ CD^2 &= BD^2 - BC^2\\ &= \left(61.7\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{61.7}{\sqrt{3}}\right)^2\\ &= \left(3 - \frac{1}{3}\right)(61.7)^2\\ &= \frac{8}{3}(61.7)^2\end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned}CD &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times 61.7\\ &\approx 100.76\end{aligned}$$

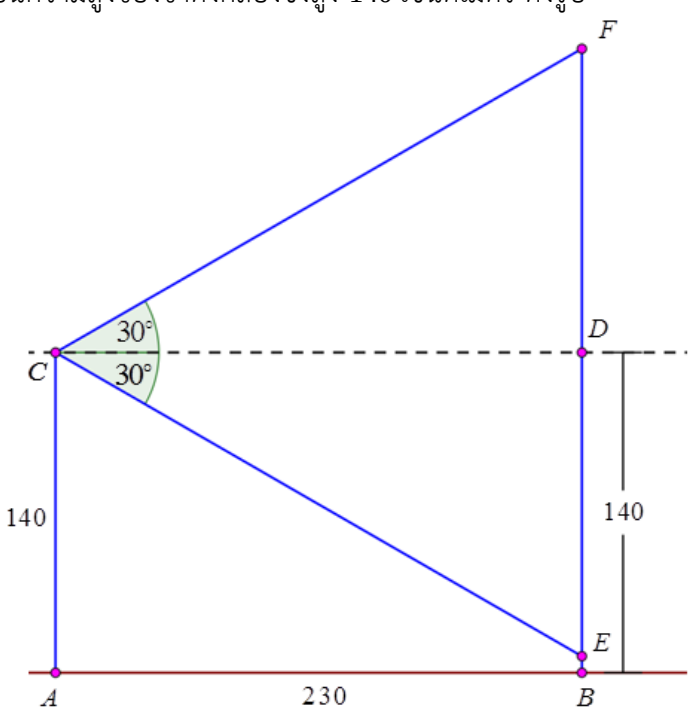
ดังนั้น รถบรรทุกอยู่จากป้อมยามเป็นระยะประมาณ 100.76 เมตร

6. ให้ A เป็นตำแหน่งที่ตั้งกล้อง

B เป็นตำแหน่งที่นรินทร์ยืน

ระยะ AB เท่ากับ 230 เซนติเมตร

AC เป็นความสูงของขาตั้งกล้องซึ่งสูง 140 เซนติเมตร ดังรูป



เนื่องจาก $E\hat{C}D = 30°$ จะได้

$$\begin{aligned} \tan E\hat{C}D &= \frac{DE}{CD} \\ \tan 30° &= \frac{DE}{230} \\ DE &= 230\tan 30° \\ &= 230\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &\approx 132.79 \end{aligned}$$

นั่นคือ ระยะ DE น้อยกว่า ระยะ DB

ดังนั้น กล้องไม่สามารถถ่ายภาพเต็มตัวของนรินทร์ได้

ให้ y คือระยะห่างระหว่างจุดตั้งกล้องและจุดที่นรินทร์ยืน เพื่อให้ถ่ายภาพได้เต็มตัว

จะได้ $\tan 30° = \frac{BD}{y}$

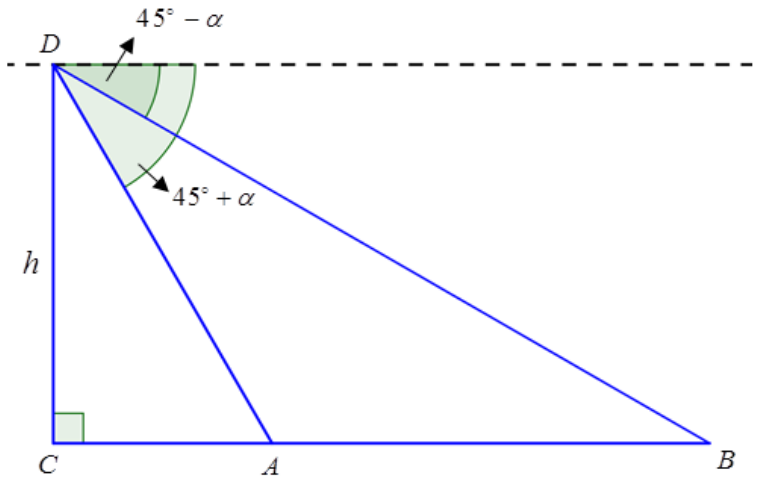
$$y = \frac{140}{\tan 30°}$$
$$= \frac{140}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$= 140\sqrt{3}$$
$$\approx 242.49$$

ดังนั้น นรินทร์ต้องยืนห่างจากจุดที่ตั้งกล้องอย่างน้อย 242.49 เซนติเมตร จึงจะได้ภาพถ่ายเต็มตัว

7. ให้ A เป็นตำแหน่งของวัตถุชิ้นที่ 1

B เป็นตำแหน่งของวัตถุชิ้นที่ 2

CD เป็นความสูงของหอคอย จะได้ $CD = h$ เมตร ดังรูป



โดยใช้ความรู้เรื่องเส้นขนาน จะได้

$D\hat{A}C = 45° + \alpha$ และ $D\hat{B}C = 45° - \alpha$ จะได้

$$\tan D\hat{A}C = \frac{CD}{AC}$$
$$\tan(45° + \alpha) = \frac{h}{AC}$$
$$AC = \frac{h}{\tan(45° + \alpha)}$$

และ $\tan D\hat{B}C = \frac{CD}{BC}$

$\tan(45^\circ - \alpha) = \frac{h}{BC}$

$BC = \frac{h}{\tan(45^\circ - \alpha)}$

จะได้ $AB = CB - CA$

$= \frac{h}{\tan(45^\circ - \alpha)} - \frac{h}{\tan(45^\circ + \alpha)}$

$= h\left[\frac{1}{\tan(45^\circ - \alpha)} - \frac{1}{\tan(45^\circ + \alpha)}\right]$

$= h\left[\frac{1+\tan 45^\circ \tan\alpha}{\tan 45^\circ - \tan\alpha} - \frac{1-\tan 45^\circ \tan\alpha}{\tan 45^\circ + \tan\alpha}\right]$

$= h\left[\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} - \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}\right]$

$= h\left[\frac{(1+\tan\alpha)^2 - (1-\tan\alpha)^2}{(1-\tan\alpha)(1+\tan\alpha)}\right]$

$= h\left[\frac{(1+\tan\alpha-1+\tan\alpha)(1+\tan\alpha+1-\tan\alpha)}{1-\tan^2\alpha}\right]$

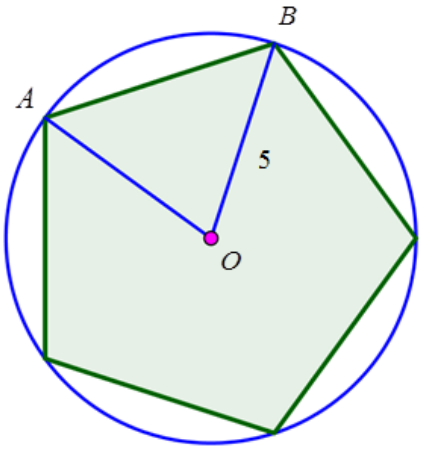
$= h\left[\frac{(2\tan\alpha)(2)}{1-\tan^2\alpha}\right]$

$= 2h\left(\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\right)$

$= 2h\tan 2\alpha$

ดังนั้น วัตถุทั้งสองอยู่ห่างกัน $2h\tan 2\alpha$ เมตร

8. 1)



เนื่องจาก $A\hat{O}B = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

และเนื่องจากวงกลมมีรัศมี 5 เซนติเมตร จะได้ว่า $OA = OB = 5$ เซนติเมตร

จากกฎของโคไซน์ $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2(OA)(OB)\cos A\hat{O}B$

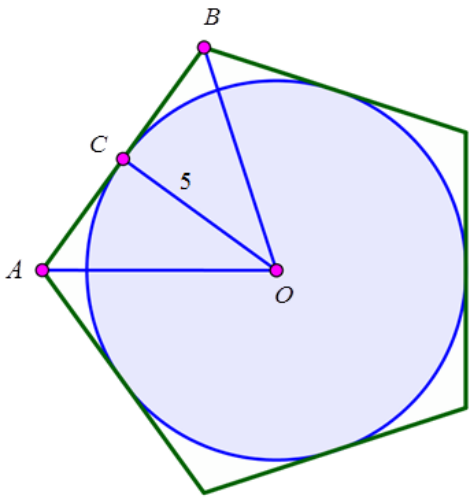
$= 5^2 + 5^2 - 2(5)(5)\cos 72^\circ$

≈ 34.55

จะได้ $AB \approx 5.88$

ดังนั้น ความยาวรอบรูปของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่านี้ประมาณ $5 \times 5.88 = 29.4$ เซนติเมตร

2)

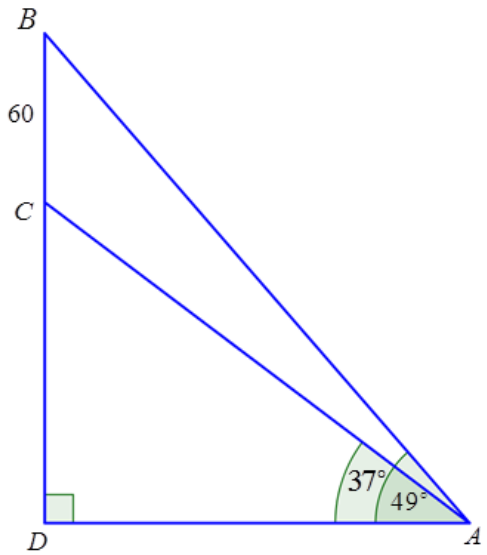


เนื่องจากมุมภายในของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ารวมกันเป็น $540°$
จะได้มุมแต่ละมุมมีขนาด $108°$
นั่นคือ $O\hat{A}B = 54° = O\hat{A}C$ จะได้

$$\begin{aligned} \tan O\hat{A}C &= \frac{OC}{AC} \\ \tan 54° &= \frac{5}{AC} \\ AC &= \frac{5}{\tan 54°} \\ &\approx \frac{5}{1.3764} \\ &\approx 3.63 \end{aligned}$$

นั่นคือ $AB \approx 2 \times 3.63 = 7.26$
ดังนั้น ความยาวรอบรูปของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่านี้ประมาณ
$5 \times 7.26 = 36.3$ เซนติเมตร

9. ให้ A เป็นจุดที่อัญชันยืนมองยอดหอคอย
B เป็นตำแหน่งของยอดหอคอย
C เป็นตำแหน่งของฐานหอคอย
ระยะ BC เท่ากับ 60 เมตร
และ D เป็นตำแหน่งของตีนเขา ดังรูป



เนื่องจาก $D\hat{A}C = 37°$ และ $D\hat{A}B = 49°$

จะได้ $C\hat{A}B = 49° - 37° = 12°$ และ $A\hat{B}D = 90° - 49° = 41°$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC จากกฎของไซน์ จะได้

$$\frac{\sin A\hat{B}C}{AC} = \frac{\sin B\hat{A}C}{BC}$$

นั่นคือ
$$\frac{\sin 41°}{AC} = \frac{\sin 12°}{60}$$
$$AC = \frac{60\sin 41°}{\sin 12°}$$
$$\approx 189.33$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ADC จะได้ว่า

$$\sin D\hat{A}C = \frac{CD}{AC}$$
$$\sin 37° = \frac{CD}{AC}$$
$$CD = AC\sin 37°$$
$$\approx (189.33)(0.6018)$$
$$\approx 113.94$$

ดังนั้น ฐานหอคอยอยู่ห่างจากอัญชัน 189.33 เมตร และภูเขาลูกนี้สูง 113.94 เมตร

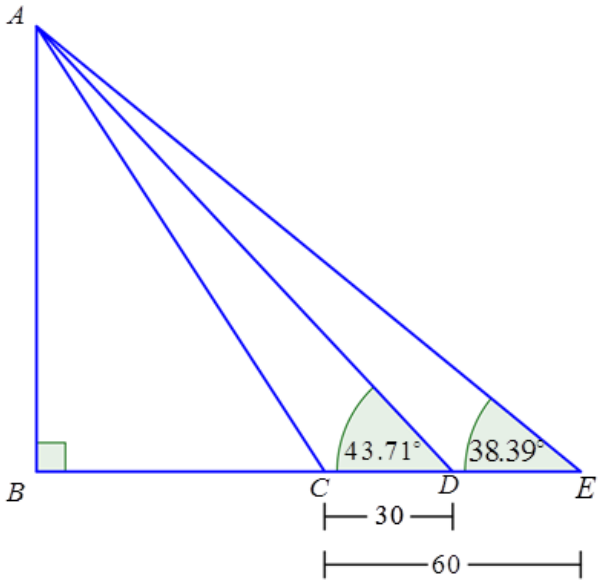
10. ให้ A เป็นจุดยอดของพีระมิด

B เป็นจุดกึ่งกลางของฐานของพีระมิด

C เป็นจุดปลายฐานของพีระมิด

จะได้ AB เป็นความสูงของพีระมิด

และให้ D และ E เป็นตำแหน่งที่อยู่ห่างจากปลายฐานของพีระมิดเป็นระยะ 30 เมตร และ 60 เมตร ตามลำดับ ดังรูป



จะได้ $B\hat{D}A = 43.71°$ และ $B\hat{E}A = 38.39°$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD จะได้ว่า

$$\tan B\hat{D}A = \frac{AB}{BD}$$

$$\tan 43.71° = \frac{AB}{BC+30}$$

$$AB = (BC+30)\tan 43.71°$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABE จะได้ว่า

$$\tan B\hat{E}A = \frac{AB}{BE}$$

$$\tan 38.39° = \frac{AB}{BC+60}$$

$$AB = (BC+60)\tan 38.39°$$

นั่นคือ $(BC+30)\tan 43.71° = (BC+60)\tan 38.39°$

$$BC\tan 43.71° + 30\tan 43.71° = BC\tan 38.39° + 60\tan 38.39°$$

$$(\tan 43.71° - \tan 38.39°)BC = 60\tan 38.39° - 30\tan 43.71°$$

$$BC = \frac{60\tan 38.39° - 30\tan 43.71°}{\tan 43.71° - \tan 38.39°}$$

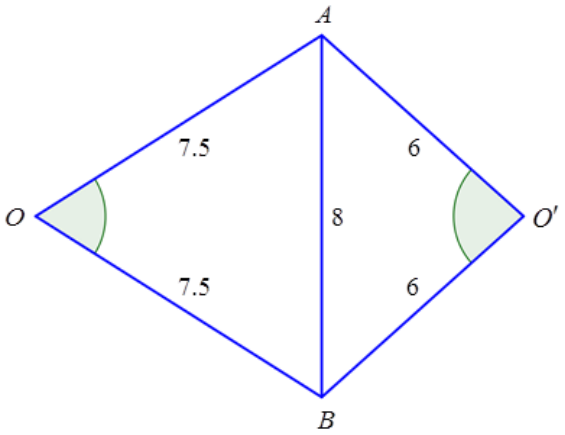
$$BC \approx \frac{60(0.7923) - 30(0.9560)}{0.9560 - 0.7923}$$

$$BC \approx 115.20$$

จะได้ $AB \approx (115.20+30)\tan 43.71° \approx 138.80$

ดังนั้น ความสูงของพีระมิดในปัจจุบัน สูงประมาณ 138.80 เมตร

11.



จากกฎของโคไซน์

พิจารณารูปสามเหลี่ยม AOB

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2(OA)(OB)\cos A\hat{O}B$$

จะได้ $8^2 = 7.5^2 + 7.5^2 - 2(7.5)(7.5)\cos A\hat{O}B$

$$112.5\cos A\hat{O}B = 48.5$$

$$\cos A\hat{O}B \approx 0.4311$$

นั่นคือ $A\hat{O}B \approx 64.46$ องศา

พิจารณารูปสามเหลี่ยม $AO'B$

$$AB^2 = O'A^2 + O'B^2 - 2(O'A)(O'B)\cos A\hat{O}'B$$

จะได้ $8^2 = 6^2 + 6^2 - 2(6)(6)\cos A\hat{O}'B$

$$72\cos A\hat{O}'B = 8$$

$$\cos A\hat{O}'B \approx 0.1111$$

นั่นคือ $A\hat{O}'B \approx 83.62$ องศา

ดังนั้น มุม AOB มีขนาด 64.46 องศา และมุม $AO'B$ มีขนาด 83.62 องศา

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของจำนวนจริงที่กำหนดให้แสดงดังตารางต่อไปนี้

	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
1)	-53π	0	-1	0	ไม่นิยาม	-1	ไม่นิยาม
2)	$\frac{11\pi}{2}$	-1	0	ไม่นิยาม	-1	ไม่นิยาม	0
3)	$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1
4)	$\frac{14\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
5)	$\frac{35\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
6)	$-\frac{11\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
7)	$-\frac{19\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
8)	$-\frac{49\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1

2. จาก $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

จะได้ $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{60}{61}\right)^2=\frac{121}{3721}$

เนื่องจาก $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ จะได้ $\cos\theta=-\frac{11}{61}$

1) $\sin(2\pi-\theta) = -\sin\theta = -\frac{60}{61}$

2) $\operatorname{cosec}(-\theta) = \frac{1}{\sin(-\theta)} = \frac{1}{-\sin\theta} = \frac{1}{-\frac{60}{61}} = -\frac{61}{60}$

3) $\cos(2\pi-\theta) = \cos\theta = -\frac{11}{61}$

4) $\tan(3\pi+\theta) = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{60}{61}}{\left(-\frac{11}{61}\right)} = -\frac{60}{11}$

5) $\cot(\pi-\theta) = -\cot\theta = -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\dfrac{\left(-\frac{11}{61}\right)}{\frac{60}{61}} = \dfrac{11}{60}$

6) $\sec(\theta-2\pi) = \sec\left(-(2\pi-\theta)\right) = \sec(2\pi-\theta) = \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = -\dfrac{61}{11}$

3. เนื่องจาก $1+\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

จะได้ $\operatorname{cosec}^2\theta = 1+\left(\dfrac{8}{15}\right)^2 = 1+\dfrac{64}{225} = \dfrac{289}{225}$

นั่นคือ $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{17}{15}$ เพราะ $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\sin\theta = \dfrac{15}{17}$

เนื่องจาก $\cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$

จะได้ $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\left(\dfrac{15}{17}\right)^2 = \dfrac{64}{289}$

นั่นคือ $\cos\theta = \dfrac{8}{17}$ เพราะ $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\cos\theta+\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{8}{17}+\dfrac{17}{15} = \dfrac{409}{255}$

4. เนื่องจาก $\cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$

จะได้ $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\left(-\dfrac{35}{37}\right)^2 = \dfrac{144}{1369}$

นั่นคือ $\sin\theta = \dfrac{12}{37}$ เพราะ $\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$

จะได้ $\sec\theta = -\dfrac{37}{35}$ และ $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\dfrac{12}{35}$

ดังนั้น $\sec\theta+\tan\theta = -\dfrac{37}{35}-\dfrac{12}{35} = -\dfrac{49}{35} = -\dfrac{7}{5}$

5. เนื่องจาก $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$

จะได้ $\sec^2\theta = 1+\left(-\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{37}{36}$

นั่นคือ $\sec\theta = \frac{\sqrt{37}}{6}$ เพราะ $\frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$

จะได้ $\cot\theta = -6$ และ $\cos\theta = \frac{6\sqrt{37}}{37}$

ดังนั้น $\cot\theta - \cos\theta = -6 - \frac{6\sqrt{37}}{37} = -6\left(\frac{37+\sqrt{37}}{37}\right)$

6. 1) $\sec\frac{5\pi}{6} + \operatorname{cosec}\frac{7\pi}{3} - \cos\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{\cos\frac{5\pi}{6}} + \frac{1}{\sin\frac{7\pi}{3}} - \cos\frac{4\pi}{3}$

$= \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \left(-\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}$

2) $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \tan\frac{5\pi}{4} = -\sin\frac{7\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} + \tan\frac{5\pi}{4}$

$= -\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + 1$

$= 2$

3) $\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3} - \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)\tan\frac{2\pi}{6} = \sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3} + \cot\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$

$= 3 - \frac{\sqrt{3}}{4}$

4) $\tan^2\frac{\pi}{12} + \cot^2\frac{11\pi}{12} - \sec^2\frac{23\pi}{12} - \operatorname{cosec}^2\frac{13\pi}{12}$

$= \tan^2\frac{\pi}{12} + \cot^2\frac{\pi}{12} - \sec^2\frac{\pi}{12} - \operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{12}$

$= \left(\tan^2\frac{\pi}{12} - \sec^2\frac{\pi}{12}\right) + \left(\cot^2\frac{\pi}{12} - \operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{12}\right)$

$= (-1) + (-1)$

$= -2$

7. เนื่องจาก $-1 \le \cos\theta \le 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง θ

ถ้า $-1 \le \cos\theta < 0$ จะได้ $\frac{1}{\cos\theta} \le -1$

ถ้า $0 < \cos\theta \le 1$ จะได้ $\frac{1}{\cos\theta} \ge 1$

นั่นคือ $\left|\frac{1}{\cos\theta}\right| \ge 1$ หรือ $|\sec\theta| \ge 1$

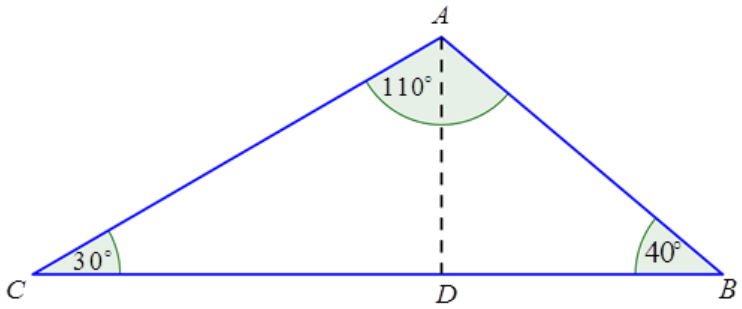
ดังนั้น ไม่มีจำนวนจริง θ ใด ๆ ที่ทำให้ $|\sec\theta| < 1$

8. เนื่องจากเรนจ์ของฟังก์ชัน tan คือ เซตของจำนวนจริง และ 5 เป็นจำนวนจริง

เมื่อ $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ จะได้ว่า $\tan\theta > 0$

ดังนั้น มีจำนวนจริง θ ที่ทำให้ $\tan\theta = 5$

9.



จากรูป จะได้ $\cos 40° = \frac{DB}{AB}$

นั่นคือ $DB = AB\cos 40° \approx 6(0.7660) = 4.5960$

$\sin 40° = \frac{AD}{AB}$

นั่นคือ $AD = AB\sin 40° \approx 6(0.6428) = 3.8568$

$\tan 30° = \frac{AD}{CD}$

นั่นคือ $CD = AD\cot 30° \approx (3.8568)(1.7320) \approx 6.6800$

และ $\sin 30° = \frac{AD}{AC}$

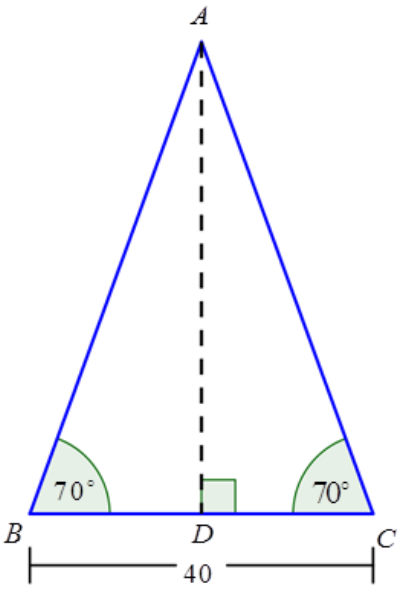
นั่นคือ $AC = AD\operatorname{cosec} 30° \approx (3.8568)(2) \approx 7.7136$

จะได้ $BC = CD + DB = 6.6800 + 4.5960 = 11.276$

ดังนั้น ด้าน BC ยาวประมาณ 11.276 เซนติเมตร

และด้าน CA ยาวประมาณ 7.7136 เซนติเมตร

10.



ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีมุม A เป็นมุมยอด

จากรูปจะได้ $BD = DC = 20$ นิ้ว

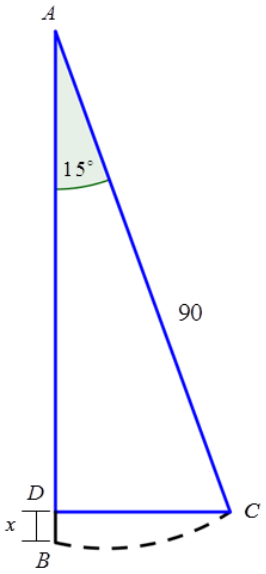
$$\cos 70^\circ = \frac{BD}{AB}$$

จะได้ $$AB = \frac{BD}{\cos 70^\circ} = \frac{20}{0.3420} \approx 58.4795$$

นั่นคือ $AB + AC + BC = 2(58.4795) + 40 = 156.959$

ดังนั้น ความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วข้างต้น ยาวประมาณ 156.959 นิ้ว

11.



จากรูปจะได้ $AB = AC = 90$

เนื่องจาก $\cos 15° = \frac{AD}{AC}$

จะได้ $AD = AC\cos 15° \approx 90(0.9659) = 86.931$

นั่นคือ $x = AB - AD = 90 - 86.931 = 3.069$

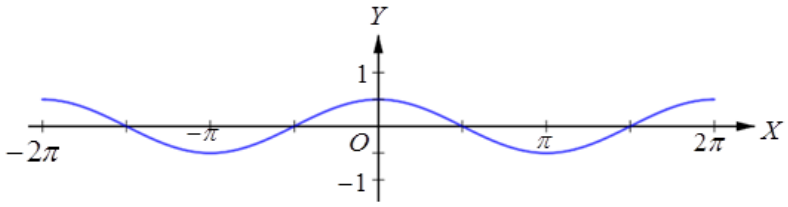
ดังนั้น x มีค่าประมาณ 3.069

12. 1) คาบ คือ 2π

แอมพลิจูด คือ $\frac{1}{2}$

เรนจ์ คือ $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

เขียนกราฟของ $y = \frac{1}{2}\cos\theta$ ได้ดังนี้

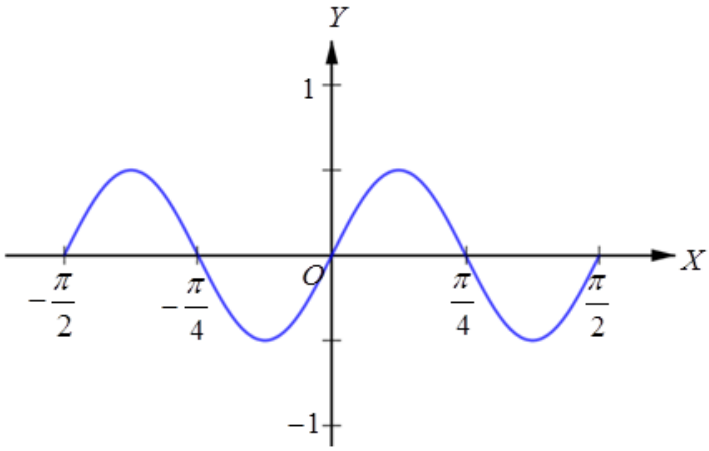


2) คาบ คือ $\frac{\pi}{2}$

แอมพลิจูด คือ $\frac{1}{2}$

เรนจ์ คือ $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

เขียนกราฟของ $y=\frac{1}{2}\sin 4\theta$

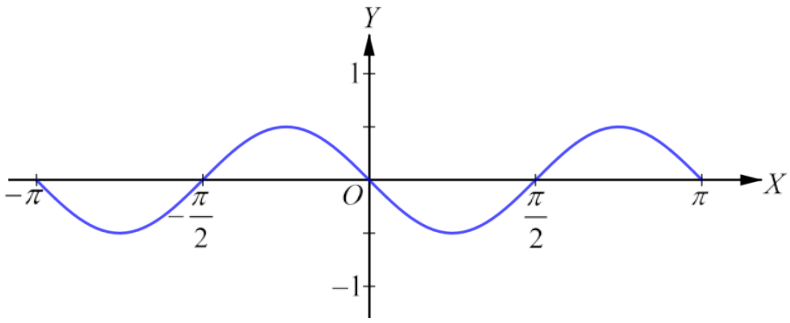


3) คาบ คือ π

แอมพลิจูด คือ $\frac{1}{2}$

เรนจ์ คือ $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

เขียนกราฟของ $y=\frac{1}{2}\sin(-2\theta)$ ได้ดังนี้

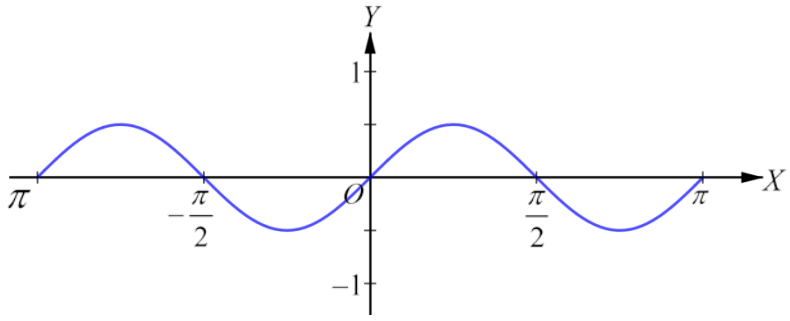


4) คาบ คือ π

แอมพลิจูด คือ $\frac{1}{2}$

เรนจ์ คือ $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

เขียนกราฟของ $y=-\frac{1}{2}\sin(-2\theta)$ ได้ดังนี้

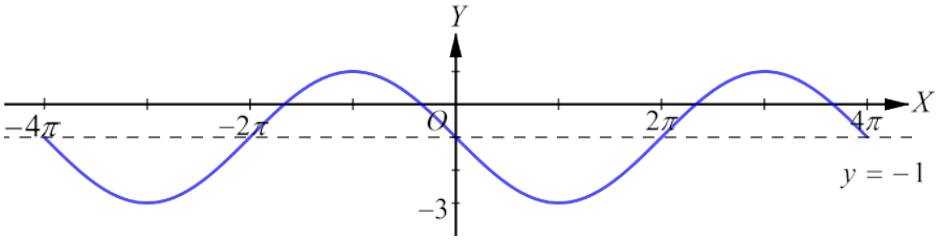


5) คาบ คือ 4π

แอมพลิจูด คือ 2

เรนจ์ คือ $[-3,1]$

เขียนกราฟของ $y=-2\sin\frac{1}{2}\theta-1$ ได้ดังนี้

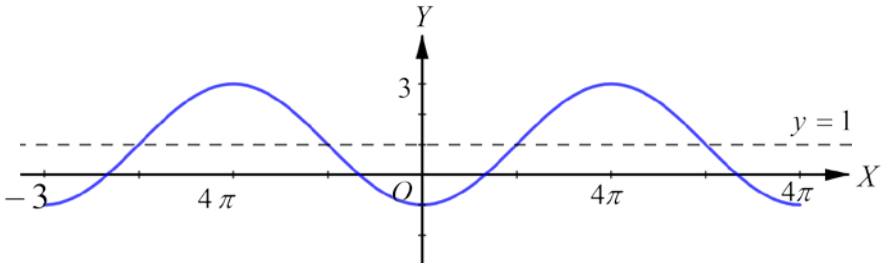


6) คาบ คือ 4π

แอมพลิจูด คือ 2

เรนจ์ คือ $[-1,3]$

เขียนกราฟของ $y=-2\cos\frac{1}{2}\theta+1$ ได้ดังนี้

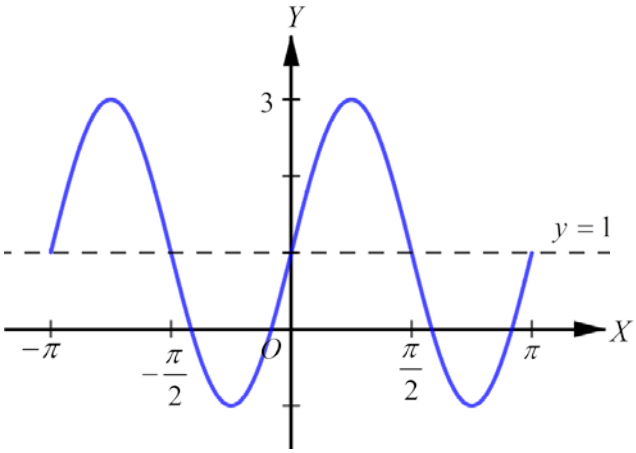


7) คาบ คือ π

แอมพลิจูด คือ 2

เรนจ์ คือ $[-1,3]$

เขียนกราฟของ $y=2\sin 2\theta+1$ ได้ดังนี้

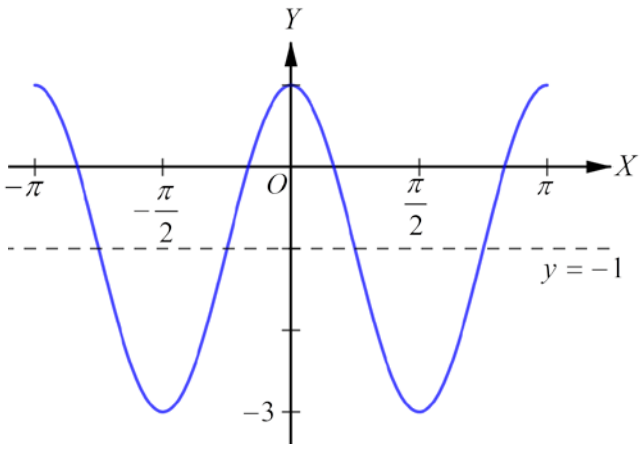


8) คาบ คือ π

แอมพลิจูด คือ 2

เรนจ์ คือ $[-3,1]$

เขียนกราฟของ $y=2\cos 2\theta-1$ ได้ดังนี้



13. 1) (ค)

2) (จ)

3) (ฉ)

4) (ข)

5) (ง)

6) (ก)

14. 1) $\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}$

$= \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{1}{(-1)\left(\frac{1}{2}\right)-(0)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$= -2$

2) $\cos 165^\circ = \cos(180^\circ-15^\circ)$

$= -\cos 15^\circ$

$$= -\cos(45^\circ - 30^\circ)$$
$$= -(\cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ)$$
$$= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

3) $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ)$
$$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

4) $\tan 285^\circ = \tan(360^\circ - 75^\circ)$
$$= -\tan 75^\circ$$
$$= -\tan(30^\circ + 45^\circ)$$
$$= -\frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ}$$
$$= -\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-3}$$
$$= -2-\sqrt{3}$$

5) $\sec\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$
$$= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)}$$
$$= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$= \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

6) $\cot\left(-\frac{17\pi}{12}\right) = -\cot\left(\pi+\frac{5\pi}{12}\right)$
$$= -\cot\frac{5\pi}{12}$$
$$= -\frac{1}{\tan\frac{5\pi}{12}}$$
$$= -\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}$$
$$= -\frac{1}{\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}}$$
$$= -\frac{1}{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}+3}$$
$$= \sqrt{3}-2$$

7) $\cos\frac{3\pi}{20}\cos\frac{7\pi}{20}-\sin\frac{3\pi}{20}\sin\frac{7\pi}{20} = \cos\left(\frac{3\pi}{20}+\frac{7\pi}{20}\right)$
$$= \cos\frac{\pi}{2}$$
$$= 0$$

8) $\dfrac{\tan 74^\circ - \tan 14^\circ}{1+\tan 74^\circ \tan 14^\circ} = \tan\left(74^\circ - 14^\circ\right)$

$= \tan 60^\circ$

$= \sqrt{3}$

9) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\cos\dfrac{5\pi}{12} - \cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\sin\dfrac{5\pi}{12} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{5\pi}{12}\right)$

$= \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$= -1$

10) $\cos 100^\circ \cos 5^\circ - \sin 100^\circ \sin 5^\circ = \cos\left(100^\circ + 5^\circ\right)$

$= \cos 105^\circ$

$= \cos\left(60^\circ + 45^\circ\right)$

$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

11) $\dfrac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ} = \dfrac{\tan 45^\circ + \tan 15^\circ}{1-\tan 45^\circ \tan 15^\circ}$

$= \tan\left(45^\circ + 15^\circ\right)$

$= \tan 60^\circ$

$= \sqrt{3}$

12) $2\sin\dfrac{11\pi}{12}\sin\dfrac{7\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{11\pi}{12} - \dfrac{7\pi}{12}\right) - \cos\left(\dfrac{11\pi}{12} + \dfrac{7\pi}{12}\right)$

$= \cos\dfrac{\pi}{3} - \cos\dfrac{3\pi}{2}$

$= \dfrac{1}{2}$

13) $\cos 165^\circ \cos 75^\circ = \dfrac{1}{2}\left[\cos\left(165^\circ + 75^\circ\right) + \cos\left(165^\circ - 75^\circ\right)\right]$

$= \dfrac{1}{2}\left(\cos 240^\circ + \cos 90^\circ\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(-\cos 60^\circ\right)$

$= -\dfrac{1}{4}$

14) $\sin 80^\circ \cos 25^\circ + \sin 100^\circ \cos 35^\circ + \cos 80^\circ \sin 25^\circ + \cos 100^\circ \sin 35^\circ$

$= \frac{1}{2}(\sin 105^\circ + \sin 55^\circ) + \frac{1}{2}(\sin 135^\circ + \sin 65^\circ) + \frac{1}{2}(\sin 105^\circ - \sin 55^\circ)$

$+ \frac{1}{2}(\sin 135^\circ - \sin 65^\circ)$

$= \sin 105^\circ + \sin 135^\circ$

$= \sin(180^\circ - 75^\circ) + \sin(180^\circ - 45^\circ)$

$= \sin 75^\circ + \sin 45^\circ$

$= \sin(30^\circ + 45^\circ) + \sin 45^\circ$

$= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ + \sin 45^\circ$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{4}$

15) $\cos 135^\circ + \cos 105^\circ + \cos 75^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) + \cos(180^\circ - 75^\circ) + \cos 75^\circ$

$= \cos(90^\circ + 45^\circ) - \cos 75^\circ + \cos 75^\circ$

$= \cos(90^\circ + 45^\circ)$

$= \cos 90^\circ \cos 45^\circ - \sin 90^\circ \sin 45^\circ$

$= (0) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

16) $\sin 80^\circ - \sin 40^\circ - \sin 20^\circ = 2\cos\left(\frac{80^\circ + 40^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{80^\circ - 40^\circ}{2}\right) - \sin 20^\circ$

$= 2\cos 60^\circ \sin 20^\circ - \sin 20^\circ$

$= 2\left(\frac{1}{2}\right)\sin 20^\circ - \sin 20^\circ$

$= 0$

15. 1) จาก $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

จะได้ $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$

ดังนั้น $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ เพราะ $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$

จาก $\tan \beta = -\sqrt{3}$ จะได้ $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \beta = -\frac{1}{2}$ เพราะ $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

ดังนั้น $\sin\alpha=\frac{5}{13},\cos\alpha=-\frac{12}{13},\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\beta=-\frac{1}{2},\tan\alpha=-\frac{5}{12}$ และ $\tan\beta=-\sqrt{3}$

จะได้ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{12}{13}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{-5-12\sqrt{3}}{26}$$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\left(-\frac{12}{13}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{12-5\sqrt{3}}{26}$$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{12}{13}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{-5+12\sqrt{3}}{26}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{-\frac{5}{12}-\left(-\sqrt{3}\right)}{1+\left(-\frac{5}{12}\right)\left(-\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{-5+12\sqrt{3}}{12+5\sqrt{3}}$$

2) จาก $\sec\alpha=-\frac{17}{8}$ จะได้ $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$

จาก $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

จะได้ $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(-\frac{8}{17}\right)^2=\frac{225}{289}$

ดังนั้น $\sin\alpha=-\frac{15}{17}$ เพราะ $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

และจาก $\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$

จะได้ $\cos^2\beta = 1-\sin^2\beta = 1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $\cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ เพราะ $-\frac{3\pi}{2} < \beta < -\pi$

ดังนั้น $\sin\alpha = -\frac{15}{17}, \cos\alpha = -\frac{8}{17}, \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan\alpha = \frac{15}{8}$ และ $\tan\beta = -1$

จะได้ $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \left(-\frac{15}{17}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(-\frac{8}{17}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{7\sqrt{2}}{34}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \left(-\frac{8}{17}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{15}{17}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{23\sqrt{2}}{34}$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$= \left(-\frac{15}{17}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{8}{17}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{23\sqrt{2}}{34}$

$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{\frac{15}{8}-(-1)}{1+\frac{15}{8}(-1)}$

$= -\frac{23}{7}$

16. จาก $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

จะได้ $\cos^2 x = 1-\sin^2 x = 1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

นั่นคือ $\cos x = \frac{4}{5}$ เพราะ $0 < x < \frac{\pi}{2}$

และ $\sin^2(x+y) + \cos^2(x+y) = 1$

จะได้ $\cos^2(x+y) = 1 - \sin^2(x+y) = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$

นั่นคือ $\cos(x+y) = -\frac{12}{13}$ เพราะ $\pi < x+y < \frac{3\pi}{2}$

จาก $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

จะได้ $-\frac{5}{13} = \frac{3}{5}\cos y + \frac{4}{5}\sin y$ ----------(1)

และจาก $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

จะได้ $-\frac{12}{13} = \frac{4}{5}\cos y - \frac{3}{5}\sin y$ ----------(2)

จาก (1) จะได้ $-\frac{15}{65} = \frac{9}{25}\cos y + \frac{12}{25}\sin y$ ----------(3)

จาก (2) จะได้ $-\frac{48}{65} = \frac{16}{25}\cos y - \frac{12}{25}\sin y$ ----------(4)

จาก (3) และ (4) จะได้ $\cos y = -\frac{63}{65}$

จาก (1) จะได้ $-\frac{20}{65} = \frac{12}{25}\cos y + \frac{16}{25}\sin y$ ----------(5)

จาก (2) จะได้ $-\frac{36}{65} = \frac{12}{25}\cos y - \frac{9}{25}\sin y$ ----------(6)

จาก (5) และ (6) จะได้ $\sin y = \frac{16}{65}$

ดังนั้น $\sin x = \frac{3}{5}, \cos x = \frac{4}{5}, \sin y = \frac{16}{65}$ และ $\cos y = -\frac{63}{65}$

1) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

2) $\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$

3) $\sin y = \frac{16}{65}$

4) $\cos(x-y) = \cos x\cos y+\sin x\sin y = \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{63}{65}\right)+\frac{3}{5}\cdot\frac{16}{65} = -\frac{204}{325}$

17. $\cot 2x = \frac{1}{\tan 2x}$

$= \frac{1}{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}$

$= \frac{1-\tan^2 x}{2\tan x}$

$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\left(\frac{1}{2}\right)}$

$= \frac{3}{4}$

18. จาก $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$

จะได้ $\cos 2(0.52) = 1-2\sin^2(0.52)$

นั่นคือ $\cos 1.04 = 1-2\sin^2(0.52)$

$0.50 = 1-2\sin^2(0.52)$

$\sin^2(0.52) = 0.25$

ดังนั้น $\sin 0.52 = 0.5$ เพราะ $0<0.52<\frac{\pi}{2}$

19. 1) $\sin(\pi+\theta) = \sin\pi\cos\theta+\cos\pi\sin\theta$

$= (0)\cdot\cos\theta+(-1)\cdot\sin\theta$

$= -\sin\theta$

2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = \sin\frac{3\pi}{2}\cos\theta+\cos\frac{3\pi}{2}\sin\theta$

$= (-1)\cdot\cos\theta+(0)\cdot\sin\theta$

$= -\cos\theta$

3) $\tan(90^\circ-A) = \frac{\sin(90^\circ-A)}{\cos(90^\circ-A)}$

$= \frac{\sin 90^\circ\cos A-\cos 90^\circ\sin A}{\cos 90^\circ\cos A+\sin 90^\circ\sin A}$

$$= \frac{(1)\cdot\cos A-(0)\cdot\sin A}{(0)\cdot\cos A+(1)\cdot\sin A}$$

$$= \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$= \cot A$$

4) $$\sec(90^\circ - A) = \frac{1}{\cos(90^\circ - A)}$$

$$= \frac{1}{\cos 90^\circ\cos A+\sin 90^\circ\sin A}$$

$$= \frac{1}{(0)\cdot\cos A+(1)\cdot\sin A}$$

$$= \frac{1}{\sin A}$$

$$= \operatorname{cosec} A$$

5) $$\tan(270^\circ - A) = \frac{\sin(270^\circ - A)}{\cos(270^\circ - A)}$$

$$= \frac{\sin 270^\circ\cos A-\cos 270^\circ\sin A}{\cos 270^\circ\cos A+\sin 270^\circ\sin A}$$

$$= \frac{(-1)\cdot\cos A-(0)\cdot\sin A}{(0)\cdot\cos A+(-1)\cdot\sin A}$$

$$= \frac{-\cos A}{-\sin A}$$

$$= \cot A$$

6) $$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$$

7) $$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$$

$$= 1+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$$

$$= 1+\cot\alpha\tan\beta$$

8) $$\cos(x+45°)+\cos(x-45°) = 2\cos\left(\frac{x+45°+x-45°}{2}\right)\cos\left(\frac{x+45°-x+45°}{2}\right)$$
$$= 2\cos x\cos 45°$$
$$= 2\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \sqrt{2}\cos x$$

9) $$\sin(x+y)\sin(x-y) = (\sin x\cos y+\cos x\sin y)(\sin x\cos y-\cos x\sin y)$$
$$= \sin^2 x\cos^2 y-\cos^2 x\sin^2 y$$
$$= \sin^2 x(1-\sin^2 y)-(1-\sin^2 x)\sin^2 y$$
$$= \sin^2 x-\sin^2 x\sin^2 y-\sin^2 y+\sin^2 x\sin^2 y$$
$$= \sin^2 x-\sin^2 y$$

10) $$\frac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha+\sin 2\alpha} = \frac{1+(1-2\sin^2\alpha)}{2\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$= \frac{2(1-\sin^2\alpha)}{2\cos\alpha(1+\sin\alpha)}$$
$$= \frac{2(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{2\cos\alpha(1+\sin\alpha)}$$
$$= \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$= \sec\alpha-\tan\alpha$$

11) $$\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{\sec^2\alpha}$$
$$= \frac{2\sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$$
$$= 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$= \sin 2\alpha$$

12) $$\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1-\tan^2\alpha}{\sec^2\alpha}$$
$$= \cos^2\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha$$
$$= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$= \cos 2\alpha$$

13) $\cos 4\alpha = \cos 2(2\alpha)$

$= 2\cos^2 2\alpha - 1$

$= 2(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1$

$= 2(4\cos^4\alpha - 4\cos^2\alpha + 1) - 1$

$= 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 2 - 1$

$= 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

14) $(\operatorname{cosec}^2\alpha - 2)\tan 2\alpha = (\cot^2\alpha - 1)\tan 2\alpha$

$= (\cot\alpha - 1)(\cot\alpha + 1)\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$= \left(\dfrac{1}{\tan\alpha} - 1\right)\left(\dfrac{1}{\tan\alpha} + 1\right)\dfrac{2\tan\alpha}{(1-\tan\alpha)(1+\tan\alpha)}$

$= \left(\dfrac{1-\tan\alpha}{\tan\alpha}\right)\left(\dfrac{1+\tan\alpha}{\tan\alpha}\right)\dfrac{2\tan\alpha}{(1-\tan\alpha)(1+\tan\alpha)}$

$= \dfrac{2}{\tan\alpha}$

$= 2\cot\alpha$

20. 1) ให้ $\arctan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \theta$ จะได้ $\tan\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ มี $-\dfrac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ดังนั้น $\arctan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$

2) ให้ $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta$ จะได้ $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $[0, \pi]$ มี $\dfrac{5\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$

และ $\cos\left(\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3) ให้ $\arccos\frac{1}{3}=\theta$ จะได้ $\cos\theta=\frac{1}{3}$ โดยที่ $0\le\theta\le\pi$

จาก $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

จะได้ $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

นั่นคือ $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ เพราะ $0\le\theta\le\pi$

ดังนั้น $\tan\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = \tan\theta$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

4) ให้ $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)=\theta$ จะได้ $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{3}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

จะได้ $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$

นั่นคือ $\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{3}$ เพราะ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\cot\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) = \cot\theta$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{-\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

$$= -\frac{\sqrt{14}}{2}$$

5) ให้ $\arctan\frac{1}{2}=\theta$ จะได้ $\tan\theta=\frac{1}{2}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

จาก $\tan\theta=\frac{1}{2}$ จะได้ $\cot\theta=2$ และ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

จาก $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

จะได้ $\operatorname{cosec}^2\theta=1+2^2=5$

นั่นคือ $\operatorname{cosec}\theta=\sqrt{5}$ เพราะ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\operatorname{cosec}\left(\arctan\frac{1}{2}\right)=\operatorname{cosec}\theta$

$=\sqrt{5}$

6) ให้ $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\theta$ จะได้ $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ โดยที่ $0\le\theta\le\pi$

จาก $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ จะได้ $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi$

จาก $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

จะได้ $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{2}{3}$

นั่นคือ $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$ เพราะ $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi$

ดังนั้น $\cot\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)=\cot\theta$

$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

7) ให้ $\arccos\frac{1}{3}=\theta$ จะได้ $\cos\theta=\frac{1}{3}$ โดยที่ $0\le\theta\le\pi$

จาก $\cos\theta=\frac{1}{3}$ จะได้ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

จะได้ $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

นั่นคือ $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ เพราะ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\operatorname{cosec}\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = \operatorname{cosec}\theta$

$= \frac{1}{\sin\theta}$

$= \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

$= \frac{3\sqrt{2}}{4}$

8) ให้ $\arccos a=\theta$ จะได้ $\cos\theta=a$ โดยที่ $0\le\theta\le\pi$

จาก $\cos\theta=a$ และ $0<a\le1$ จะได้ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

จะได้ $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-a^2$

นั่นคือ $\sin\theta=\sqrt{1-a^2}$ เพราะ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\sin\left(2\arccos a\right) = \sin 2\theta$

$= 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2\sqrt{1-a^2}a$

$= 2a\sqrt{1-a^2}$

9) พิจารณา $\cos\frac{5\pi}{2}+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0+(-1)=-1$

ให้ $\arctan(-1)=\theta$ จะได้ $\tan\theta=-1$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ มี $-\frac{\pi}{4}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$

ดังนั้น $\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$

และ $\arctan\left(\cos\frac{5\pi}{2}+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

10) พิจารณา $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ให้ $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\theta$ จะได้ $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $[0,\pi]$ ไม่มีจำนวนจริง θ ใดที่ทำให้ $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น $\arccos 1=\varnothing$

และ $\arccos\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \varnothing$

11) พิจารณา $\tan\frac{5\pi}{4}=1$

ให้ $\arccos 1=\theta$ จะได้ $\cos\theta=1$

เนื่องจากในช่วง $[0,\pi]$ มี 0 เพียงค่าเดียวที่ $\cos 0=1$

ดังนั้น $\arccos 1=0$

และ $\arccos\left(\tan\frac{5\pi}{4}\right) = \arccos 1 = 0$

12) เนื่องจาก $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

จะได้ $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$

และ $\arcsin\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$

ดังนั้น $\tan\left(\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)-\arcsin\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$= \frac{\tan\frac{5\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{5\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}-1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$= -2-\sqrt{3}$$

21. 1) ให้ $\arcsin\frac{4}{5}=\theta$ จะได้ $\sin\theta=\frac{4}{5}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\sin\theta=\frac{4}{5}$ จะได้ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

จะได้ $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

นั่นคือ $\cos\theta=\frac{3}{5}$ เพราะ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

ให้ $\arccos\frac{12}{13}=\alpha$ จะได้ $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ โดยที่ $0\le\alpha\le\pi$

เนื่องจาก $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ จะได้ $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

จะได้ $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{12}{13}\right)^2=\frac{25}{169}$

นั่นคือ $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ เพราะ $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$

และให้ $\arcsin\frac{16}{65}=\beta$ จะได้ $\sin\beta=\frac{16}{65}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}\le\beta\le\frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\sin\beta=\frac{16}{65}$ จะได้ $0\le\beta\le\frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$

จะได้ $\cos^2\beta=1-\sin^2\beta=1-\left(\frac{16}{65}\right)^2=\frac{3969}{4225}$

นั่นคือ $\cos\beta=\frac{63}{65}$ เพราะ $0\le\beta\le\frac{\pi}{2}$

พิจารณา $\sin(\theta+\alpha+\beta)$

$$
\begin{aligned}
&= \sin\big((\theta+\alpha)+\beta\big)\\
&= \sin(\theta+\alpha)\cos\beta+\cos(\theta+\alpha)\sin\beta\\
&= (\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)\cos\beta+(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha)\sin\beta\\
&= \sin\theta\cos\alpha\cos\beta+\cos\theta\sin\alpha\cos\beta+\cos\theta\cos\alpha\sin\beta-\sin\theta\sin\alpha\sin\beta\\
&= \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{63}{65}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{63}{65}+\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{65}-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{16}{65}
\end{aligned}
$$

$= 1$ โดยที่ $0 \le \theta + \alpha + \beta \le \frac{3\pi}{2}$

นั่นคือ $\theta + \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{12}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$

2) ให้ $\arctan\frac{1}{3} = \theta$ จะได้ $\tan\theta = \frac{1}{3}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

จะได้ $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$= \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

$= \frac{3}{4}$

จะได้ $2\theta = \arctan\frac{3}{4}$

ดังนั้น $2\arctan\frac{1}{3} = \arctan\frac{3}{4}$

3) ให้ $\arcsin x = \theta$ จะได้ $\sin\theta = x$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

จะได้ $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - x^2$

นั่นคือ $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$ เพราะ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\sin\left(2\arcsin x\right) = \sin 2\theta$

$= 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2x\sqrt{1-x^2}$ เมื่อ $x \in [-1,1]$

22. 1) ให้ $\arctan x = \alpha$ จะได้ $\tan\alpha = x$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

และ $\arctan y = \beta$ จะได้ $\tan\beta = y$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$

จะได้ $\tan\left(\alpha + \beta\right) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$$= \frac{x+y}{1-xy}$$

นั่นคือ $\alpha+\beta = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$

ดังนั้น $\arctan x+\arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$

2) ให้ $\arctan x=\alpha$ จะได้ $\tan\alpha=x$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

และ $\arctan y=\beta$ จะได้ $\tan\beta=y$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$

จะได้ $-\pi<\alpha+\beta<\pi$

จาก $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$ จะได้ $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$ นั่นคือ $-\frac{\pi}{2}<-\pi+(\alpha+\beta)<0$

เนื่องจาก $\tan\left(-\pi+(\alpha+\beta)\right) = -\tan\left(\pi-(\alpha+\beta)\right)$

$$= \tan(\alpha+\beta)$$

$$= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{x+y}{1-xy}$$

จะได้ $-\pi+(\alpha+\beta) = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$

นั่นคือ $\alpha+\beta = \pi+\arctan\frac{x+y}{1-xy}$

ดังนั้น $\arctan x+\arctan y = \pi+\arctan\frac{x+y}{1-xy}$

3) ให้ $\arctan x=\alpha$ จะได้ $\tan\alpha=x$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

และ $\arctan y=\beta$ จะได้ $\tan\beta=y$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$

จะได้ $-\pi<\alpha+\beta<\pi$

จาก $\alpha+\beta<-\frac{\pi}{2}$ จะได้ $-\pi<\alpha+\beta<-\frac{\pi}{2}$ นั่นคือ $0<\pi+(\alpha+\beta)<\frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\tan\left(\pi+(\alpha+\beta)\right) = \tan(\alpha+\beta)$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{x+y}{1-xy}$$

จะได้ $\pi + (\alpha+\beta) = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$

นั่นคือ $\alpha+\beta = -\pi + \arctan\frac{x+y}{1-xy}$

ดังนั้น $\arctan x + \arctan y = -\pi + \arctan\frac{x+y}{1-xy}$

23. 1) พิจารณา $\arctan 2 + \arctan 3$

เนื่องจาก $(2)(3) > 1,\ 2 > 0$ จะได้

$$\arctan 2 + \arctan 3 = \pi + \arctan\left(\frac{2+3}{1-(2)(3)}\right)$$

$$= \pi + \arctan(-1)$$

$$= \pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{3\pi}{4}$$

ดังนั้น $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$

2) พิจารณา $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$

เนื่องจาก $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) < 1$ จะได้

$$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}\right)$$

$$= \arctan 1$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

ดังนั้น $\arctan 1 + \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

3) พิจารณา $\arctan(-3)+\arctan 3$

เนื่องจาก $(-3)(3)<1$ จะได้

$$\arctan(-3)+\arctan 3 = \arctan\left(\frac{(-3)+3}{1-(-3)(3)}\right)$$
$$= \arctan 0$$
$$= 0$$

ดังนั้น $\arctan(-3)+\arctan 0+\arctan 3 = 0$

4) พิจารณา $\arctan(-2)+\arctan(-3)$

เนื่องจาก $(-2)(-3)>1,\ -2<0$ จะได้

$$\arctan(-2)+\arctan(-3) = -\pi+\arctan\left(\frac{(-2)+(-3)}{1-(-2)(-3)}\right)$$
$$= -\pi+\arctan 1$$
$$= -\pi+\frac{\pi}{4}$$
$$= -\frac{3\pi}{4}$$

ดังนั้น $\arctan(-1)+\arctan(-2)+\arctan(-3) = -\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}=-\pi$

24. 1) $1+\tan^2(-\theta) = 1+\tan^2\theta$
$= \sec^2\theta$

2) $(\sec\theta-\tan\theta)(\sec\theta+\tan\theta) = \sec^2\theta-\tan^2\theta$
$= (1+\tan^2\theta)-\tan^2\theta$
$= 1$

3) $\tan^2\theta-\cot^2\theta = (\sec^2\theta-1)-(\operatorname{cosec}^2\theta-1)$
$= \sec^2\theta-1-\operatorname{cosec}^2\theta+1$
$= \sec^2\theta-\operatorname{cosec}^2\theta$

4) $\sec\theta-\sec\theta\sin^2\theta = \sec\theta(1-\sin^2\theta)$
$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}$
$= \cos\theta$

5) $\frac{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta} = \frac{\cos\theta(2\sin\theta-1)}{(1-\cos^2\theta)-\sin\theta+\sin^2\theta}$

$$= \frac{\cos\theta(2\sin\theta-1)}{\sin^2\theta-\sin\theta+\sin^2\theta}$$
$$= \frac{\cos\theta(2\sin\theta-1)}{2\sin^2\theta-\sin\theta}$$
$$= \frac{\cos\theta(2\sin\theta-1)}{\sin\theta(2\sin\theta-1)}$$
$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= \cot\theta$$

6) $\cot\theta\cos\theta+\sin\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\cos\theta+\sin\theta$
$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}+\sin\theta$$
$$= \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta}$$
$$= \frac{1}{\sin\theta}$$
$$= \operatorname{cosec}\theta$$

7) $\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)+\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$
$$= \frac{1-2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$
$$= \frac{2-2\sin\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$
$$= \frac{2(1-\sin\theta)}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$
$$= 2\sec\theta$$

8) $\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\cdot\frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$
$$= \frac{1-2\sin\theta+\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$$
$$= \frac{1-2\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \sec^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta + \tan^2\theta$$
$$= (\sec\theta - \tan\theta)^2$$

9) $\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}$

$$= \frac{\cos\theta}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} + \frac{\sin\theta}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$
$$= \frac{\cos\theta}{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}} + \frac{\sin\theta}{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}}$$
$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$
$$= \frac{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}{\cos\theta-\sin\theta}$$
$$= \sin\theta+\cos\theta$$

10) $\dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} + \dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta}$

$$= \frac{\cot\theta}{1-\frac{1}{\cot\theta}} + \frac{\frac{1}{\cot\theta}}{1-\cot\theta}$$
$$= \frac{\cot^2\theta}{\cot\theta-1} - \frac{\frac{1}{\cot\theta}}{\cot\theta-1}$$
$$= \frac{\cot^2\theta-\frac{1}{\cot\theta}}{\cot\theta-1}$$
$$= \frac{\cot^3\theta-1}{\cot\theta(\cot\theta-1)}$$
$$= \frac{(\cot\theta-1)(\cot^2\theta+\cot\theta+1)}{\cot\theta(\cot\theta-1)}$$
$$= \frac{\cot^2\theta+\cot\theta+1}{\cot\theta}$$
$$= \cot\theta+1+\tan\theta$$
$$= 1+\tan\theta+\cot\theta$$

11) $\cot 2\theta + \tan\theta$

$$= \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{2\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{2\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\cos\theta}{2\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{2\cos\theta}$$
$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \frac{1}{\sin 2\theta}$$
$$= \operatorname{cosec} 2\theta$$

12) $$\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta} = \tan\left((\alpha-\beta)+\beta\right)$$
$$= \tan\alpha$$

13) $$\cot\alpha - \tan\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$= \frac{2\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$= \frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$
$$= 2\cot 2\alpha$$

14) $$\frac{\sin 2\theta + \sin\theta}{\cos 2\theta + \cos\theta + 1} = \frac{2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta}{2\cos^2\theta - 1 + \cos\theta + 1}$$
$$= \frac{2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta}{2\cos^2\theta + \cos\theta}$$
$$= \frac{\sin\theta(2\cos\theta+1)}{\cos\theta(2\cos\theta+1)}$$
$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \tan\theta$$

15) $\dfrac{\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta}{\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta} = \dfrac{(\sin 5\theta+\sin\theta)+\sin 3\theta}{(\cos 5\theta+\cos\theta)+\cos 3\theta}$

$= \dfrac{2\sin 3\theta\cos 2\theta+\sin 3\theta}{2\cos 3\theta\cos 2\theta+\cos 3\theta}$

$= \dfrac{\sin 3\theta(2\cos 2\theta+1)}{\cos 3\theta(2\cos 2\theta+1)}$

$= \dfrac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta}$

$= \tan 3\theta$

16) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ = \dfrac{1}{2\sin 20^\circ}\left((2\sin 20^\circ\cos 20^\circ)\cos 40^\circ\cos 80^\circ\right)$

$= \dfrac{1}{2\sin 20^\circ}(\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ)$

$= \dfrac{1}{4\sin 20^\circ}\left((2\sin 40^\circ\cos 40^\circ)\cos 80^\circ\right)$

$= \dfrac{1}{4\sin 20^\circ}(\sin 80^\circ\cos 80^\circ)$

$= \dfrac{1}{8\sin 20^\circ}(2\sin 80^\circ\cos 80^\circ)$

$= \dfrac{1}{8\sin 20^\circ}\cdot\sin 160^\circ$

$= \dfrac{1}{8\sin 20^\circ}\cdot\sin(180^\circ-20^\circ)$

$= \dfrac{1}{8\sin 20^\circ}\cdot\sin 20^\circ$

$= \dfrac{1}{8}$

25. 1) จาก $A+B+C=180^\circ$ จะได้ $B+C=180^\circ-A$

จะได้ $\sin(180^\circ-A) = \sin(B+C)$

นั่นคือ $\sin A = \sin(B+C)$

2) จาก $A+B+C=180^\circ$ จะได้ $B+C=180^\circ-A$

จะได้ $\cos(180^\circ-A) = \cos(B+C)$

นั่นคือ $-\cos A = \cos(B+C)$

ดังนั้น $\cos A = -\cos(B+C)$

3) จาก $A+B+C=180°$ จะได้ $A+B=180°-C$

จะได้ $\sin A+\sin B+\sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin\left(180°-(A+B)\right)$

$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin(A+B)$

$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin 2\cdot\frac{(A+B)}{2}$

$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$

$= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$

$= 2\sin\frac{180°-C}{2}\left(2\cos\frac{\frac{A-B}{2}+\frac{A+B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A-B}{2}-\frac{A+B}{2}}{2}\right)$

$= 2\sin\left(90°-\frac{C}{2}\right)\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\left(-\frac{B}{2}\right)\right)$

$= 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$

$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

4) จาก $A+B+C=180°$ จะได้ $A+B=180°-C$

จะได้ $\cos A+\cos B+\cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos\left(180^{\circ}-(A+B)\right)$

$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos(A+B)$

$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos 2\cdot\frac{(A+B)}{2}$

$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\left(2\cos^2\frac{A+B}{2}-1\right)$

$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos^2\frac{A+B}{2}+1$

$= 2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)+1$

$$= 2\cos\frac{180^\circ - C}{2}\left(-2\sin\frac{\frac{A-B}{2}+\frac{A+B}{2}}{2}\sin\frac{\frac{A-B}{2}-\frac{A+B}{2}}{2}\right)+1$$

$$= 2\cos\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right)\left(-2\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right)\right)+1$$

$$= 4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+1$$

$$= 1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

26. 1) จาก $4\sin^2\theta - 3 = 0$

จะได้ $\sin^2\theta = \frac{3}{4}$

นั่นคือ $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ หรือ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ คือ $\frac{\pi}{3}$ และ $\frac{2\pi}{3}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ คือ $\frac{4\pi}{3}$ และ $\frac{5\pi}{3}$

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ และ $\frac{5\pi}{3}$

2) จาก $2\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 0$

จะได้ $\cos\theta\left(2\cos\theta - \sqrt{3}\right) = 0$

นั่นคือ $\cos\theta = 0$ หรือ $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos\theta = 0$ คือ $\frac{\pi}{2}$ และ $\frac{3\pi}{2}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ คือ $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{11\pi}{6}$

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ และ $\frac{11\pi}{6}$

3) จาก $\cos^2\theta + \cos\theta = \sin^2\theta$

จะได้ $\cos^2\theta + \cos\theta = 1 - \cos^2\theta$

$$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$

$$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0$$

นั่นคือ $\cos\theta = \frac{1}{2}$ หรือ $\cos\theta = -1$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos\theta = \frac{1}{2}$ คือ $\frac{\pi}{3}$ และ $\frac{5\pi}{3}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos\theta = -1$ คือ π

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $\frac{\pi}{3}, \pi$ และ $\frac{5\pi}{3}$

4) จาก $3\tan^2\theta = 2\sec^2\theta + 1$

จะได้ $3\tan^2\theta = 2\left(1+\tan^2\theta\right)+1$

$3\tan^2\theta = 3 + 2\tan^2\theta$

$\tan^2\theta = 3$

นั่นคือ $\tan\theta = \sqrt{3}$ หรือ $\tan\theta = -\sqrt{3}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\tan\theta = \sqrt{3}$ คือ $\frac{\pi}{3}$ และ $\frac{4\pi}{3}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\tan\theta = -\sqrt{3}$ คือ $\frac{2\pi}{3}$ และ $\frac{5\pi}{3}$

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ และ $\frac{5\pi}{3}$

5) จาก $\tan\theta = 2\sin\theta$

จะได้ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2\sin\theta$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

$2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta = 0$

$\sin\theta\left(2\cos\theta - 1\right) = 0$

นั่นคือ $\sin\theta = 0$ หรือ $\cos\theta = \frac{1}{2}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin\theta = 0$ คือ 0 และ π

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos\theta = \frac{1}{2}$ คือ $\frac{\pi}{3}$ และ $\frac{5\pi}{3}$

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $0, \frac{\pi}{3}, \pi$ และ $\frac{5\pi}{3}$

6) จาก $3\sec\theta - \cos\theta + 2 = 0$

จะได้ $\frac{3}{\cos\theta} - \cos\theta + 2 = 0$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

$3 - \cos^2\theta + 2\cos\theta = 0$

$\cos^2\theta - 2\cos\theta - 3 = 0$

$$(\cos\theta-3)(\cos\theta+1) = 0$$

นั่นคือ $\cos\theta=3$ หรือ $\cos\theta=-1$

เนื่องจาก $-1\le\cos\theta\le1$ ดังนั้น ไม่มีค่าของ θ ในช่วง $[0,2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos\theta=3$

ค่าของ θ ในช่วง $[0,2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos\theta=-1$ คือ π

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0,2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ π

7) จาก $\sqrt{3}\operatorname{cosec}^2\theta+2\operatorname{cosec}\theta = 0$

จะได้ $\operatorname{cosec}\theta\left(\sqrt{3}\operatorname{cosec}\theta+2\right) = 0$

นั่นคือ $\operatorname{cosec}\theta=0$ หรือ $\operatorname{cosec}\theta=-\frac{2}{\sqrt{3}}$

เนื่องจาก $|\operatorname{cosec}\theta|\ge1$ ดังนั้น ไม่มีค่าของ θ ในช่วง $[0,2\pi)$ ที่ทำให้ $\operatorname{cosec}\theta=0$

ค่าของ θ ในช่วง $[0,2\pi)$ ที่ทำให้ $\operatorname{cosec}\theta=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ คือ $\frac{4\pi}{3}$ และ $\frac{5\pi}{3}$

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0,2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $\frac{4\pi}{3}$ และ $\frac{5\pi}{3}$

8) จาก $\cos2\theta+2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1$

จะได้ $\cos2\theta+\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right) = 0$

$$2\cos^2\theta-1+\cos\theta = 0$$
$$2\cos^2\theta+\cos\theta-1 = 0$$
$$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1) = 0$$

นั่นคือ $\cos\theta=\frac{1}{2}$ หรือ $\cos\theta=-1$

ค่าของ θ ในช่วง $[0,2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos\theta=\frac{1}{2}$ คือ $\frac{\pi}{3}$ และ $\frac{5\pi}{3}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0,2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos\theta=-1$ คือ π

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0,2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $\frac{\pi}{3},\pi$ และ $\frac{5\pi}{3}$

27. 1) จาก $2\cos^2\theta+2\cos2\theta = 1$

จะได้ $2\cos^2\theta+2\left(2\cos^2\theta-1\right) = 1$

$$6\cos^2\theta-3 = 0$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}$$

นั่นคือ $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ หรือ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ค่าของ θ เมื่อ $0° \le \theta < 360°$ ที่ทำให้ $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ คือ 45° และ 315°

ค่าของ θ เมื่อ $0° \le \theta < 360°$ ที่ทำให้ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ คือ 135° และ 225°

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{45°, 135°, 225°, 315°\}$

2) จาก $4\operatorname{cosec}\theta - 4\sin\theta = 2\sqrt{2}\cot\theta$

จะได้ $\frac{4}{\sin\theta} - 4\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}\cos\theta}{\sin\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \ne 0$

$$4 - 4\sin^2\theta = 2\sqrt{2}\cos\theta$$
$$4 - 4\left(1 - \cos^2\theta\right) = 2\sqrt{2}\cos\theta$$
$$4\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta = 0$$
$$2\cos\theta\left(2\cos\theta - \sqrt{2}\right) = 0$$

นั่นคือ $\cos\theta = 0$ หรือ $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ค่าของ θ เมื่อ $0° \le \theta < 360°$ ที่ทำให้ $\cos\theta = 0$ คือ 90° และ 270°

ค่าของ θ เมื่อ $0° \le \theta < 360°$ ที่ทำให้ $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ คือ 45° และ 315°

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{45°, 90°, 270°, 315°\}$

3) จาก $\cos\theta + 4\sin\theta - \sin 2\theta = 2$

จะได้ $\cos\theta + 4\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta = 2$

$$\cos\theta - 2 - 2\sin\theta\cos\theta + 4\sin\theta = 0$$
$$\cos\theta - 2 - 2\sin\theta(\cos\theta - 2) = 0$$
$$(\cos\theta - 2)(1 - 2\sin\theta) = 0$$

นั่นคือ $\cos\theta = 2$ หรือ $\sin\theta = \frac{1}{2}$

เนื่องจาก $-1 \le \cos\theta \le 1$ ดังนั้น ไม่มีค่าของ θ เมื่อ $0° \le \theta < 360°$ ที่ทำให้ $\cos\theta = 2$

ค่าของ θ เมื่อ $0° \le \theta < 360°$ ที่ทำให้ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ คือ 30° และ 150°

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{30°, 150°\}$

4) จาก $\sin 3\theta\cos\theta - \cos 3\theta\sin\theta = \cos\theta$

จะได้ $\sin(3\theta - \theta) = \cos\theta$

$\sin 2\theta - \cos\theta = 0$

$2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

$\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$

นั่นคือ $\cos\theta = 0$ หรือ $\sin\theta = \frac{1}{2}$

ค่าของ θ เมื่อ $0° \le \theta < 360°$ ที่ทำให้ $\cos\theta = 0$ คือ $90°$ และ $270°$

ค่าของ θ เมื่อ $0° \le \theta < 360°$ ที่ทำให้ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ คือ $30°$ และ $150°$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{30°, 90°, 150°, 270°\}$

28. 1) จาก $\tan^2\theta - 3 = 0$

จะได้ $\tan^2\theta = 3$

นั่นคือ $\tan\theta = \sqrt{3}$ หรือ $\tan\theta = -\sqrt{3}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\tan\theta = \sqrt{3}$ คือ $\frac{\pi}{3}$ และ $\frac{4\pi}{3}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\tan\theta = -\sqrt{3}$ คือ $\frac{2\pi}{3}$ และ $\frac{5\pi}{3}$

ดังนั้น ค่าทั่วไปของ θ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $n\pi + \frac{\pi}{3}$ และ $n\pi - \frac{\pi}{3}$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

2) จาก $\cos 2\theta = \sin\theta$

จะได้ $1 - 2\sin^2\theta = \sin\theta$

$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$

$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1) = 0$

นั่นคือ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ หรือ $\sin\theta = -1$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ คือ $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{5\pi}{6}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin\theta = -1$ คือ $\frac{3\pi}{2}$

ดังนั้น ค่าทั่วไปของ θ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $2n\pi + \frac{\pi}{6}, 2n\pi + \frac{5\pi}{6}$ และ $2n\pi + \frac{3\pi}{2}$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

29. 1) เนื่องจาก $A+B+C=180°$

จะได้ $A = 180°-(B+C)=180°-(120°+35°)=25°$

จากกฎของไซน์

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

จะได้

$$\frac{\sin 25°}{15} = \frac{\sin 120°}{b}$$

$$b = \frac{15\sin 120°}{\sin 25°}$$

$$\approx \frac{15(0.8660)}{0.4226}$$

$$\approx 30.7383$$

และ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

จะได้

$$\frac{\sin 25°}{15} = \frac{\sin 35°}{c}$$

$$c = \frac{15\sin 35°}{\sin 25°}$$

$$\approx \frac{15(0.5736)}{0.4226}$$

$$\approx 20.3597$$

ดังนั้น $b \approx 30.7383,\ c \approx 20.3597$ และ $A = 25°$

2) เนื่องจาก $A+B+C=180°$

จะได้ $C = 180°-(A+B)=180°-(102°+41°)=37°$

จากกฎของไซน์

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

จะได้

$$\frac{\sin 37°}{52.8} = \frac{\sin 102°}{a}$$

$$a = \frac{52.8\sin 102°}{\sin 37°}$$

$$\approx \frac{52.8(0.9781)}{0.6018}$$

$$\approx 85.8154$$

และ

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}$$

จะได้ $\frac{\sin 37^\circ}{52.8} = \frac{\sin 41^\circ}{b}$

$b = \frac{52.8\sin 41^\circ}{\sin 37^\circ}$

$\approx \frac{52.8(0.6561)}{0.6018}$

≈ 57.5641

ดังนั้น $a \approx 85.8154$, $b \approx 57.5641$ และ $C = 37^\circ$

3) จากกฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

จะได้ $1^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 - 2\left(\sqrt{3}\right)(2)\cos A$

$\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

นั่นคือ $A = 30^\circ$

จากกฎของโคไซน์ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

จะได้ $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 1^2 + 2^2 - 2(1)(2)\cos B$

$\cos B = \frac{1}{2}$

นั่นคือ $B = 60^\circ$

เนื่องจาก $A + B + C = 180^\circ$

จะได้ $C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$

ดังนั้น $A = 30^\circ$, $B = 60^\circ$ และ $C = 90^\circ$

4) จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

จะได้ $\frac{\sin 60^\circ}{3\sqrt{2}} = \frac{\sin C}{3+\sqrt{3}}$

$\sin C = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)\sin 60^\circ}{3\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

นั่นคือ $C = 75^\circ$ หรือ 105°

ถ้า $C = 75^\circ$ แล้ว $A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}$

จะได้ $\frac{\sin 60^\circ}{3\sqrt{2}} = \frac{\sin 45^\circ}{a}$

$a = \frac{3\sqrt{2}\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}$

$= 2\sqrt{3}$

ถ้า $C = 105^\circ$ แล้ว $A = 180^\circ-(B+C)=180^\circ-(60^\circ+105^\circ)=15^\circ$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}$

จะได้ $\frac{\sin 60^\circ}{3\sqrt{2}} = \frac{\sin 15^\circ}{a}$

$a = \frac{3\sqrt{2}\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ}$

$= 3-\sqrt{3}$

ดังนั้น $A = 45^\circ, C = 75^\circ$ และ $a = 2\sqrt{3}$ หรือ $A = 15^\circ, C = 105^\circ$ และ $a = 3-\sqrt{3}$

5) จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$

จะได้ $\frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{8}} = \frac{\sin C}{\sqrt{12}}$

$\sin C = \frac{\sqrt{12}\sin 45^\circ}{\sqrt{8}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

นั่นคือ $C = 60^\circ$ หรือ 120°

ถ้า $C = 60^\circ$ แล้ว $A = 180^\circ-(B+C)=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=75^\circ$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}$

จะได้ $\frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{8}} = \frac{\sin 75^\circ}{a}$

$a = \frac{\sqrt{8}\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}$

$= \sqrt{6}+\sqrt{2}$

ถ้า $C = 120^\circ$ แล้ว $A = 180^\circ-(B+C)=180^\circ-(45^\circ+120^\circ)=15^\circ$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}$

จะได้ $\frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{8}} = \frac{\sin 15^\circ}{a}$

$a = \frac{\sqrt{8}\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ}$

$= \sqrt{6}-\sqrt{2}$

ดังนั้น $A = 75^\circ, C = 60^\circ$ และ $a = \sqrt{6}+\sqrt{2}$ หรือ $A = 15^\circ, C = 120^\circ$ และ $a = \sqrt{6}-\sqrt{2}$

6) จากกฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

จะได้ $3^2 = 4^2 + 5^2 - 2(4)(5)\cos A$

$\cos A = \frac{4}{5}$

นั่นคือ $A \approx 36.87^\circ$

จากกฎของโคไซน์ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

จะได้ $4^2 = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5)\cos B$

$\cos B = \frac{3}{5}$

นั่นคือ $B \approx 53.13^\circ$

จากกฎของโคไซน์ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

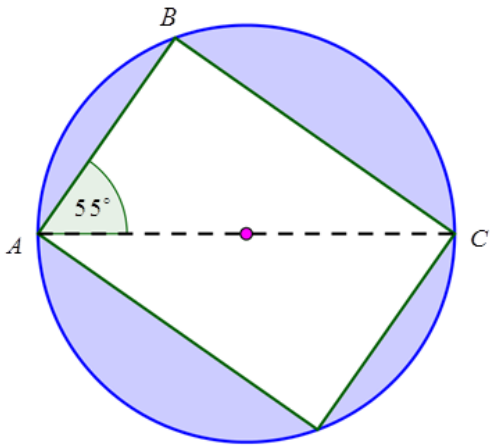
จะได้ $5^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4)\cos C$

$\cos C = 0$

นั่นคือ $C = 90^\circ$

ดังนั้น $A \approx 36.87^\circ, B \approx 53.13^\circ$ และ $C = 90^\circ$

30.



ให้ AC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมนี้

จะได้มุมในครึ่งวงกลมเป็นมุมฉาก นั่นคือ มุม $A\hat{B}C = 90°$ และรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

เนื่องจาก $B\hat{A}C = 55°$ จะได้ $A\hat{C}B = 90° - 55° = 35°$

เนื่องจากวงกลมนี้มีรัศมียาว 10 หน่วย จะได้ $AC = 20$ หน่วย

จากกฎของไซน์ จะได้

$$\frac{\sin A\hat{B}C}{AC} = \frac{\sin B\hat{A}C}{BC}$$

นั่นคือ
$$\frac{\sin 90°}{20} = \frac{\sin 55°}{BC}$$

$$BC = \frac{20\sin 55°}{\sin 90°}$$

$$\approx 16.38$$

จากกฎของไซน์ จะได้

$$\frac{\sin A\hat{B}C}{AC} = \frac{\sin A\hat{C}B}{AB}$$

นั่นคือ
$$\frac{\sin 90°}{20} = \frac{\sin 35°}{AB}$$

$$AB = \frac{20\sin 35°}{\sin 90°}$$

$$\approx 11.47$$

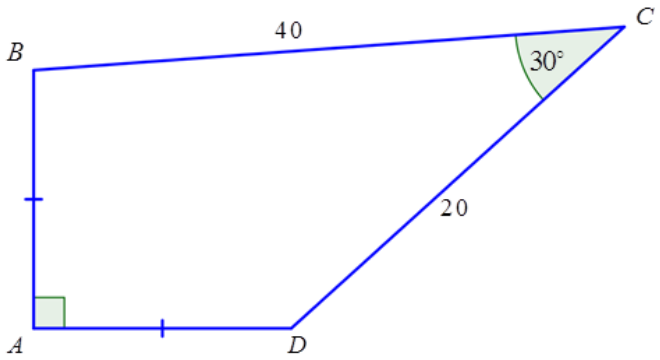
จาก พื้นที่ส่วนที่แรเงา = พื้นที่ของวงกลม – พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$= \pi(10)^2 - (16.38)(11.47)$$

$\approx$ 126.12 ตารางหน่วย

ดังนั้น พื้นที่ส่วนที่แรเงาประมาณ 126.12 ตารางหน่วย

31.



พิจารณารูปสามเหลี่ยม BCD จากกฎของโคไซน์ จะได้

$$\begin{aligned} BD^2 &= BC^2 + CD^2 - 2(BC)(CD)\cos B\hat{C}D \\ &= 40^2 + 20^2 - 2(40)(20)\cos 30^\circ \\ &\approx 614.36 \end{aligned}$$

จะได้ $BD \approx 24.79$

เนื่องจาก $AB = AD$, $B\hat{A}D = 90^\circ$ และทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

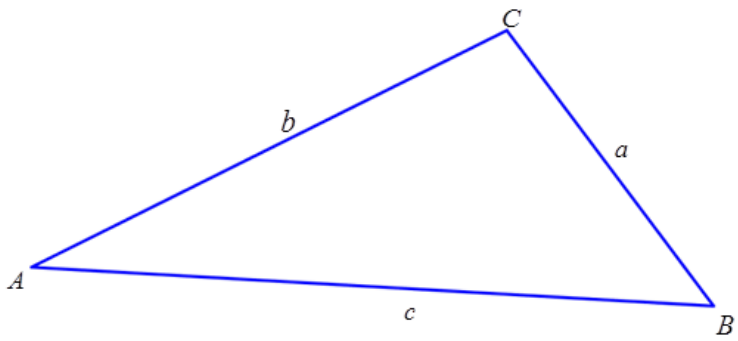
$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 \\ 614.36 &= 2(AD^2) \\ AD^2 &= \frac{614.36}{2} \\ AD &\approx 17.53 \end{aligned}$$

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ = พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABD + พื้นที่รูปสามเหลี่ยม BCD

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\times 17.53\times 17.53 + \frac{1}{2}\times 40\times 20\times \sin 30^\circ \\ &\approx 353.65 \end{aligned}$$

ดังนั้น ที่ดินแปลงนี้ของวิมลมีพื้นที่ 353.65 ตารางเมตร

32.



จากกฎของโคไซน์ จะได้

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos^2 A = \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{(2bc)^2}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$= 1 - \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{(2bc)^2}$$

$$= \frac{(2bc)^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{(2bc)^2}$$

$$= \frac{\left(2bc - b^2 - c^2 + a^2\right)\left(2bc + b^2 + c^2 - a^2\right)}{(2bc)^2}$$

$$= \frac{\left(a^2 - (b-c)^2\right)\left((b+c)^2 - a^2\right)}{(2bc)^2}$$

$$= \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{(2bc)^2} \text{ ---------- } (1)$$

ให้ $s = \frac{a+b+c}{2}$ จะได้ $a+b+c = 2s$

นั่นคือ $a-b+c = a+b+c-2b = 2s-2b$

$a+b-c = a+b+c-2c = 2s-2c$

$b+c-a = a+b+c-2a = 2s-2a$

แทนใน (1) จะได้ $\sin^2 A = \dfrac{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}{(2bc)^2}$

$= \dfrac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{4(bc)^2}$

$= \dfrac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{(bc)^2}$

นั่นคือ $\sin A = \dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$

จาก พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $ABC = \dfrac{1}{2}bc\sin A$

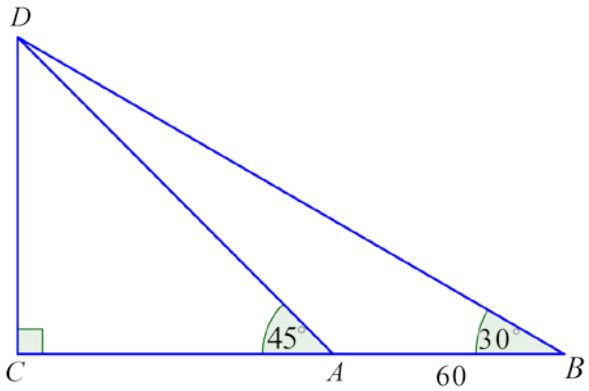
จะได้ พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $ABC = \dfrac{1}{2}bc \cdot \dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมใดๆ เท่ากับ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

เมื่อ a, b และ c เป็นความยาวของด้านทั้งสามด้าน และ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

33.



ให้ A และ B เป็นตำแหน่งของเรือสองลำ โดยระยะ AB เท่ากับ 60 เมตร

เนื่องจาก $D\hat{A}C = 45°$ และ $D\hat{B}A = 30°$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ACD จะได้

$$\tan 45^\circ = \frac{CD}{CA}$$
$$CD = CA\tan 45^\circ$$

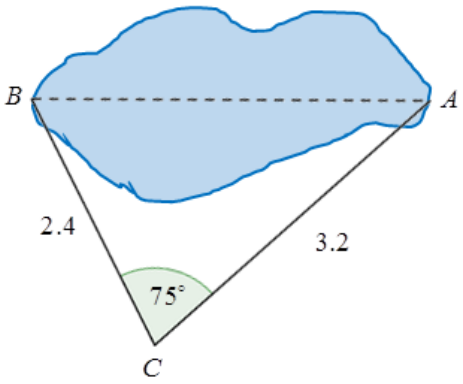
และพิจารณารูปสามเหลี่ยม BCD จะได้

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{CA+60}$$
$$CD = (CA+60)\tan 30^\circ$$

นั่นคือ
$$CA\tan 45^\circ = (CA+60)\tan 30^\circ$$
$$CA = (CA+60)\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$CA = \frac{1}{\sqrt{3}}CA+\frac{60}{\sqrt{3}}$$
$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)CA = \frac{60}{\sqrt{3}}$$
$$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)CA = \frac{60}{\sqrt{3}}$$
$$CA = \frac{60}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$
$$= \frac{60}{\sqrt{3}-1}$$
$$= \frac{60}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$
$$= \frac{60\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$$
$$= 30\left(\sqrt{3}+1\right)$$

ดังนั้น เรือลำที่อยู่ใกล้ประภาคารห่างจากประภาคาร $30\left(\sqrt{3}+1\right)$ เมตร

34.



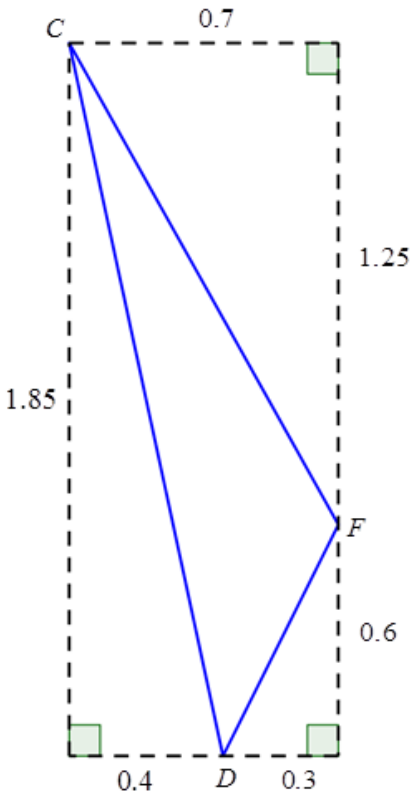
จากกฎของโคไซน์ จะได้

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2(AC)(BC)\cos A\hat{C}B \\ &= 3.2^2 + 2.4^2 - 2(3.2)(2.4)\cos 75^\circ \\ &\approx 12.02 \end{aligned}$$

นั่นคือ $AB \approx 3.47$

ดังนั้น ความกว้างของบึงกว้างประมาณ 3.47 กิโลเมตร

35.



จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$CD^2 = 1.85^2 + 0.4^2 \approx 3.85$ นั่นคือ $CD \approx 1.89$

$DF^2 = 0.3^2 + 0.6^2 = 0.45$ นั่นคือ $DF \approx 0.67$

และ $CF^2 = 0.7^2 + 1.25^2 \approx 2.05$ นั่นคือ $CF \approx 1.43$

จากกฎของโคไซน์ จะได้

$$CF^2 = CD^2 + DF^2 - 2(CD)(DF)\cos C\hat{D}F$$

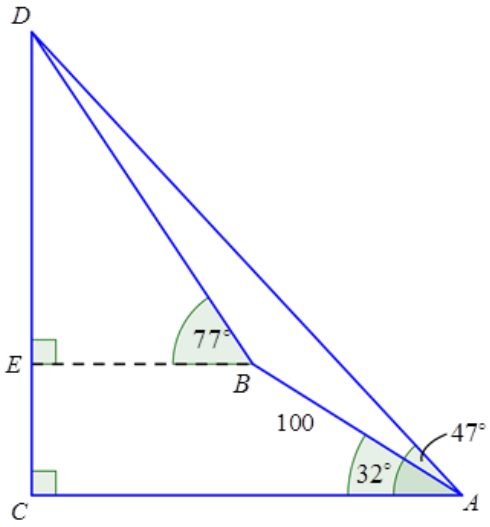
$$2.05 \approx 3.58 + 0.45 - 2(1.89)(0.67)\cos C\hat{D}F$$

$$\cos C\hat{D}F \approx 0.78$$

นั่นคือ $C\hat{D}F \approx 38.74°$

ดังนั้น มุมระหว่าง CD และ DF มีขนาดประมาณ $38.74°$

36.



ให้ A เป็นจุดที่เพชรยืนมองยอดเขาที่เชิงเขาแห่งหนึ่ง

B เป็นจุดที่เพชรมองยอดเขา หลังจากที่เดินขึ้นไปตามไหล่เขาซึ่งเอียงทำมุม 32 องศา กับแนวราบเป็นระยะทาง 100 เมตร

ระยะ AB เท่ากับ 100 เมตร

และ CD เป็นความสูงของภูเขา

จาก $D\hat{A}C = 47°$ และ $B\hat{A}C = 32°$ จะได้ $D\hat{A}B = 47° - 32° = 15°$

จาก $E\hat{B}D = 77°$ จะได้ $B\hat{D}E = 90° - 77° = 13°$

จาก $D\hat{A}C = 47°$ จะได้ $A\hat{D}C = 43°$ นั่นคือ $A\hat{D}B = 43° - 13° = 30°$

จาก $D\hat{A}B = 15°$ และ $A\hat{D}B = 30°$ จะได้ $A\hat{B}D = 180° - (15° + 30°) = 135°$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD จากกฎของไซน์ จะได้

$$\frac{\sin A\hat{B}D}{AD} = \frac{\sin A\hat{D}B}{AB}$$

$$\frac{\sin 135°}{AD} = \frac{\sin 30°}{100}$$

$$AD = \frac{100\sin 135°}{\sin 30°}$$

$$= \frac{100 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$= 100\sqrt{2}$

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ACD จะได้

$$\sin C\hat{A}D = \frac{CD}{AD}$$

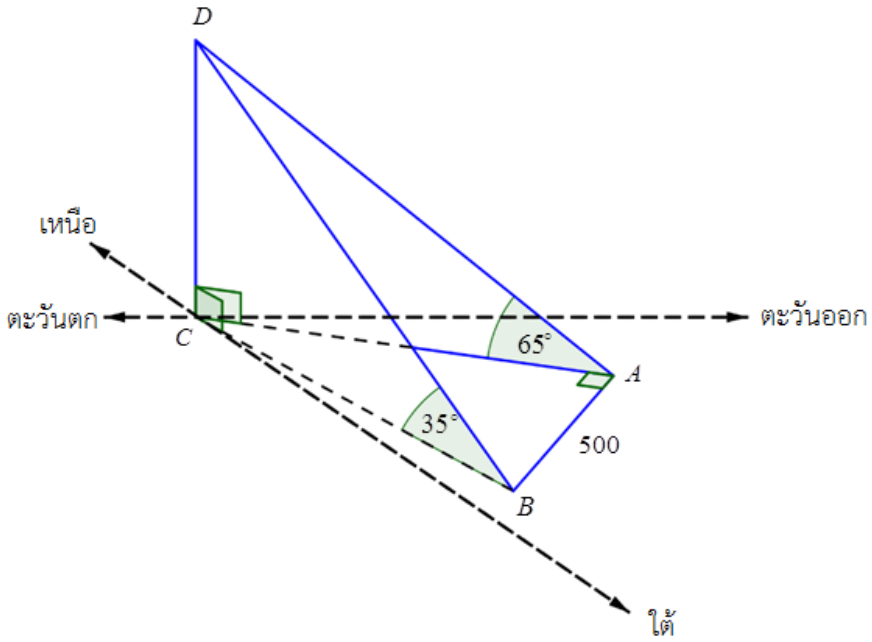
$$CD = AD\sin C\hat{A}D$$

$$= 100\sqrt{2}\sin 47^\circ$$

$$\approx 103.43$$

ดังนั้น ภูเขาลูกนี้สูงประมาณ 103.43 เมตร

37.



ให้ A เป็นจุดที่สุดายืนมองยอดเขาในครั้งแรก

B เป็นจุดที่สุดายืนมองยอดเขาในครั้งที่สอง

ระยะ AB เท่ากับ 500 เมตร

และ CD เป็นความสูงของภูเขาลูกนี้

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ACD จะได้

$$\tan 65^\circ = \frac{CD}{AC}$$

$$AC = \frac{CD}{\tan 65^\circ}$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม BCD จะได้

$$\tan 35^\circ = \frac{CD}{CB}$$

$$CB = \frac{CD}{\tan 35^\circ}$$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส ในรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มี $B\hat{A}C = 90^\circ$ จะได้

$$CB^2 = AC^2 + AB^2$$

$$\left(\frac{CD}{\tan 35^\circ}\right)^2 = \left(\frac{CD}{\tan 65^\circ}\right)^2 + 500^2$$

$$500^2 = \left(\frac{CD}{\tan 35^\circ}\right)^2 - \left(\frac{CD}{\tan 65^\circ}\right)^2$$

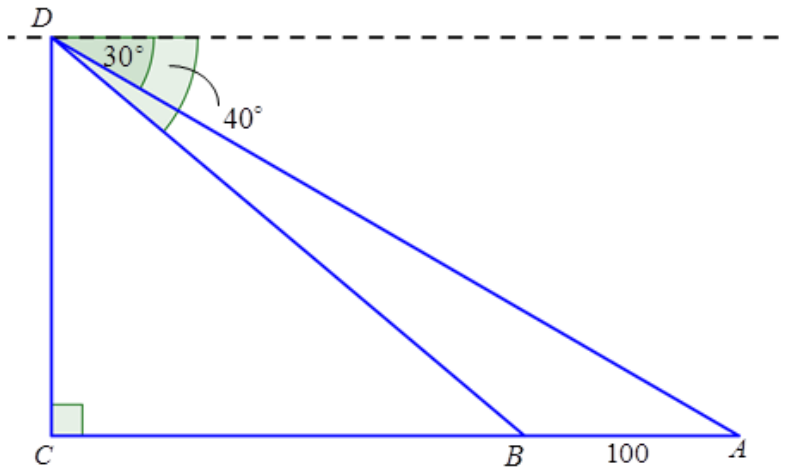
$$500^2 = \left(\frac{1}{0.70^2} - \frac{1}{2.14^2}\right)CD^2$$

$$500^2 = 1.82CD^2$$

จะได้ $CD \approx 370.62$

ดังนั้น ภูเขาลูกนี้สูงประมาณ 370.62 เมตร

38.



ให้ CD เป็นความสูงของประภาคาร

โดยใช้ความรู้เรื่องเส้นขนาน

จะได้ $D\hat{A}C = 30^\circ$ และ $D\hat{B}C = 40^\circ$

เนื่องจาก $D\hat{B}C = 40^\circ$ จะได้ $C\hat{D}B = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ และ $D\hat{B}A = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

เนื่องจาก $D\hat{A}C = 30°$ และ $D\hat{B}A = 140°$ จะได้ $B\hat{D}A = 180° - (30° + 140°) = 10°$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD จากกฎของไซน์ จะได้

$$\frac{\sin A\hat{D}B}{AB} = \frac{\sin A\hat{B}D}{AD}$$

นั่นคือ
$$\frac{\sin 10°}{100} = \frac{\sin 140°}{AD}$$
$$AD = \frac{100\sin 140°}{\sin 10°}$$
$$= 370.17$$

และ
$$\frac{\sin A\hat{D}B}{AB} = \frac{\sin D\hat{A}B}{BD}$$

นั่นคือ
$$\frac{\sin 10°}{100} = \frac{\sin 30°}{BD}$$
$$BD = \frac{100\sin 30°}{\sin 10°}$$
$$= 287.94$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BCD จะได้

$$\sin C\hat{B}D = \frac{CD}{BD}$$
$$CD = BD\sin C\hat{B}D$$
$$= 287.93\sin 40°$$
$$= 185.08$$

ดังนั้น ยอดประภาคารอยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะประมาณ 370.17 เมตร
ยอดประภาคารอยู่ห่างจากจุด B เป็นระยะประมาณ 287.94 เมตร
และประภาคารมีความสูงประมาณ 185.08 เมตร

39. 1) เนื่องจากจะไม่อนุญาตให้มีการออกหนังสือแสดงสิทธิในที่ดิน หากพื้นที่มีค่าความลาดชันโดยเฉลี่ยมากกว่า 35 เปอร์เซ็นต์ขึ้นไป

จะได้ $\tan\theta = \frac{35}{100} = 0.35$

นั่นคือ $\theta = \arctan(0.35) \approx 0.3367$

และเมื่อเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นองศา จะได้ $\theta \approx 19.29°$

ดังนั้น จะไม่อนุญาตให้มีการออกหนังสือแสดงสิทธิในพื้นที่ เมื่อพื้นที่เอียงทำมุมมากกว่า 19.29°

2) เนื่องจากความห่างของแต่ละเส้นชั้นความสูงเท่ากับ 20 เมตร เมื่อกำหนดให้พื้นที่ที่มีความลาดชันมากกว่า 35 เปอร์เซ็นต์ ให้ d แทนความห่างของเส้นชั้นความสูงแต่ละเส้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{20}{d}\\ 0.35 &= \frac{20}{d}\\ d &= \frac{20}{0.35}\\ &\approx 57.14\end{aligned}$$

เนื่องจาก ระยะจริง 50,000 มิลลิเมตร เท่ากับระยะในแผนที่ 1 มิลลิเมตร
จะได้ ระยะ 57.14 เมตร เท่ากับระยะในแผนที่ 1.14 มิลลิเมตร
ดังนั้น จะไม่อนุญาตให้มีการออกหนังสือแสดงสิทธิในที่ดินในพื้นที่ที่มีระยะห่างระหว่างเส้นชั้นความสูงน้อยกว่า 1.14 มิลลิเมตร

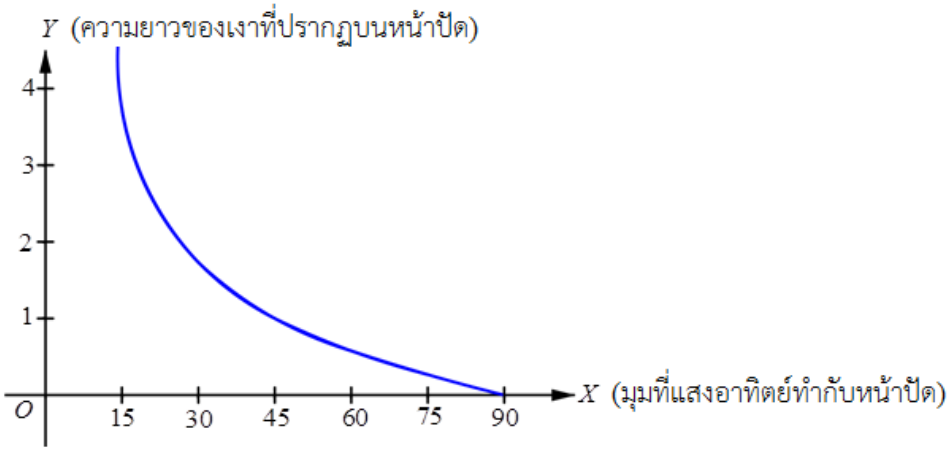
40. 1) จาก $s = h\cot\theta$

จะได้ $$\begin{aligned}s &= \frac{h\cos\theta}{\sin\theta}\\ &= \frac{h\sin(90^\circ-\theta)}{\sin\theta}\end{aligned}$$

2) จาก $s = h\cot\theta$ และ $h = 1$ จะได้ $s = \cot\theta$

θ	15°	30°	45°	60°	75°	90°
s	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2-\sqrt{3}$	0

จากตาราง จะได้กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของเงาบนหน้าปัดและมุมที่แสงอาทิตย์ทำกับหน้าปัด ดังนี้



3) แสงอาทิตย์ทำมุมกับหน้าปัด 15 องศา ทำให้เงาที่ปรากฏบนหน้าปัดยาวมากที่สุด แสงอาทิตย์ทำมุมกับหน้าปัด 90 องศา ทำให้เงาที่ปรากฏบนหน้าปัดยาวน้อยที่สุด

4) ประมาณ 12.00 น.

41. 1) จากสมการ $\sin\theta = \frac{W}{L}$

ในที่นี้ จะได้ $W = 5$ และ $L = 6.5$

นั่นคือ $\sin\theta = \frac{5}{6.5}$

จะได้ $\theta \approx 50.28°$

ดังนั้น มุมที่เกิดจากเส้นทางการเคลื่อนที่ของหยดเลือดทำกับพื้นมีขนาดประมาณ 50.28 องศา

2) จากสมการ $\sin\theta = \frac{W}{L}$

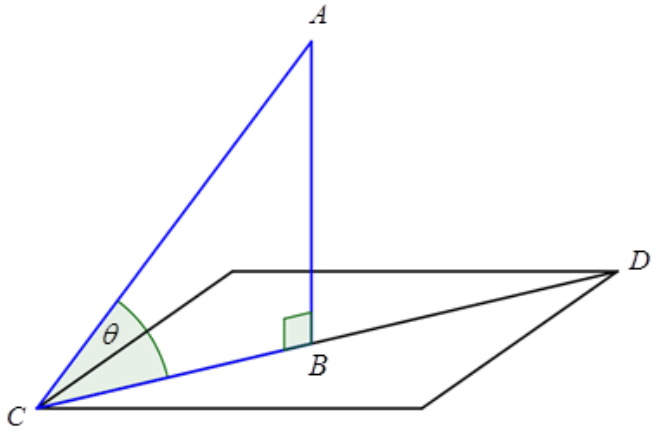
ในที่นี้ จะได้ $W = 1.4$ และ $L = 1.8$

นั่นคือ $\sin\theta = \frac{1.4}{1.8}$

จะได้ $\theta \approx 51.06°$

ดังนั้น มุมที่เกิดจากเส้นทางการเคลื่อนที่ของหยดเลือดทำกับพื้นมีขนาดประมาณ 51.06 องศา

42.



ให้ A แทนตำแหน่งยอดหอไอเฟล

ระยะ AB แทนความสูงจากระดับสายตาปรีชาถึงยอดหอไอเฟล

จะได้ $AB = 324 - 1.8 = 322.2$ เมตร

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ $CD = \sqrt{125^2 + 125^2} = 125\sqrt{2}$ เมตร

นั่นคือ $CB = \frac{125\sqrt{2}}{2}$ เมตร

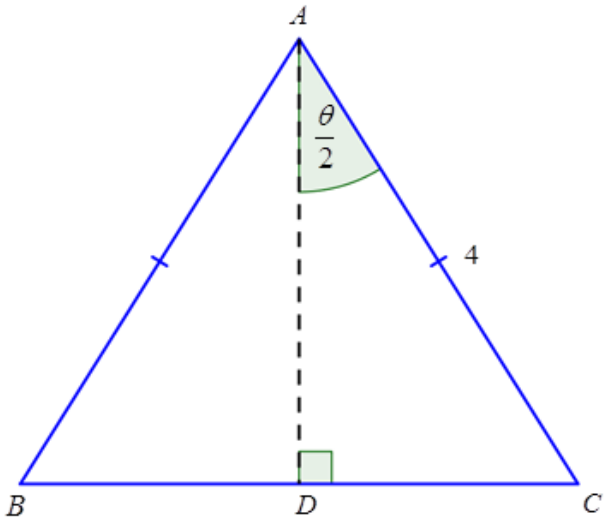
พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC จะได้

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{AB}{BC} \\ &= \frac{322.22}{\frac{125\sqrt{2}}{2}} \\ &\approx 3.65\end{aligned}$$

จะได้ $\theta \approx 74.68°$

ดังนั้น ปรีชาจะมองเห็นยอดหอไอเฟลด้วยมุมเงยประมาณ 74.68 องศา

43.



ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มีมุม A เป็นมุมยอด และ AD เป็นความสูง และ BC เป็นฐาน จะได้ $A\hat{D}C = 90°$

1) จาก $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{AD}{AC}$

นั่นคือ $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{AD}{4}$

$AD = 4\cos\frac{\theta}{2}$

ดังนั้น ความสูงของรูปสามเหลี่ยมนี้ เท่ากับ $4\cos\frac{\theta}{2}$ นิ้ว

2) จาก $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{DC}{AC}$

นั่นคือ $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{DC}{4}$

$DC = 4\sin\frac{\theta}{2}$

ดังนั้น ความยาวฐานของรูปสามเหลี่ยมนี้ เท่ากับ $8\sin\frac{\theta}{2}$ นิ้ว

3) จากพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \times AD \times BC$

$= \frac{1}{2}\left(4\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(8\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$= 8\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)$

$= 8\sin\theta$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้ เท่ากับ $8\sin\theta$ ตารางนิ้ว

44. จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 12^2 + 5^2$

$= 169$

นั่นคือ $AC = 13$ เซนติเมตร

จาก $EC^2 = AE^2 + AC^2$

$= 6^2 + 13^2$

$= 205$

นั่นคือ $EC = \sqrt{205}$ เซนติเมตร

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ACE จากกฎของโคไซน์ จะได้

$$AE^2 = AC^2 + EC^2 - 2(AC)(EC)\cos A\hat{C}E$$

นั่นคือ $$6^2 = 13^2 + \left(\sqrt{205}\right)^2 - 2(13)\left(\sqrt{205}\right)\cos A\hat{C}E$$

จะได้ $\cos A\hat{C}E \approx 0.9080$

$A\hat{C}E \approx 24.77°$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม HDF จากกฎของโคไซน์ จะได้

$$HF^2 = DH^2 + DF^2 - 2(DH)(DF)\cos H\hat{D}F$$

เนื่องจาก $HF = AC = 13$ และ $DF = EC = \sqrt{205}$

จะได้ $$13^2 = 6^2 + \left(\sqrt{205}\right)^2 - 2(6)\left(\sqrt{205}\right)\cos H\hat{D}F$$

จะได้ $\cos H\hat{D}F \approx 0.4191$

$H\hat{D}F \approx 65.22°$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$CH^2 = HD^2 + DC^2$

$= 6^2 + 12^2$

$= 180$

นั่นคือ $CH = \sqrt{180}$ นิ้ว

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ECH จากกฎของโคไซน์ จะได้

$$EH^2 = EC^2 + HC^2 - 2(EC)(HC)\cos E\hat{C}H$$

นั่นคือ $$5^2 = \left(\sqrt{205}\right)^2 + \left(\sqrt{180}\right)^2 - 2\left(\sqrt{205}\right)\left(\sqrt{180}\right)\cos E\hat{C}H$$

จะได้ $$\cos E\hat{C}H \approx 0.9370$$

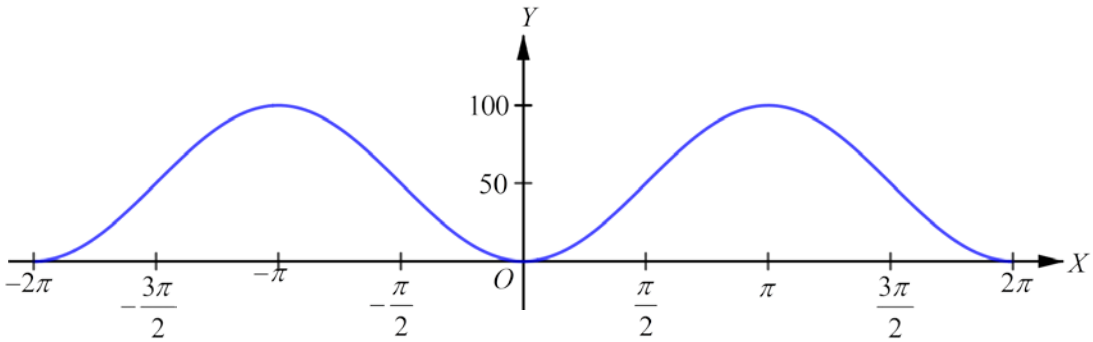
$$E\hat{C}H \approx 20.45^\circ$$

ดังนั้น มุม ACE มุม HDF และมุม ECH มีขนาดประมาณ $24.77^\circ, 65.22^\circ$ และ 20.45° ตามลำดับ

45. จาก $f(\theta) = 50(1-\cos\theta)$

จะได้ คาบ คือ 2π และ แอมพลิจูด คือ 50

เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(\theta) = 50(1-\cos\theta)$ ได้ดังนี้



1) จาก $-1 \le \cos\theta \le 1$

จะได้ $-1 \le -\cos\theta \le 1$

$0 \le 1-\cos\theta \le 2$

$0 \le 50(1-\cos\theta) \le 100$

นั่นคือ $0 \le f(\theta) \le 100$

ดังนั้น เรนจ์ของ f คือ $[0,100]$

2) ในวันแรม 15 ค่ำ แทน θ ใน $f(\theta)$ ด้วย 0° จะได้

$$f(0^\circ) = 50(1-\cos 0^\circ)$$

$$= 0$$

ดังนั้น ร้อยละของพื้นที่ภาพของดวงจันทร์ที่สามารถมองเห็นได้ ในวันแรม 15 ค่ำ เป็น 0

ในวันขึ้น 8 ค่ำ แทน θ ใน $f(\theta)$ ด้วย 90° จะได้

$$f(90°) = 50(1-\cos 90°)$$
$$= 50$$

ดังนั้น ร้อยละของพื้นที่ภาพของดวงจันทร์ที่สามารถมองเห็นได้ ในวันขึ้น 8 ค่ำ เป็น 50

ในวันขึ้น 15 ค่ำ แทน θ ใน $f(\theta)$ ด้วย $180°$ จะได้

$$f(180°) = 50(1-\cos 180°)$$
$$= 100$$

ดังนั้น ร้อยละของพื้นที่ภาพของดวงจันทร์ที่สามารถมองเห็นได้ ในวันขึ้น 15 ค่ำ เป็น 100

ในวันแรม 8 ค่ำ แทน θ ใน $f(\theta)$ ด้วย $270°$ จะได้

$$f(270°) = 50(1-\cos 270°)$$
$$= 50$$

ดังนั้น ร้อยละของพื้นที่ภาพของดวงจันทร์ที่สามารถมองเห็นได้ ในวันแรม 8 ค่ำ เป็น 50

3) จาก $25 = 50(1-\cos\theta)$

จะได้ $1-\cos\theta = \frac{1}{2}$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

เนื่องจาก $0° \le \theta \le 360°$ จะได้ $\theta = 60°$ หรือ $\theta = 300°$

ดังนั้น $\theta = 60°$ หรือ $\theta = 300°$ ทำให้ดวงจันทร์มีลักษณะเป็นเสี้ยวที่มีร้อยละของพื้นที่ภาพของดวงจันทร์ที่สามารถมองเห็นได้เป็น 25

บทที่ 2 เมทริกซ์

แบบฝึกหัด 2.1

1. จากโจทย์จะได้ว่า $2y-3=5,\ 2z=4$ และ $x+y=3$

   จาก $2y-3=5$ จะได้ $y=4$

   จาก $2z=4$ จะได้ $z=2$

   แทน y ด้วย 4 ใน $x+y=3$ จะได้ $x=-1$

   ดังนั้น $x,\ y$ และ z คือ $-1,\ 4$ และ 2 ตามลำดับ

2. ให้ $A=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ และ $C=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$ จากระบบสมการเชิงเส้น

   จะได้สมการเมทริกซ์ คือ

   $$x\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$$

3. 1) จำนวนนักเรียนชายชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 คือ สมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 2 หลักที่ 2 นั่นคือ จำนวนนักเรียนชายชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มี 124 คน

   2) จำนวนนักเรียนหญิงทั้งหมดของโรงเรียนแห่งนี้ คือ $122+128+115=365$ คน

   3) เมทริกซ์แสดงผลต่างของจำนวนนักเรียนหญิงและชายในแต่ละระดับชั้นของโรงเรียนแห่งนี้ คือ $\begin{bmatrix}|122-130|\\|128-124|\\|115-119|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\4\\4\end{bmatrix}$

4. 1)
   $$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}1+0&2+1\\3+1&4+(-1)\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}1&3\\4&3\end{bmatrix} \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 2A-B &= 2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}2-0 & 4-1\\ 6-1 & 8-(-1)\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 9\end{bmatrix} \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} -\frac{2}{3}B &= -\frac{2}{3}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}0 & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix} \end{aligned}$$

5. 1) $$\begin{aligned} \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1(-1)+3(1) & 1(3)+3(3) & 1(2)+3(0)\\ 2(-1)+(-1)(1) & 2(3)+(-1)(3) & 2(2)+(-1)(0)\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}-1+3 & 3+9 & 2+0\\ -2-1 & 6-3 & 4+0\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}2 & 12 & 2\\ -3 & 3 & 4\end{bmatrix} \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} \begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ -1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1(-3)+2(1)+5(-1)\\ 2(-3)+0(1)+(-1)(-1)\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}-3+2-5\\ -6+0+1\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}-6\\ -5\end{bmatrix} \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} \begin{bmatrix}-2 & 1\\ 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ -5\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}(-2)(7)+1(-5)\\ 5(7)+6(-5)\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}-14-5\\ 35-30\end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ -5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-19\\ 5\end{bmatrix}$$

4) $$\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3(0)+2(1)+1(-1)\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}0+2-1\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$

5) $$\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1(3) & 1(2) & 1(1)\\ -1(3) & -1(2) & -1(1)\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ -3 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

6) $$\begin{bmatrix}-1 & 5 & 2\\ 4 & -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(-1)(x)+5(y)+2(z)\\ 4(x)+(-3)(y)+0(z)\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}-x+5y+2z\\ 4x-3y\end{bmatrix}$$

6. 1) $$2C-3E = 2\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}2 & -4 & 5\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}6 & -2 & 6\\ 8 & 2 & 0\\ 4 & 2 & 6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6 & -12 & 15\\ 3 & 3 & -3\\ 6 & 6 & 0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}6-6 & -2-(-12) & 6-15\\ 8-3 & 2-3 & 0-(-3)\\ 4-6 & 2-6 & 6-0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}0 & 10 & -9\\ 5 & -1 & 3\\ -2 & -4 & 6\end{bmatrix}$$

2) $$AB = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1(1)+2(2)+0(3) & 1(0)+2(1)+0(2)\\ 2(1)+1(2)+4(3) & 2(0)+1(1)+4(2)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1+4+0 & 0+2+0\\ 2+2+12 & 0+1+8\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}5 & 2\\ 16 & 9\end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1(1)+0(2) & 1(2)+0(1) & 1(0)+0(4)\\ 2(1)+1(2) & 2(2)+1(1) & 2(0)+1(4)\\ 3(1)+2(2) & 3(2)+2(1) & 3(0)+2(4)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1+0 & 2+0 & 0+0\\ 2+2 & 4+1 & 0+4\\ 3+4 & 6+2 & 0+8\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & 5 & 4\\ 7 & 8 & 8\end{bmatrix}$$

3) $$D^2 = \begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3(3)+(-2)(2) & 3(-2)+(-2)(0)\\ 2(3)+0(2) & 2(-2)+0(0)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}9-4 & (-6)+0\\ 6+0 & (-4)+0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}5 & -6\\ 6 & -4\end{bmatrix}$$

จาก AB ที่ได้ในข้อ 2) จะได้

$$AB+D^2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 16 & 9 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+5 & 2+(-6) \\ 16+6 & 9+(-4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 22 & 5 \end{bmatrix}$$

4) $$C^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(3)+(-1)(4)+3(2) & 3(-1)+(-1)(1)+3(1) & 3(3)+(-1)(0)+3(3) \\ 4(3)+1(4)+0(2) & 4(-1)+1(1)+0(1) & 4(3)+1(0)+0(3) \\ 2(3)+1(4)+3(2) & 2(-1)+1(1)+3(1) & 2(3)+1(0)+3(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-4+6 & (-3)-1+3 & 9+0+9 \\ 12+4+0 & (-4)+1+0 & 12+0+0 \\ 6+4+6 & (-2)+1+3 & 6+0+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & -1 & 18 \\ 16 & -3 & 12 \\ 16 & 2 & 15 \end{bmatrix}$$

จาก BA ที่ได้ในข้อ 2) จะได้

$$BA-2C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 11 & -1 & 18 \\ 16 & -3 & 12 \\ 16 & 2 & 15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 22 & -2 & 36 \\ 32 & -6 & 24 \\ 32 & 4 & 30 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-22 & 2-(-2) & 0-36 \\ 4-32 & 5-(-6) & 4-24 \\ 7-32 & 8-4 & 8-30 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -21 & 4 & -36 \\ -28 & 11 & -20 \\ -25 & 4 & -22 \end{bmatrix}$$

5) $$A^tB^t = \begin{bmatrix}1&2\\2&1\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1(1)+2(0) & 1(2)+2(1) & 1(3)+2(2)\\ 2(1)+1(0) & 2(2)+1(1) & 2(3)+1(2)\\ 0(1)+4(0) & 0(2)+4(1) & 0(3)+4(2)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1+0 & 2+2 & 3+4\\ 2+0 & 4+1 & 6+2\\ 0+0 & 0+4 & 0+8\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\0&4&8\end{bmatrix}$$

$$A^tB^t+2E = \begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\0&4&8\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2&-4&5\\1&1&-1\\2&2&0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\0&4&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&-8&10\\2&2&-2\\4&4&0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1+4 & 4+(-8) & 7+10\\ 2+2 & 5+2 & 8+(-2)\\ 0+4 & 4+4 & 8+0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}5&-4&17\\4&7&6\\4&8&8\end{bmatrix}$$

6) จาก AB ที่ได้ในข้อ 2) จะได้

$$(AB)D = \begin{bmatrix}5&2\\16&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2\\2&0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}5(3)+2(2) & 5(-2)+2(0)\\ 16(3)+9(2) & 16(-2)+9(0)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}15+4 & (-10)+0\\ 48+18 & (-32)+0\end{bmatrix}$$

$$(AB)D = \begin{bmatrix} 19 & -10 \\ 66 & -32 \end{bmatrix}$$

7) $$C+E = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+2 & (-1)+(-4) & 3+5 \\ 4+1 & 1+1 & 0+(-1) \\ 2+2 & 1+2 & 3+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -5 & 8 \\ 5 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

จาก BA ที่ได้ในข้อ 2) จะได้

$$BA(C+E) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -5 & 8 \\ 5 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(5)+2(5)+0(4) & 1(-5)+2(2)+0(3) & 1(8)+2(-1)+0(3) \\ 4(5)+5(5)+4(4) & 4(-5)+5(2)+4(3) & 4(8)+5(-1)+4(3) \\ 7(5)+8(5)+8(4) & 7(-5)+8(2)+8(3) & 7(8)+8(-1)+8(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+10+0 & (-5)+4+0 & 8-2+0 \\ 20+25+16 & (-20)+10+12 & 32-5+12 \\ 35+40+32 & (-35)+16+24 & 56-8+24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & -1 & 6 \\ 61 & 2 & 39 \\ 107 & 5 & 72 \end{bmatrix}$$

7. 1) $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(-1)+3(1) & 1(3)+3(3) & 1(2)+3(0) \\ 2(-1)+(-1)(1) & 2(3)+(-1)(3) & 2(2)+(-1)(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)+3 & 3+9 & 2+0 \\ (-2)-1 & 6-3 & 4+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 12 & 2 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

จะได้ $ABC = (AB)C$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 12 & 2 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(-1)+12(0)+2(3) & 2(2)+12(1)+2(-2) \\ (-3)(-1)+3(0)+4(3) & (-3)(2)+3(1)+4(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-2)+0+6 & 4+12-4 \\ 3+0+12 & (-6)+3-8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 15 & -11 \end{bmatrix}$$

2) $AC^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1(-1)+3(2) & 1(0)+3(1) & 1(3)+3(-2) \\ 2(-1)+(-1)(2) & 2(0)+(-1)(1) & 2(3)+(-1)(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)+6 & 0+3 & 3-6 \\ (-2)-2 & 0-1 & 6+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -4 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

จาก AB ที่ได้ข้อ 1) จะได้

$$AB + AC^t = \begin{bmatrix} 2 & 12 & 2 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -4 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+5 & 12+3 & 2+(-3) \\ (-3)+(-4) & 3+(-1) & 4+8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 15 & -1 \\ -7 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

3) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1(1)+3(2) & 1(3)+3(-1) \\ 2(1)+(-1)(2) & 2(3)+(-1)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+6 & 3-3 \\ 2-2 & 6+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)(-1)+3(0)+2(3) & (-1)(2)+3(1)+2(-2) \\ 1(-1)+3(0)+0(3) & 1(2)+3(1)+0(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+6 & -2+3-4 \\ (-1)+0+0 & 2+3+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

จะได้ $A^2 - 2BC = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-14 & 0-(-6) \\ 0-(-2) & 7-10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

8. จาก $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1(1)+1(0) & 1(1)+1(2) \\ 0(1)+2(0) & 0(1)+2(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 1+2 \\ 0+0 & 0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1(1)+3(0) & 1(1)+3(2) \\ 0(1)+4(0) & 0(1)+4(2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+0 & 1+6 \\ 0+0 & 0+8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \\ A^4 &= A^3A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1(1)+7(0) & 1(1)+7(2) \\ 0(1)+8(0) & 0(1)+8(2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+0 & 1+14 \\ 0+0 & 0+16 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จึงคาดการณ์ว่า $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2^n-1 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

9. 1) $$\begin{aligned} 2A^t &= 2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ให้ X เป็นเมทริกซ์ที่ต้องการ จะได้

$$A+X = 2A^t$$

นั่นคือ $$\begin{aligned} X &= 2A^t - A \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2-1 & 6-(-1) \\ (-2)-3 & 4-2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

2) **วิธีที่ 1**

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(1)+(-1)(3) & 1(-1)+(-1)(2) \\ 3(1)+2(3) & 3(-1)+2(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-3 & -1-2 \\ 3+6 & -3+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

ให้ X เป็นเมทริกซ์ที่ต้องการ จะได้

$$A+X = A^2$$

นั่นคือ

$$X = A^2 - A$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2-1 & -3-(-1) \\ 9-3 & 1-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

วิธีที่ 2 ให้ X เป็นเมทริกซ์ที่ต้องการ จะได้

$$A+X = A^2$$

นั่นคือ

$$X = A^2 - A$$

$$= AA - AI_2$$

$$= A(A - I_2)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(0)+(-1)(3) & 1(-1)+(-1)(1) \\ 3(0)+2(3) & 3(-1)+2(2) \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

3) ให้ X เป็นเมทริกซ์ที่ต้องการ จะได้

$$A+X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} - A \\ &= \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x-1 & y+1 \\ z-3 & t-2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

10. 1)

$$\begin{aligned} 3X - A &= A \\ 3X &= 2A \\ X &= \frac{2}{3}A \\ &= \frac{2}{3}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A &= 2(2X - A) \\ \frac{1}{2}A &= 4X - 2A \\ \frac{5}{2}A &= 4X \\ X &= \frac{5}{8}A \\ &= \frac{5}{8}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

11. 1)

$$A-B = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1-3 & 2-2\\ 3-0 & 0-(-1)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-2 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$(A-B)^2 = \begin{bmatrix}-2 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}(-2)(-2)+0(3) & (-2)(0)+0(1)\\ 3(-2)+1(3) & 3(0)+1(1)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}4+0 & 0+0\\ (-6)+3 & 0+1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}4 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1(1)+2(3) & 1(2)+2(0)\\ 3(1)+0(3) & 3(2)+0(0)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1+6 & 2+0\\ 3+0 & 6+0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}7 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1(3)+2(0) & 1(2)+2(-1)\\ 3(3)+0(0) & 3(2)+0(-1)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3+0 & 2-2\\ 9+0 & 6+0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3 & 0\\ 9 & 6\end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
B^2 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3(3)+2(0) & 3(2)+2(-1) \\ 0(3)+(-1)(0) & 0(2)+(-1)(-1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 9+0 & 6-2 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
A^2-2AB+B^2 &= \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 18 & 12 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -15 & -5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $(A-B)^2 \neq A^2-2AB+B^2$

2)

$$
\begin{aligned}
A+B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1+3 & 2+2 \\ 3+0 & 0+(-1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\
(A+B)(A-B) &= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4(-2)+4(3) & 4(0)+4(1) \\ 3(-2)+(-1)(3) & 3(0)+(-1)(1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -8+12 & 0+4 \\ (-6)-3 & 0-1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -9 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7-9 & 2-4 \\ 3-0 & 6-1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$

12. เนื่องจาก $A \neq \underline{0}$ จะได้

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0(0)+a(0)+b(0) & 0(a)+a(0)+b(0) & 0(b)+a(c)+b(0) \\ 0(0)+0(0)+c(0) & 0(a)+0(0)+c(0) & 0(b)+0(c)+c(0) \\ 0(0)+0(0)+0(0) & 0(a)+0(0)+0(0) & 0(b)+0(c)+0(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $ac \neq 0$ จึงได้ว่า $A^2 \neq \underline{0}$

$$\begin{aligned} A^3 &= AA^2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0(0)+a(0)+b(0) & 0(0)+a(0)+b(0) & 0(ac)+a(0)+b(0) \\ 0(0)+0(0)+c(0) & 0(0)+0(0)+c(0) & 0(ac)+0(0)+c(0) \\ 0(0)+0(0)+0(0) & 0(0)+0(0)+0(0) & 0(ac)+0(0)+0(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

นั่นคือ $A^3 = \underline{0}$

ดังนั้น จำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $A^n = \underline{0}$ คือ 3

13. จาก $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1(1)+1(x) & 1(1)+1(y) \\ x(1)+y(x) & x(1)+y(y) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+x & 1+y \\ x+yx & x+y^2 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $A^2 = \underline{0}$ จะได้

$$\begin{bmatrix} 1+x & 1+y \\ x+yx & x+y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $1+x=0, 1+y=0, x+yx=0$ และ $x+y^2=0$

ดังนั้น $x=-1$ และ $y=-1$

14. ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times p}$

จะได้ $AB=\left[c_{ij}\right]_{m\times p}$ เมื่อ $c_{ij} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$

นั่นคือ $k(AB)=k\left[c_{ij}\right]_{m\times p}=\left[kc_{ij}\right]_{m\times p}$

จาก $kA=\left[ka_{ij}\right]_{m\times n}$ จะได้ $(kA)B=\left[d_{ij}\right]_{m\times p}$

เมื่อ $d_{ij} = (ka_{i1})b_{1j}+(ka_{i2})b_{2j}+\cdots+(ka_{in})b_{nj}$

$= k(a_{i1}b_{1j})+k(a_{i2}b_{2j})+\cdots+k(a_{in}b_{nj})$

$= k(a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj})$

$= kc_{ij}$

ดังนั้น $k(AB)=(kA)B$

และจาก $kB=\left[kb_{ij}\right]_{n\times p}$ จะได้

$A(kB) = \left[e_{ij}\right]_{m\times p}$ เมื่อ

$e_{ij} = a_{i1}(kb_{1j})+a_{i2}(kb_{2j})+\cdots+a_{in}(kb_{nj})$

$= k(a_{i1}b_{1j})+k(a_{i2}b_{2j})+\cdots+k(a_{in}b_{nj})$

$= k(a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj})$

$= kc_{ij}$

นั่นคือ $k(AB) = A(kB)$

ดังนั้น $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

15. 1) เป็นเท็จ

เช่น ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ จะได้

$$\begin{aligned}A^2 &= \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1(1)+1(-1) & 1(1)+1(-1)\\ (-1)(1)+(-1)(-1) & (-1)(1)+(-1)(-1)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1-1 & 1-1\\ -1+1 & -1+1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

แต่ $A\neq\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

2) เป็นเท็จ

เช่น ให้ $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ จะได้

$$\begin{aligned}A^2 &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0(0)+1(1) & 0(1)+1(0)\\ 1(0)+0(1) & 1(1)+0(0)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0+1 & 0+0\\ 0+0 & 1+0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

แต่ $A\neq\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ และ $A\neq\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

3) เป็นเท็จ

เช่น ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ จะได้

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1(1)+0(0) & 1(0)+0(0) \\ 0(1)+0(0) & 0(0)+0(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

แต่ $A \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $A \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4) เป็นเท็จ

เช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ จะได้

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1(1)+(-2)(1) & 1(-2)+(-2)(-1) \\ 1(1)+(-1)(1) & 1(-2)+(-1)(-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-2 & -2+2 \\ 1-1 & -2+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

นั่นคือ $A^2 = -I_2$

16. ให้ A เป็นเมทริกซ์แสดงข้อมูลจากตารางแสดงยอดขายข้าวแต่ละชนิดของโรงสีรวมใจชาวนา

นั่นคือ $A = \begin{bmatrix} 20 & 45 & 8 \\ 55 & 10 & 14 \end{bmatrix}$

ให้ $B = \begin{bmatrix} 23,000 \\ 25,000 \\ 17,000 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์แสดงราคาขายข้าวแต่ละชนิดในราคาปกติ

ดังนั้น $AB = \begin{bmatrix} 20 & 45 & 8 \\ 55 & 10 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 23,000 \\ 25,000 \\ 17,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,721,000 \\ 1,753,000 \end{bmatrix}$

นั่นคือ รายรับของโรงสีรวมใจชาวนาที่ขายข้าวทุกชนิดในราคาปกติของสาขาจังหวัดบุรีรัมย์และจังหวัดเชียงใหม่ เป็น 1,721,000 บาท และ 1,753,000 บาท ตามลำดับ

ให้ $C=\begin{bmatrix}22,000\\23,500\\15,000\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์แสดงราคาขายข้าวแต่ละชนิดในราคาสมาชิก

ดังนั้น $AC=\begin{bmatrix}20&45&8\\55&10&14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}22,000\\23,500\\15,000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1,617,500\\1,655,000\end{bmatrix}$

นั่นคือ รายรับของโรงสีรวมใจชาวนาที่ขายข้าวทุกชนิดในราคาสมาชิกของสาขาจังหวัดบุรีรัมย์และจังหวัดเชียงใหม่ เป็น 1,617,500 บาท และ 1,655,000 บาท ตามลำดับ

17. ให้ A เป็นเมทริกซ์แสดงข้อมูลจากตารางแสดงยอดขายรถยนต์มือสองและรถยนต์ใหม่ของวิรัชและดวงใจในเดือนตุลาคม 2561

นั่นคือ $A=\begin{bmatrix}5&15\\1.35&0\end{bmatrix}$

และให้ B เป็นเมทริกซ์แสดงข้อมูลจากตารางแสดงยอดขายรถยนต์มือสองและรถยนต์ใหม่ของวิรัชและดวงใจในเดือนพฤศจิกายน 2561

นั่นคือ $B=\begin{bmatrix}7.5&16\\2.09&8.5\end{bmatrix}$

1) $A+B$ เป็นเมทริกซ์แสดงยอดขายรถยนต์มือสองและรถยนต์ใหม่ของแต่ละคนรวมทั้งสองเดือน จะได้

$$\begin{aligned}A+B &= \begin{bmatrix}5&15\\1.35&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7.5&16\\2.09&8.5\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}12.5&31\\3.44&8.5\end{bmatrix}\end{aligned}$$

ดังนั้น ยอดขายรถยนต์มือสองและรถยนต์ใหม่ของวิรัชรวมทั้งสองเดือนเป็น 12.5 ล้านบาท และ 31 ล้านบาท ตามลำดับ และ ยอดขายรถยนต์มือสองและรถยนต์ใหม่ของดวงใจรวมทั้งสองเดือนเป็น 3.44 ล้านบาท และ 8.5 ล้านบาท ตามลำดับ

2) $B-A$ เป็นเมทริกซ์แสดงยอดขายรถยนต์มือสองและรถยนต์ใหม่ของวิรัชและดวงใจในเดือนพฤศจิกายน 2561 ที่เพิ่มขึ้นจากเดือนตุลาคม 2561 จะได้

$$B-A = \begin{bmatrix}7.5&16\\2.09&8.5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5&15\\1.35&0\end{bmatrix}$$

$$B-A = \begin{bmatrix} 2.5 & 1 \\ 0.74 & 8.5 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ยอดขายรถยนต์มือสองและรถยนต์ใหม่ของวิรัชในเดือนพฤศจิกายน 2561 เพิ่มขึ้นจากเดือนตุลาคม 2561 2.5 ล้านบาท และ 1 ล้านบาท ตามลำดับ และยอดขายรถยนต์มือสองและรถยนต์ใหม่ของดวงใจในเดือนพฤศจิกายน 2561 เพิ่มขึ้นจากเดือนตุลาคม 2561 เป็นจำนวน 0.74 ล้านบาท และ 8.5 ตามลำดับ

3) $\frac{3}{100}B$ เป็นเมทริกซ์แสดงค่านายหน้าสำหรับรถยนต์มือสองและรถยนต์ใหม่ของทั้งสองคน ในเดือนพฤศจิกายน 2561 จะได้

$$\frac{3}{100}B = \frac{3}{100}\begin{bmatrix} 7.5 & 16 \\ 2.09 & 8.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.225 & 0.48 \\ 0.0627 & 0.255 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ค่านายหน้าสำหรับรถยนต์มือสองและรถยนต์ใหม่ของวิรัชเป็น 0.225 ล้านบาท และ 0.48 ล้านบาท ตามลำดับ และ ค่านายหน้าสำหรับรถยนต์มือสองและรถยนต์ใหม่ของดวงใจเป็น 0.0627 ล้านบาท และ 0.255 ล้านบาท ตามลำดับ

แบบฝึกหัด 2.2

1. 1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 2(3)-(-1)(6)$

$= 12$

2) $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(2)-(1)(-3)$

$= -1$

3) **วิธีที่ 1**

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(2)(1)+(-1)(1)(4)+0(4)(2)-4(2)(0)-2(1)(2)-1(4)(-1)$$

$= 0$

วิธีที่ 2

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ (จากทฤษฎีบท 4 ข้อ 5)

4) **วิธีที่ 1**

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-2)(-1)(4)+2(0)(0)+3(1)(1)-0(-1)(3)-1(0)(-2)-4(1)(2)$$

$$= 3$$

วิธีที่ 2

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

(เนื่องจากเมทริกซ์ใหม่เกิดจากการคูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2 ด้วย 2 แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1)

$$= (-1)^{1+3}(3)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(จากบทนิยาม 12 โดยการกระจายตามแถวที่ 1)

$$= 3(1(1)-(-1)(0))$$

$$= 3$$

5) **วิธีที่ 1**

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -6 \end{vmatrix} = (-2)(4)(-6)+1(-2)(3)+4(1)(6)-3(4)(4)-6(-2)(-2)-(-6)(1)(1)$$

$$= 0$$

วิธีที่ 2

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

(เนื่องจากเมทริกซ์ใหม่เกิดจากคูณสมาชิกแต่ละตัวในหลักที่ 1 ด้วย 2 แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในหลักที่ 3)

$$= 0$$

(จากบทนิยาม 12 โดยการกระจายตามหลักที่ 1)

6) **วิธีที่ 1**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2(5)(-2)+3(-2)(0)+1(0)(0)-0(5)(1)-0(-2)(2)-(-2)(0)(3)$$

$$= -20$$

วิธีที่ 2

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(2)\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

(จากบทนิยาม 12 โดยการกระจายตามแถวที่ 1)

$$= 2\big((5)(-2)-(-2)(0)\big)$$

$$= -20$$

7) **วิธีที่ 1**

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(-1)2+2(-2)3+5(1)(-5)-3(-1)(5)-(-5)(-2)(-2)-2(1)(2)$$

$$= -2$$

วิธีที่ 2

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

(เนื่องจากเมทริกซ์ใหม่เกิดจากการคูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2 ด้วย 2 แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1)

$$= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

(จากบทนิยาม 12 โดยการกระจายตามแถวที่ 1)

$$= 1\big(1(-5)-(-1)(3)\big)$$

$$= -2$$

8) **วิธีที่ 1**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 1(2)(3)+2(3)(7)+3(7)(6)-7(2)(3)-6(3)(1)-3(7)(2)$$

$$= 72$$

วิธีที่ 2

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\7&2&3\\7&6&3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&2&3\\6&0&0\\7&6&3\end{vmatrix}$$

(เนื่องจากเมทริกซ์ใหม่เกิดจากการคูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1 ด้วย -1 แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2)

$$= (-1)^{2+1}(6)\begin{vmatrix}2&3\\6&3\end{vmatrix}$$

(จากบทนิยาม 12 โดยการกระจายตามแถวที่ 2)

$$= 72$$

9) **วิธีที่ 1**

$$\begin{vmatrix}0&7&0\\1&3&5\\-6&2&0\end{vmatrix} = 0(3)(0)+7(5)(-6)+0(1)(2)-(-6)(3)(0)-2(5)(0)-0(1)(7)$$

$$= -210$$

วิธีที่ 2

$$\begin{vmatrix}0&7&0\\1&3&5\\-6&2&0\end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(7)\begin{vmatrix}1&5\\-6&0\end{vmatrix}$$

(จากบทนิยาม 12 โดยการกระจายตามแถวที่ 1)

$$= -7\big(1(0)-5(-6)\big)$$

$$= -210$$

10) $$\begin{vmatrix}a^2&ab&ac\\ab&b^2&bc\\ac&bc&c^2\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix}a&b&c\\ab&b^2&bc\\ac&bc&c^2\end{vmatrix}$$

(จากทฤษฎีบท 4 ข้อ 3)

$$= ab\begin{vmatrix}a&b&c\\a&b&c\\ac&bc&c^2\end{vmatrix}$$

(จากทฤษฎีบท 4 ข้อ 3)

$$= ab(0)$$

$$= 0$$

2. จาก $\det(A) = \begin{vmatrix}7&-2\\4&-1\end{vmatrix} = 7(-1)-(-2)(4) = 1$

จะได้ว่า $\det(A^t) = \det(A) = 1$ และ $\det(A^5) = (\det(A))^5 = 1^5 = 1$

และจาก $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= (-1)^{2+1}(-3)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 3(2(3)-5(1)) + 2(1(1)-2(2))$

$= -3$

จะได้ว่า $\det(B^t) = \det(B) = -3$

และ $\det(B^6) = (\det(B))^6 = (-3)^6 = 729$

แบบฝึกหัด 2.3

1. 1) เนื่องจากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์นี้เท่ากับ $3(2)-(-1)(-5)=1$ ซึ่งไม่เท่ากับ 0
   ดังนั้น เมทริกซ์นี้มีเมทริกซ์ผกผัน คือ $\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

   2) เนื่องจากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์นี้เท่ากับ $1(4)-2(2)=0$
   ดังนั้น เมทริกซ์นี้จึงไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

   3) เนื่องจากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์นี้เท่ากับ $0(0)-(1)(1)=-1$ ซึ่งไม่เท่ากับ 0
   ดังนั้น เมทริกซ์นี้มีเมทริกซ์ผกผัน คือ $\frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   4) เนื่องจากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์นี้เท่ากับ
   $(\cos\theta)(\cos\theta)-(-\sin\theta)(\sin\theta) = \cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$ ซึ่งไม่เท่ากับ 0
   ดังนั้น เมทริกซ์นี้มีเมทริกซ์ผกผัน คือ $\frac{1}{1}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

2. ให้ $AB = \underline{0}$ และ $B \neq \underline{0}$
   สมมติว่า A มีเมทริกซ์ผกผัน
   จะได้ $A^{-1}AB = A^{-1}(AB) = A^{-1}\underline{0}$
   เนื่องจาก $A^{-1}AB = (A^{-1}A)B = IB = B$ และ $A^{-1}\underline{0} = \underline{0}$
   จะได้ $B = \underline{0}$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานว่า $B \neq \underline{0}$
   ดังนั้น A ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

แบบฝึกหัด 2.4

1. 1) ให้ $A=\begin{bmatrix}5 & 17\\ 2 & 7\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$

เขียนระบบสมการในรูปสมการเมทริกซ์ $AX=B$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix}5 & 17\\ 2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$$

หาเมทริกซ์ผกผันของ A จะได้

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{5(7)-17(2)}\begin{bmatrix}7 & -17\\ -2 & 5\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}7 & -17\\ -2 & 5\end{bmatrix}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $X = A^{-1}B$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}7 & -17\\ -2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}7(1)-17(-2)\\ -2(1)+5(-2)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}41\\ -12\end{bmatrix}\end{aligned}$$

นั่นคือ $x=41$ และ $y=-12$

ดังนั้น $(41,-12)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ

2) ให้ $A=\begin{bmatrix}11 & -4\\ 3 & -1\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$

เขียนระบบสมการในรูปสมการเมทริกซ์ $AX=B$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix}11 & -4\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$$

หาเมทริกซ์ผกผันของ A จะได้

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{11(-1)-(-4)(3)}\begin{bmatrix}-1 & 4\\ -3 & 11\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-1 & 4\\ -3 & 11\end{bmatrix}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $X = A^{-1}B$

ดังนั้น
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1(2)+4(3) \\ -3(2)+11(3) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 10 \\ 27 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $x = 10$ และ $y = 27$

ดังนั้น $(10, 27)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ

2. 1) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -7 & 12 \\ 1 & 4 & -2 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้
$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -7 & 12 \\ 1 & 4 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -2 \\ 5 & -7 & 12 \end{array}\right] R_1 \leftrightarrow R_2$$
$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -27 & 22 \end{array}\right] -5R_1 + R_2$$
$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{22}{27} \end{array}\right] -\frac{1}{27}R_2$$
$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{34}{27} \\ 0 & 1 & -\frac{22}{27} \end{array}\right] -4R_2 + R_1$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้
$$x = \frac{34}{27}$$
$$y = -\frac{22}{27}$$

ดังนั้น $\left(\frac{34}{27}, -\frac{22}{27}\right)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

2) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -5 \\ -2 & 6 & 10 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -5 \\ -2 & 6 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] 2R_1 + R_2$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$x - 3y = -5 \qquad \text{-------}(1)$$

$$0 = 0 \qquad \text{-------}(2)$$

เนื่องจากสมการ (2) เป็นจริงเสมอ จึงหาเฉพาะค่าของ x และ y ที่สอดคล้องกับสมการ (1) ก็เพียงพอ

จากสมการ (1) จะได้ $x = 3y - 5$

จะเห็นว่า x ขึ้นอยู่กับ y นั่นคือ สามารถเลือก y ให้เป็นจำนวนจริงใดก็ได้

ในที่นี้ให้ $y = t$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $(3t - 5, t)$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

3) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & -6 \\ 2 & -3 & 0 & 7 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & -6 \\ 2 & -3 & 0 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & -9 & -2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -R_1 + R_2 \\ -2R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & -2 & 3 \end{array}\right] -\frac{1}{4}R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{array}\right] \begin{array}{l} -3R_2 + R_1 \\ \\ 9R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \frac{1}{7}R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} 2R_3 + R_1 \\ -R_3 + R_2 \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -1 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(2, -1, 3)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

4) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right] R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} -4R_1 + R_2 \\ -R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] -R_2 + R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] -\frac{1}{3}R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -2R_2 + R_1 \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$x - \frac{5}{3}z = \frac{7}{3} \quad \text{-------}(1)$$

$$y + \frac{1}{3}z = -\frac{2}{3} \quad \text{-------}(2)$$

$$0 = 0 \quad \text{-------}(3)$$

เนื่องจากสมการ (3) เป็นจริงเสมอ จึงหาเฉพาะค่าของ x, y และ z ที่สอดคล้องกับสมการ (1) และ (2) ก็เพียงพอ

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ $x = \frac{5z+7}{3}$ และ $y = \frac{-z-2}{3}$

จะเห็นว่า x และ y ขึ้นอยู่กับ z นั่นคือ สามารถเลือก z ให้เป็นจำนวนจริงใดก็ได้ ในที่นี้ให้ $z = t$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $\left(\frac{5t+7}{3}, \frac{-t-2}{3}, t\right)$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

5) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 7 & 6 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 & -16 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 7 & 6 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 & -16 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 7 & 6 \\ 3 & -1 & 5 & -16 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \leftrightarrow R_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 11 & 10 \\ 0 & 5 & 11 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -R_2 + R_3 \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$x-2y-2z = -2 \quad \text{-------}(1)$$
$$5y+11z = 10 \quad \text{-------}(2)$$
$$0 = -20 \quad \text{-------}(3)$$

จะเห็นว่าสมการ (3) เป็นไปไม่ได้ แสดงว่าระบบสมการตั้งต้นนำไปสู่ระบบสมการซึ่งไม่สอดคล้องกัน

ดังนั้น ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

6) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & -6 \\ 5 & 0 & -3 & -3 \\ 1 & 4 & -3 & -11 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & -6 \\ 5 & 0 & -3 & -3 \\ 1 & 4 & -3 & -11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & -11 \\ 5 & 0 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & -6 \end{array}\right] R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & -11 \\ 0 & -20 & 12 & 52 \\ 0 & -10 & 7 & 27 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -5R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{13}{5} \\ 0 & -10 & 7 & 27 \end{array}\right] -\frac{1}{20}R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -4R_2+R_1 \\ \\ 10R_2+R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{3}{5}R_3 + R_1 \\ \frac{3}{5}R_3 + R_2 \\ \\ \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -2 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(0, -2, 1)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

7) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 2 & 7 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -3R_1 + R_2 \\ -2R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right] -2R_2 + R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] -\frac{1}{7}R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} 3R_3 + R_1 \\ -7R_3 + R_2 \\ \\ \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(2, -1, 1)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

8) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -R_1 + R_2 \\ -2R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_2 + R_1 \\ \\ R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] -\frac{1}{4}R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} -3R_3 + R_1 \\ R_3 + R_2 \\ \\ \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 1 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(0, 1, 2)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

9) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 7 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 4 \\ 0 & -6 & -12 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -4R_1 + R_2 \\ -7R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] -2R_2 + R_3$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 && \text{-------}(1) \\ -3y - 6z &= 4 && \text{-------}(2) \\ 0 &= -1 && \text{-------}(3) \end{aligned}$$

จะเห็นว่าสมการ (3) เป็นไปไม่ได้ แสดงว่าระบบสมการตั้งต้นนำไปสู่ระบบสมการซึ่งไม่สอดคล้องกัน

ดังนั้น ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

10) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 5 & 4 & 1 & 6 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 5 & 4 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 6 \end{array}\right] R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 14 \\ 0 & -1 & 11 & 26 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -3R_1 + R_2 \\ -5R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & -1 & 11 & 26 \end{array}\right] -R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_2 + R_1 \\ \\ R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \frac{1}{4}R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} -5R_3 + R_1 \\ 7R_3 + R_2 \\ \\ \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x &= -5 \\ y &= 7 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(-5, 7, 3)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

11) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & -5 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & -5 \\ 3 & -1 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & -1 \end{array}\right] R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -3R_1 + R_2 \\ -2R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \frac{1}{5}R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} 2R_2 + R_1 \\ \\ -3R_2 + R_3 \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x - z &= 1 && \text{-------}(1) \\ y + 2z &= 3 && \text{-------}(2) \\ 0 &= 0 && \text{-------}(3) \end{aligned}$$

เนื่องจากสมการ (3) เป็นจริงเสมอ จึงหาเฉพาะค่าของ x, y และ z ที่สอดคล้องกับสมการ (1) และ (2) ก็เพียงพอ

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ $x = z+1$ และ $y = -2z+3$

จะเห็นว่า x และ y ขึ้นอยู่กับ z นั่นคือ สามารถเลือก z ให้เป็นจำนวนจริงใดก็ได้ ในที่นี้ให้ $z = t$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $(t+1, -2t+3, t)$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

12) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -6 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -6 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -6 \\ 0 & 7 & 19 & 16 \\ 0 & 5 & 15 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -3R_1 + R_2 \\ -2R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -6 \\ 0 & 7 & 19 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \frac{1}{5}R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 19 & 16 \end{array}\right] R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} 2R_2 + R_1 \\ \\ -7R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] -\frac{1}{2}R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_3 + R_1 \\ -3R_3 + R_2 \\ \\ \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x &= -3 \\ y &= 5 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(-3, 5, -1)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

3. ให้ x แทน จำนวนบุคคลทั่วไปที่มาใช้บริการ

y แทน จำนวนนักเรียนที่มาใช้บริการ

z แทน จำนวนผู้สูงอายุที่มาใช้บริการ

จากโจทย์ สามารถเขียนเป็นระบบสมการเชิงเส้น ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x+y+z &= 2,420 \\ 14x+9y+7z &= 32,540 \\ x-10y-10z &= 0 \end{aligned}$$

เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2,420 \\ 14 & 9 & 7 & 32,540 \\ 1 & -10 & -10 & 0 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2,420 \\ 14 & 9 & 7 & 32,540 \\ 1 & -10 & -10 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2,420 \\ 0 & -5 & -7 & -1,340 \\ 0 & -11 & -11 & -2,420 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -14R_1+R_2 \\ -R_1+R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2,420 \\ 0 & -5 & -7 & -1,340 \\ 0 & 1 & 1 & 220 \end{array}\right] -\frac{1}{11}R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2,420 \\ 0 & 1 & 1 & 220 \\ 0 & -5 & -7 & -1,340 \end{array}\right] R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2,200 \\ 0 & 1 & 1 & 220 \\ 0 & 0 & -2 & -240 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_2+R_1 \\ \\ 5R_2+R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2,200 \\ 0 & 1 & 1 & 220 \\ 0 & 0 & 1 & 120 \end{array}\right] -\frac{1}{2}R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2,200 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 120 \end{bmatrix} -R_3 + R_2$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x &= 2,200 \\ y &= 100 \\ z &= 120 \end{aligned}$$

นั่นคือ $(2200, 100, 120)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

ดังนั้น มีบุคคลทั่วไป นักเรียน และผู้สูงอายุมาใช้บริการ 2200, 100 และ 120 คน ตามลำดับ

4. ให้ x แทน ราคากุ้งต่อกิโลกรัม

y แทน ราคาปลาหมึกต่อกิโลกรัม

z แทน ราคาหอยแครงต่อกิโลกรัม

จากโจทย์ สามารถเขียนเป็นระบบสมการเชิงเส้น ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 50x + 70y + 20z &= 22,100 \\ 15x + 60y + 45z &= 15,600 \\ 70x + 20y + 30z &= 19,400 \end{aligned}$$

เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\begin{bmatrix} 50 & 70 & 20 & 22,100 \\ 15 & 60 & 45 & 15,600 \\ 70 & 20 & 30 & 19,400 \end{bmatrix}$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 50 & 70 & 20 & 22,100 \\ 15 & 60 & 45 & 15,600 \\ 70 & 20 & 30 & 19,400 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 50 & 70 & 20 & 22,100 \\ 1 & 4 & 3 & 1,040 \\ 70 & 20 & 30 & 19,400 \end{bmatrix} \frac{1}{15} R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1,040 \\ 50 & 70 & 20 & 22,100 \\ 70 & 20 & 30 & 19,400 \end{bmatrix} R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1,040 \\ 0 & -130 & -130 & -29,900 \\ 0 & -260 & -180 & -53,400 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -50R_1 + R_2 \\ -70R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1,040 \\ 0 & 1 & 1 & 230 \\ 0 & -260 & -180 & -53,400 \end{array}\right] -\frac{1}{130}R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 120 \\ 0 & 1 & 1 & 230 \\ 0 & 0 & 80 & 6,400 \end{array}\right] \begin{array}{l} -4R_2 + R_1 \\ \\ 260R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 120 \\ 0 & 1 & 1 & 230 \\ 0 & 0 & 1 & 80 \end{array}\right] \frac{1}{80}R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 80 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_3 + R_1 \\ -R_3 + R_2 \\ \\ \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x &= 200 \\ y &= 150 \\ z &= 80 \end{aligned}$$

นั่นคือ $(200, 150, 80)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

ดังนั้น มีกุ้ง ปลาหมึก และหอยแครงราคากิโลกรัมละ 200, 150 และ 80 บาท ตามลำดับ

5. 1) ให้ x แทนค่าซักกางเกงยีนส์ต่อตัว

y แทนค่าซักกางเกงขาสั้นต่อตัว

z แทนค่าซักเสื้อเชิ้ตต่อตัว

จากโจทย์ สามารถเขียนเป็นระบบสมการเชิงเส้น ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x + 5y + 3z &= 115 \\ 2x + 5y + z &= 105 \\ 3x + 4z &= 120 \end{aligned}$$

เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 115 \\ 2 & 5 & 1 & 105 \\ 3 & 0 & 4 & 120 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 115 \\ 2 & 5 & 1 & 105 \\ 3 & 0 & 4 & 120 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 115 \\ 0 & -5 & -5 & -125 \\ 0 & -15 & -5 & -225 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 115 \\ 0 & 1 & 1 & 25 \\ 0 & -15 & -5 & -225 \end{array}\right] -\frac{1}{5}R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 10 & 150 \end{array}\right] \begin{array}{l} -5R_2 + R_1 \\ \\ 15R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right] \frac{1}{10}R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right] \begin{array}{l} 2R_3 + R_1 \\ -R_3 + R_2 \\ \\ \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x &= 20 \\ y &= 10 \\ z &= 15 \end{aligned}$$

นั่นคือ $(20, 10, 15)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

ดังนั้น ร้านนุ่มหอมนานคิดค่าซักกางเกงยีนส์ กางเกงขาสั้น และเสื้อเชิ้ตตัวละ 20, 10 และ 15 บาท ตามลำดับ

2) ให้ A เป็นเมทริกซ์แสดงค่าซักผ้าแต่ละชนิด

จะได้ $A = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 15 \end{bmatrix}$

ให้ $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์แสดงจำนวนกางเกงยีนส์ กางเกงขาสั้น และ

เสื้อเชิ้ตที่ประสิทธิ์ส่งซัก จะได้ $AB = \begin{bmatrix}20 & 10 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\2\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}245\end{bmatrix}$

ดังนั้น ถ้าประสิทธิ์ส่งซักกางเกงยีนส์ 6 ตัว กางเกงขาสั้น 2 ตัว และเสื้อเชิ้ต 7 ตัว เขาจะต้องจ่ายเงินทั้งหมด 245 บาท

6. ให้ $y = ax^2 + bx + c$ เป็นสมการพาราโบลาที่ต้องการหา เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

เนื่องจากพาราโบลาผ่านจุด $(-1, 9)$, $(1, -1)$ และ $(2, 3)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 9 &= a(-1)^2 + b(-1) + c \\ -1 &= a(1)^2 + b(1) + c \\ 3 &= a(2)^2 + b(2) + c \end{aligned}$$

สามารถเขียนเป็นระบบสมการเชิงเส้น ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} a - b + c &= 9 \\ a + b + c &= -1 \\ 4a + 2b + c &= 3 \end{aligned}$$

เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & -10 \\ 0 & 6 & -3 & -33 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -R_1 + R_2 \\ -4R_1 + R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 6 & -3 & -33 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \frac{1}{2}R_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \begin{matrix} R_2 + R_1 \\ \\ -6R_2 + R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] -\frac{1}{3}R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] -R_3 + R_1$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= -5 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

นั่นคือ $(3, -5, 1)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

ดังนั้น สมการพาราโบลาที่ผ่านจุด $(-1, 9)$, $(1, -1)$ และ $(2, 3)$ คือ $y = 3x^2 - 5x + 1$

7. ให้ x แทน จำนวนการสั่งซื้อสินค้าแบบ 1 ชิ้น

y แทน จำนวนการสั่งซื้อสินค้าแบบ 2 ชิ้น

z แทน จำนวนการสั่งซื้อสินค้าแบบ 3 ชิ้นขึ้นไป

จากโจทย์ สามารถเขียนเป็นระบบสมการเชิงเส้น ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x + y + z &= 300 \\ 15x + 60y + 45z &= 5{,}500 \\ -x + z &= 100 \end{aligned}$$

เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 300 \\ 50 & 30 & 0 & 5{,}500 \\ -1 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 300 \\ 50 & 30 & 0 & 5{,}500 \\ -1 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & -20 & -50 & -9{,}500 \\ 0 & 1 & 2 & 400 \end{array}\right] \begin{array}{l} -50R_1 + R_2 \\ R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 1 & 2 & 400 \\ 0 & -20 & -50 & -9{,}500 \end{array}\right] R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -100 \\ 0 & 1 & 2 & 400 \\ 0 & 0 & -10 & -1,500 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_2 + R_1 \\ \\ 20R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -100 \\ 0 & 1 & 2 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \end{array}\right] -\frac{1}{10}R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_3 + R_1 \\ -2R_3 + R_2 \\ \\ \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x &= 50 \\ y &= 100 \\ z &= 150 \end{aligned}$$

นั่นคือ $(50, 100, 150)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

ดังนั้น มีการสั่งซื้อสินค้าแบบ 1 ชิ้น 2 ชิ้น และ 3 ชิ้นขึ้นไปอย่างละ 50, 100 และ 150 ครั้ง ตามลำดับ

8. ให้ x แทน ปริมาณเห็ดฟาง (100 กรัม)

y แทน ปริมาณเห็ดหอม (100 กรัม)

z แทน ปริมาณเห็ดโคน (100 กรัม)

จากโจทย์ สามารถเขียนเป็นระบบสมการเชิงเส้น ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 6z &= 85 \\ 0.1x + 0.1y + 0.3z &= 4 \\ 5x + 4y + 5z &= 95 \end{aligned}$$

เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 6 & 85 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 95 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 6 & 85 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 95 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 6 & 85 \\ 1 & 1 & 3 & 40 \\ 5 & 4 & 5 & 95 \end{array}\right] 10R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 40 \\ 3 & 2 & 6 & 85 \\ 5 & 4 & 5 & 95 \end{array}\right] R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 40 \\ 0 & -1 & -3 & -35 \\ 0 & -1 & -10 & -105 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -3R_1 + R_2 \\ -5R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 40 \\ 0 & 1 & 3 & 35 \\ 0 & -1 & -10 & -105 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 35 \\ 0 & 0 & -7 & -70 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_2 + R_1 \\ \\ R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right] -\frac{1}{7}R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right] -3R_3 + R_2$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 5 \\ z &= 10 \end{aligned}$$

นั่นคือ $(5, 5, 10)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

ดังนั้น ถ้าต้องการผัดเห็ดรวมมิตรที่มีโปรตีน 85 กรัม ไขมัน 4 กรัม และคาร์โบไฮเดรต 95 กรัม จะต้องใช้เห็ดฟาง เห็ดหอม และเห็ดโคน อย่างละ 500, 500 และ 1,000 กรัม ตามลำดับ

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จาก $3\begin{bmatrix} y & -z \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & z \end{bmatrix}$

จะได้ $\begin{bmatrix} 3y & -3z \\ -3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & z \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3y-2x & -3z-2y \\ -3-2 & 6-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & z \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3y-2x & -3z-2y \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & z \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $3y-2x=-4, -3z-2y=2$ และ $z=2$

แทน z ด้วย 2 ใน $-3z-2y=2$ จะได้ $y=-4$

แทน y ด้วย -4 ใน $3y-2x=-4$ จะได้ $x=-4$

ดังนั้น x, y และ z คือ $-4, -4$ และ 2 ตามลำดับ

2. จาก $x\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} - 2y\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix}$

จะได้ $\begin{bmatrix} x & -2x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4y & -2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x-4y & -2x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $x-4y = -2$ ---------(1)

และ $-2x+2y = -2$ ---------(2)

จาก (1) จะได้ $2x-8y = -4$ ---------(3)

จาก (2) และ (3) จะได้ $y=1$

แทน y ด้วย 1 ใน (1) จะได้ $x=2$

ดังนั้น $x=2$ และ $y=1$

3. 1) $62B+38B-2A = 100B-2A$

$= 100\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -200 & 200 \\ 300 & -100 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -202 & 196 \\ 302 & -100 \end{bmatrix}$

2) $$CD = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(0)+3(2)+(-2)(3) & 1(-2)+3(1)+(-2)(-1) \\ 2(0)+0(2)+(-4)(3) & 2(-2)+0(1)+(-4)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$DC = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0(1)+(-2)(2) & 0(3)+(-2)(0) & 0(-2)+(-2)(-4) \\ 2(1)+1(2) & 2(3)+1(0) & 2(-2)+1(-4) \\ 3(1)+(-1)(2) & 3(3)+(-1)(0) & 3(-2)+(-1)(-4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 4 & 6 & -8 \\ 1 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

3) $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(-2)+2(3) & 1(2)+2(-1) \\ (-1)(-2)+0(3) & (-1)(2)+0(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

จะได้ $$(AB)^t = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^tB^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(-2)+(-1)(2) & 1(3)+(-1)(-1) \\ 2(-2)+0(2) & 2(3)+0(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B^tA^t = \begin{bmatrix}-2 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}(-2)(1)+3(2) & (-2)(-1)+3(0)\\ 2(1)+(-1)(2) & 2(-1)+(-1)(0)\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}4 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

4) $$(E+I_3) = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & 2 & -3\\ 0 & 5 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -2 & 3 & -3\\ 0 & 5 & 4\end{bmatrix}$$
$$(E-I_3) = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & 2 & -3\\ 0 & 5 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -2 & 1 & -3\\ 0 & 5 & 2\end{bmatrix}$$
จะได้ $$(E+I_3)(E-I_3) = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -2 & 3 & -3\\ 0 & 5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -2 & 1 & -3\\ 0 & 5 & 2\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}2(0)+(-1)(-2)+0(0) & 2(-1)+(-1)(1)+0(5) & 2(0)+(-1)(-3)+0(2)\\ (-2)(0)+3(-2)+(-3)(0) & (-2)(-1)+3(1)+(-3)(5) & (-2)(0)+3(-3)+(-3)(2)\\ 0(0)+5(-2)+4(0) & 0(-1)+5(1)+4(5) & 0(0)+5(-3)+4(2)\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}2 & -3 & 3\\ -6 & -10 & -15\\ -10 & 25 & -7\end{bmatrix}$$

5) จากข้อ 2) และข้อ 3) จะได้
$$AB-2CD = \begin{bmatrix}4 & 0\\ 2 & -2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0 & 3\\ -12 & 0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}4 & 0\\ 2 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 6\\ -24 & 0\end{bmatrix}$$

$$AB-2CD = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 26 & -2 \end{bmatrix}$$

6) $$E^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(1)+(-1)(-2)+0(0) & 1(-1)+(-1)(2)+0(5) & 1(0)+(-1)(-3)+0(3) \\ (-2)(1)+2(-2)+(-3)(0) & (-2)(-1)+2(2)+(-3)(5) & (-2)(0)+2(-3)+(-3)(3) \\ 0(1)+5(-2)+3(0) & 0(-1)+5(2)+3(5) & 0(0)+5(-3)+3(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -6 & -9 & -15 \\ -10 & 25 & -6 \end{bmatrix}$$

จากข้อ 2) จะได้

$$DC-E^2+4F = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 4 & 6 & -8 \\ 1 & 9 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -6 & -9 & -15 \\ -10 & 25 & -6 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 4 & 6 & -8 \\ 1 & 9 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -6 & -9 & -15 \\ -10 & 25 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -8 & 0 \\ 12 & 4 & 0 \\ 16 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -11 & -5 & 5 \\ 22 & 19 & 7 \\ 27 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

7) $$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(1)+2(2) & 1(3)+2(0) & 1(-2)+2(-4) \\ (-1)(1)+0(2) & (-1)(3)+0(0) & (-1)(-2)+0(-4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 & -10 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D^tE = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0(1)+2(-2)+3(0) & 0(-1)+2(2)+3(5) & 0(0)+2(-3)+3(3) \\ (-2)(1)+1(-2)+(-1)(0) & (-2)(-1)+1(2)+(-1)(5) & (-2)(0)+1(-3)+(-1)(3) \end{bmatrix}$$

$$D^tE = \begin{bmatrix} -4 & 19 & 3 \\ -4 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

จะได้ $$2AC + D^tE = 2\begin{bmatrix} 5 & 3 & -10 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 19 & 3 \\ -4 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 6 & -20 \\ -2 & -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 19 & 3 \\ -4 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 25 & -17 \\ -6 & -7 & -2 \end{bmatrix}$$

8) $$A^tB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(-2)+(-1)(3) & 1(2)+(-1)(-1) \\ 2(-2)+0(3) & 2(2)+0(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D^tC^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0(1)+2(3)+3(-2) & 0(2)+2(0)+3(-4) \\ (-2)(1)+1(3)+(-1)(-2) & (-2)(2)+1(0)+(-1)(-4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ $$\left(A^tB\right)^t - D^tC^t = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

9) $$BD^t = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-2)(0)+2(-2) & (-2)(2)+2(1) & (-2)(3)+2(-1) \\ 3(0)+(-1)(-2) & 3(2)+(-1)(1) & 3(3)+(-1)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -2 & -8 \\ 2 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\left(BD^t\right)F = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -8 \\ 2 & 5 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-4)(-1)+(-2)(3)+(-8)(4) & (-4)(-2)+(-2)(1)+(-8)(2) & (-4)(0)+(-2)(0)+(-8)(-1) \\ 2(-1)+5(3)+10(4) & 2(-2)+5(1)+10(2) & 2(0)+5(0)+10(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -34 & -10 & 8 \\ 53 & 21 & -10 \end{bmatrix}$$

จะได้ $\left(BD^t\right)F + C = \begin{bmatrix} -34 & -10 & 8 \\ 53 & 21 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -33 & -7 & 6 \\ 55 & 21 & -14 \end{bmatrix}$$

10) $CE = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1(1)+3(-2)+(-2)(0) & 1(-1)+3(2)+(-2)(5) & 1(0)+3(-3)+(-2)(3) \\ 2(1)+0(-2)+(-4)(0) & 2(-1)+0(2)+(-4)(5) & 2(0)+0(-3)+(-4)(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -5 & -15 \\ 2 & -22 & -12 \end{bmatrix}$$

$$(CE)D = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -15 \\ 2 & -22 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-5)(0)+(-5)(2)+(-15)(3) & (-5)(-2)+(-5)(1)+(-15)(-1) \\ 2(0)+(-22)(2)+(-12)(3) & 2(-2)+(-22)(1)+(-12)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -55 & 20 \\ -80 & -14 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(1)+2(-1) & 1(2)+2(0) \\ (-1)(1)+0(-1) & (-1)(2)+0(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

จากข้อ 2) จะได้

$$(CE)D - CD + 3A^2 = \begin{bmatrix} -55 & 20 \\ -80 & -14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -55 & 20 \\ -80 & -14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -58 & 23 \\ -71 & -20 \end{bmatrix}$$

4. จาก $A^2 = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 - 1 & -x - y \\ x + y & -1 + y^2 \end{bmatrix}$

และ $3I_2 = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

จะได้ $\begin{bmatrix} x^2 - 1 & -x - y \\ x + y & -1 + y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $x^2 - 1 = 3, -x - y = 0, x + y = 0$ และ $y^2 - 1 = 3$

จาก $x^2 - 1 = 3$ จะได้ $x = 2$ หรือ $x = -2$

จาก $y^2 - 1 = 3$ จะได้ $y = 2$ หรือ $y = -2$

และจาก $x + y = 0$ และ $-x - y$ จะได้ $x = -y$

ดังนั้น ถ้า $x = 2$ จะได้ $y = -2$ และ ถ้า $x = -2$ จะได้ $y = 2$

5. 1) $A^tB = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2(1) + (-2)(0) & 2(1) + (-2)(-2) \\ 1(1) + (-1)(0) & 1(1) + (-1)(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

พิจารณา $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2(2) + 1(-2) & 2(1) + 1(-1) \\ (-2)(2) + (-1)(-2) & (-2)(1) + (-1)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= A$$

พิจารณา $A^3 = A^2A = AA = A^2 = A$ และ $A^4 = A^3A = AA = A^2 = A$

จะเห็นว่า $A^n = A$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

ดังนั้น $A^{40,000} = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

จาก $2X - A^tB = A^{40,000}$

จะได้ $X = \frac{1}{2}\left(A^{40,000} + A^tB\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

2) $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1(2)+1(-2) & 1(1)+1(-1) \\ 0(2)+(-2)(-2) & 0(1)+(-2)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$B^{-1} = \frac{1}{1(-2)-1(0)}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

จาก $BA = 2\left(X - B^{-1}\right)$

จะได้ $X = \frac{1}{2}BA + B^{-1}$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 2 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

6. 1) จาก $\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}a-3b\\ 2b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$$

จะได้ $a-3b=-1$ และ $2b=2$

นั่นคือ $b=1$ และ $a=2$

2) จาก $\begin{bmatrix}5 & 5\\ -6 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}5a+5b\\ -6a-4b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}$$

จะได้ $5a+5b = 5$ --------(1)

$-6a-4b = 4$ --------(2)

จาก (1) จะได้ $4a+4b = 4$ --------(3)

จาก (2) และ (3) จะได้ $a=-4$ และ $b=5$

3) จาก $\begin{bmatrix}7 & 4\\ 5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}7a+4c & 7b+4d\\ 5a+3c & 5b+3d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

จะได้ $7a+4c = -1$ --------(1)

$5a+3c = 0$ --------(2)

จาก (1) จะได้ $21a+12c = -3$ --------(3)

จาก (2) จะได้ $20a+12c = 0$ --------(4)

จาก (3) และ (4) จะได้ $a=-3$ และ $c=5$

และ $7b+4d = 1$ --------(5)

$5b+3d = -3$ --------(6)

จาก (5) จะได้ $21b+12d = 3$ --------(7)

จาก (6) จะได้ $20b+12d = -12$ --------(8)

จาก (7) และ (8) จะได้ $b=15$ และ $d=-26$

ดังนั้น $a=-3, b=15, c=5$ และ $d=-26$

4) จาก $\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 5\\ 1 & 4\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}-2a-3c & -2b-3d\\ 2a+4c & 2b+4d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 5\\ 1 & 4\end{bmatrix}$

จะได้ $-2a-3c = -1$ --------(1)

$2a+4c = 1$ --------(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $c=0$ และ $a=\frac{1}{2}$

และ $-2b-3d = 5$ --------(3)

$2b+4d = 4$ --------(4)

จาก (3) และ (4) จะได้ $d=9$ และ $b=-16$

ดังนั้น $a=\frac{1}{2}, b=-16, c=0$ และ $d=9$

7. 1) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ -2 & 0 & 0\end{vmatrix}$

(เนื่องจากเมทริกซ์ใหม่เกิดจากการคูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1 ด้วย -3 แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 3)

$= (-1)^{3+1}(-2)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}$

(จากบทนิยาม 12 โดยการกระจายตามแถวที่ 3)

$= -2\big(1(4)-1(3)\big)$

$= -2$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ (เนื่องจากเมทริกซ์ใหม่เกิดจากการคูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1 ด้วย -2 แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2)

$= 0$ (จากทฤษฎีบท 4 ข้อ 5)

3) $\begin{vmatrix} 11 & 0 & 7 \\ -20 & -8 & -12 \\ 10 & 0 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}(-8)\begin{vmatrix} 11 & 7 \\ 10 & 9 \end{vmatrix}$ (จากบทนิยาม 12 โดยการกระจายตามหลักที่ 2)

$= (-8)(11(9)-7(10))$

$= -232$

4) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -5 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(5)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ (จากบทนิยาม 12 โดยการกระจายตามแถวที่ 3)

$= 5(1(3)-(-4)(-1))$

$= -5$

5) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 11 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix}$ (เนื่องจากเมทริกซ์ใหม่เกิดจากการคูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2 ด้วย 3 แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1)

$= (-1)^{2+1}(-1)\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$ (จากบทนิยาม 10 โดยการกระจายตามหลักที่ 1)

$= 1(11(3)-(-3)(-4))$

$= 21$

6) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ (เนื่องจากเมทริกซ์ใหม่เกิดจากการคูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2 ด้วย 1 แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 3)

$= (-1)^{3+2}(2)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(5)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ (จากบทนิยาม 10 โดยการกระจายตามแถวที่ 3)

$= -2(3(-1)-5(-2))+5(3(3)-(-2)(-2))$

$= 11$

8. จาก $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ (เนื่องจากเมทริกซ์ใหม่เกิดจากการคูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1 ด้วย -4 แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2)

$= (-1)^{1+1}(1)\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$ (จากบทนิยาม 10 โดยการกระจายตามหลักที่ 1)

$= 1\big((4)(3)-(-4)(-5)\big)$

$= -8$

$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= (-1)^{3+1}(1)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$ (จากบทนิยาม 10 โดยการกระจายตามแถวที่ 3)

$= 1\big(3(-1)-(-2)(4)\big)$

$= 5$

$\det(C) = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ (เนื่องจากเมทริกซ์ใหม่เกิดจากการคูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2 ด้วย 2 แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1)

$= (-1)^{2+3}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ (จากบทนิยาม 10 โดยการกระจายตามหลักที่ 3)

$= 1\big(1(3)-7(1)\big)$

$= -4$

1) $\det(A^t)+\det(B)-\det(C^t) = \det(A)+\det(B)-\det(C)$

$= -8+5-(-4)$

$= 1$

2) $$\begin{aligned}\det(ABC) &= \det(A)\det(B)\det(C)\\ &= (-8)(5)(-4)\\ &= 160\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}&\det\left(A^3B^2C^2\right)-\det\left(AB^3C^5\right)\\ &= \det\left(A^3\right)\det\left(B^2\right)\det\left(C^2\right)-\det(A)\det\left(B^3\right)\det\left(C^5\right)\\ &= \left(\det(A)\right)^3\left(\det(B)\right)^2\left(\det(C)\right)^2-\det(A)\left(\det(B)\right)^3\left(\det(C)\right)^5\\ &= (-8)^3(5)^2(-4)^2-(-8)(5)^3(-4)^5\\ &= (-8)(5)^2(-4)^2\left((-8)^2-5(-4)^3\right)\\ &= -1,228,800\end{aligned}$$

9. จาก $$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)+1\left(\frac{1}{2}\right) & \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+1\left(\frac{1}{4}\right)\\ 1(-1)+2\left(\frac{1}{2}\right) & 1\left(\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{4}\right)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

และ $$\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}(1) & (-1)(1)+\frac{1}{2}(2)\\ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}(1) & \frac{1}{2}(1)+\frac{1}{4}(2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ผกผันซึ่งกันและกัน

จาก $$\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(-2)\left(-\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{4}\right) & (-2)\left(\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}\right)\\ 1\left(-\frac{1}{4}\right)+1\left(\frac{1}{4}\right) & 1\left(\frac{1}{2}\right)+1\left(\frac{1}{2}\right)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

และ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{4}\right)(-2)+\frac{1}{2}(1) & \left(-\frac{1}{4}\right)(2)+\frac{1}{2}(1) \\ \frac{1}{4}(-2)+\frac{1}{2}(1) & \frac{1}{4}(2)+\frac{1}{2}(1) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ผกผันซึ่งกันและกัน

10. 1) เนื่องจากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์นี้เท่ากับ $1(-2)-4(2)=-10$ ซึ่งไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น เมทริกซ์นี้มีเมทริกซ์ผกผัน คือ $\frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$

2) เนื่องจากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์นี้เท่ากับ $4(3)-5(-2)=22$ ซึ่งไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น เมทริกซ์นี้มีเมทริกซ์ผกผัน คือ $\frac{1}{22}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{22} & -\frac{5}{22} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$

3) เนื่องจากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์นี้เท่ากับ $(-6)(2)-(-3)(4)=0$

ดังนั้น เมทริกซ์นี้ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

4) เนื่องจากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์นี้เท่ากับ $\tan^2\theta-\sec^2\theta=-1$ ซึ่งไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น เมทริกซ์นี้มีเมทริกซ์ผกผัน คือ $\frac{1}{-1}\begin{bmatrix} \tan\theta & -\sec\theta \\ -\sec\theta & \tan\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tan\theta & \sec\theta \\ \sec\theta & -\tan\theta \end{bmatrix}$

11. 1) $A+B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

เนื่องจากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์นี้เท่ากับ $3(-3)-2(-2)=-5$ ซึ่งไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น $A+B$ มีเมทริกซ์ผกผัน คือ $\frac{1}{-5}\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}$

2) $AB = \begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}2(1)+1(0) & 2(1)+1(-2)\\ (-2)(1)+(-1)(0) & (-2)(1)+(-1)(-2)\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}2 & 0\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

เนื่องจากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์นี้เท่ากับ $2(0)-0(-2)=0$

ดังนั้น AB ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

12. 1) ให้ $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}20\\ 17\end{bmatrix}$

เขียนระบบสมการในรูปสมการเมทริกซ์ $AX=B$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}20\\ 17\end{bmatrix}$$

หาเมทริกซ์ผกผันของ A จะได้

$$A^{-1}=\frac{1}{2(3)-1(5)}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $X = A^{-1}B$

ดังนั้น $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\ 17\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}3(20)-1(17)\\ -5(20)+2(17)\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}43\\ -66\end{bmatrix}$

นั่นคือ $x=43$ และ $y=-66$

ดังนั้น $(43,-66)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ

2) ให้ $A=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 7 & -5\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}13\\ 13\end{bmatrix}$

เขียนระบบสมการในรูปสมการเมทริกซ์ $AX=B$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix}4 & -3\\ 7 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13\\ 13\end{bmatrix}$$

หาเมทริกซ์ผกผันของ A จะได้

$$A^{-1}=\frac{1}{4(-5)+3(7)}\begin{bmatrix}-5 & 3\\ -7 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 3\\ -7 & 4\end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $X = A^{-1}B$

ดังนั้น $$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 & 3\\ -7 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13\\ 13\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-5(13)+3(13)\\ -7(13)+4(13)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-26\\ -39\end{bmatrix}$$

นั่นคือ $x=-26$ และ $y=-39$

ดังนั้น $(-26,-39)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ

13. 1) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 11\end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 11\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 5\\ 0 & -2 & -4\end{array}\right] -3R_1+R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2\end{array}\right] -\frac{1}{2}R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{array}\right] -2R_2+R_1$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$x = 1$$
$$y = 2$$

ดังนั้น $(1,2)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

2) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & 6 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] 3R_1 + R_2$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x - 3y &= -2 \qquad \text{-------}(1) \\ 0 &= 0 \qquad \text{-------}(2) \end{aligned}$$

เนื่องจากสมการ (2) เป็นจริงเสมอ จึงหาเฉพาะค่าของ x และ y ที่สอดคล้องกับสมการ (1) ก็เพียงพอ

จากสมการ (1) จะได้ $x = 3y - 2$

จะเห็นว่า x ขึ้นอยู่กับ y นั่นคือ สามารถเลือก y ให้เป็นจำนวนจริงใดก็ได้

ในที่นี้ให้ $y = t$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ $x = 3t - 2$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ $(3t - 2, t)$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

3) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -R_1 + R_2 \\ -R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -R_2 \\ -R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] -2R_2 + R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] -2R_3 + R_2$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(1, 1, 1)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

4) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 5 & 15 \\ 2 & -3 & 4 & 29 \\ 3 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 5 & 15 \\ 2 & -3 & 4 & 29 \\ 3 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -5 & -15 \\ 2 & -3 & 4 & 29 \\ 3 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right] -R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -5 & -15 \\ 0 & -1 & 14 & 59 \\ 0 & 4 & 13 & 40 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -5 & -15 \\ 0 & 1 & -14 & -59 \\ 0 & 4 & 13 & 40 \end{array}\right] -R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -19 & -74 \\ 0 & 1 & -14 & -59 \\ 0 & 0 & 69 & 276 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 + R_1 \\ \\ -4R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -19 & -74 \\ 0 & 1 & -14 & -59 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \frac{1}{69} R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} 19R_3 + R_1 \\ 14R_3 + R_2 \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -3 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(2, -3, 4)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

5) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 16 \\ 2 & 2 & 6 & 20 \\ 1 & 2 & 6 & 18 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 16 \\ 2 & 2 & 6 & 20 \\ 1 & 2 & 6 & 18 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 16 \\ 0 & -2 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2R_1 + R_2 \\ -R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] -\frac{1}{2}R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] -2R_2 + R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_3 + R_1 \\ -2R_3 + R_2 \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 2 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(2, 2, 2)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

6) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \frac{1}{2}R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] R_2 + R_3$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \quad \text{-------}(1) \\ y + z &= 0 \quad \text{-------}(2) \\ 0 &= -2 \quad \text{-------}(3) \end{aligned}$$

จะเห็นว่าสมการ (3) เป็นไปไม่ได้ แสดงว่าระบบสมการตั้งต้นนำไปสู่ระบบสมการซึ่งไม่สอดคล้องกัน นั่นคือ ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

7) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \frac{1}{2}R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -R_1 + R_2 \\ -R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -R_2 \\ -R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] -2R_2 + R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] -2R_3 + R_2$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(0, 0, 0)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

8) เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right] -R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_2 + R_1 \\ \\ 4R_2 + R_3 \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \quad \text{-------}(1) \\ y + z &= 0 \quad \text{-------}(2) \\ 0 &= 0 \quad \text{-------}(3) \end{aligned}$$

เนื่องจากสมการ (3) เป็นจริงเสมอ จึงหาเฉพาะค่าของ x, y และ z ที่สอดคล้องกับสมการ (1) และ (2) ก็เพียงพอจากสมการ (1) และ (2)

จะได้ $x = -z$ และ $y = -z$

จะเห็นว่าทั้ง x และ y ขึ้นอยู่กับ z นั่นคือ สามารถเลือก z ให้เป็นจำนวนจริงใดก็ได้ ในที่นี้ให้ $z = t$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ $(-t, -t, t)$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

14. 1) ให้ A เป็นเมทริกซ์แสดงข้อมูลจากตารางแสดงยอดขายหนังสือในปี 2561 ของสำนักพิมพ์แห่งหนึ่ง (หน่วยเป็นเล่ม)

นั่นคือ $A = \begin{bmatrix} 100 & 200 & 500 \\ 200 & 300 & 400 \end{bmatrix}$

ให้ $B = \begin{bmatrix} 150 & 200 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์แสดงราคาของหนังสือสารคดีและหนังสือจิตวิทยา

ดังนั้น $$BA = \begin{bmatrix} 150 & 200 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 100 & 200 & 500 \\ 200 & 300 & 400 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 55,000 & 90,000 & 155,000 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น บริษัทมีรายได้จากการขายหนังสือทั้งหมด

$55,000 + 90,000 + 155,000 = 300,000$ บาท

2) ให้ $\frac{30}{100}A$ เป็นเมทริกซ์แสดงยอดขายที่เพิ่มขึ้น 30% ในปีถัดไป

จะได้ $A + \frac{30}{100}A = \frac{13}{10}A$ เป็นเมทริกซ์แสดงยอดขายหนังสือที่ต้องการ

ดังนั้น $\frac{13}{10}A = \frac{13}{10}\begin{bmatrix} 100 & 200 & 500 \\ 200 & 300 & 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130 & 260 & 650 \\ 260 & 390 & 520 \end{bmatrix}$

นั่นคือ ถ้าบริษัทต้องการให้ยอดขายหนังสือเพิ่มขึ้น 30% ในปีถัดไป บริษัจะต้องขายหนังสือสารคดีเล่มที่ 1 เล่มที่ 2 และเล่มที่ 3 จำนวน 130, 260 และ 650 เล่ม ตามลำดับ และขายหนังสือจิตวิทยาเล่มที่ 1 เล่มที่ 2 และเล่มที่ 3 จำนวน 260, 390 และ 520 เล่ม ตามลำดับ

15. ให้ A เป็นเมทริกซ์แสดงข้อมูลจากตารางแสดงจำนวนโจทย์ที่เยาวมาลย์และการเวกทำได้ถูกต้องในรอบแรก

นั่นคือ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

ให้ $B=\begin{bmatrix}6\\4\\1\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์แสดงคะแนนสำหรับโจทย์แต่ละระดับในรอบแรก

ดังนั้น $AB=\begin{bmatrix}3&1&6\\3&5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}28\\40\end{bmatrix}$

นั่นคือ ในรอบแรก เยาวมาลย์และการเวกได้คะแนน 28 และ 40 คะแนน ตามลำดับ

ให้ C เป็นเมทริกซ์แสดงข้อมูลจากตารางแสดงจำนวนโจทย์ที่เยาวมาลย์และการเวกทำได้ถูกต้องในรอบที่สอง

นั่นคือ $C=\begin{bmatrix}2&5&3\\5&4&7\end{bmatrix}$

ให้ $D=\begin{bmatrix}8\\5\\2\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์แสดงคะแนนสำหรับโจทย์แต่ละระดับในรอบที่สอง

ดังนั้น $CD=\begin{bmatrix}2&5&3\\5&4&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}47\\74\end{bmatrix}$

นั่นคือ ในรอบที่สอง เยาวมาลย์และการเวกได้คะแนน 47 และ 74 คะแนน ตามลำดับ

จะได้ $AB+CD$ เป็นเมทริกซ์แสดงคะแนนรวมจากการสอบทั้งสองรอบ

นั่นคือ $AB+CD=\begin{bmatrix}28\\40\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}47\\74\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}75\\114\end{bmatrix}$

ดังนั้น เยาวมาลย์และการเวกได้คะแนนรวมจากการสอบทั้งสองรอบเป็น 75 และ 114 คะแนน ตามลำดับ

16. ให้ x แทนจำนวนเงินที่รัตนาจะต้องลงทุนในกองทุนรวม A

y แทนจำนวนเงินที่รัตนาจะต้องลงทุนในกองทุนรวม B

z แทนจำนวนเงินที่รัตนาจะต้องลงทุนในกองทุนรวม C

จากโจทย์ สามารถเขียนเป็นระบบสมการเชิงเส้น ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}x+y+z &= 50,000\\ y-3z &= 0\\ 0.06x+0.04y+0.10z &= 2,900\end{aligned}$$

เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50,000 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0.06 & 0.04 & 0.10 & 2,900 \end{array}\right]$$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50,000 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0.06 & 0.04 & 0.10 & 2,900 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50,000 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -0.02 & 0.04 & -100 \end{array}\right] -0.06R_1 + R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 50,000 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02 & -100 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_2 + R_1 \\ \\ 0.02R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 50,000 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5,000 \end{array}\right] -50R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 30,000 \\ 0 & 1 & 0 & 15,000 \\ 0 & 0 & 1 & 5,000 \end{array}\right] \begin{array}{l} -4R_3 + R_1 \\ 3R_3 + R_2 \\ \\ \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x &= 30,000 \\ y &= 15,000 \\ z &= 5,000 \end{aligned}$$

นั่นคือ $(30000, 15000, 5000)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

ดังนั้น รัตนาจะต้องลงทุนในกองทุนรวม A กองทุนรวม B และกองทุนรวม C เป็นจำนวนเงิน 30000, 15000 และ 5000 บาท ตามลำดับ

17. 1) จากข้อมูลในตารางจะได้

$$\begin{aligned} f(1) &= 10 \\ f(2) &= 9 \\ f(3) &= 4 \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถเขียนเป็นระบบสมการเชิงเส้น ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} a+b+c &= 10 \\ 4a+2b+c &= 9 \\ 9a+3b+c &= 4 \end{aligned}$$

เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 1 & 9 \\ 9 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 1 & 9 \\ 9 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & -31 \\ 0 & -6 & -8 & -86 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -4R_1 + R_2 \\ -9R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{31}{2} \\ 0 & -6 & -8 & -86 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{2}R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{31}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_2 + R_1 \\ \\ 6R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{2}R_3 + R_1 \\ -\frac{3}{2}R_3 + R_2 \\ \\ \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์นี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} a &= -2 \\ b &= 5 \\ c &= 7 \end{aligned}$$

นั่นคือ $(-2, 5, 7)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเพียงคำตอบเดียว

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงรายได้รวมของบริษัทในแต่ละปีคือ $f(x) = -2x^2 + 5x + 7$

2) รายได้รวมของบริษัทในปีที่ 7 คือ $f(7) = 7 + 5(7) - 2(7)^2 = -56$ ล้านบาท

ดังนั้น ในปีที่ 7 บริษัทขาดทุน 56 ล้านบาท

บทที่ 3 เวกเตอร์

แบบฝึกหัด 3.1ก

1. ตัวอย่างปริมาณสเกลาร์

แปลงผักหลังโรงเรียนมีพื้นที่ 100 ตารางวา

เสาไฟฟ้าต้นหนึ่งสูง 12 เมตร

ฤดูหนาวในปีนี้ จะมีอุณหภูมิลดลงต่ำสุด 12 องศาเซลเซียส

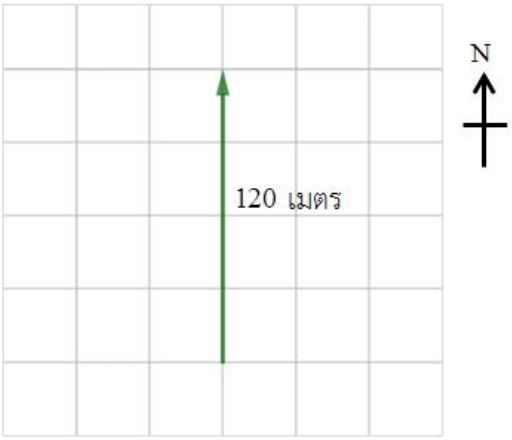
ตัวอย่างปริมาณเวกเตอร์

รถยนต์คันหนึ่งขับไปทางทิศใต้เป็นระยะทาง 200 กิโลเมตร

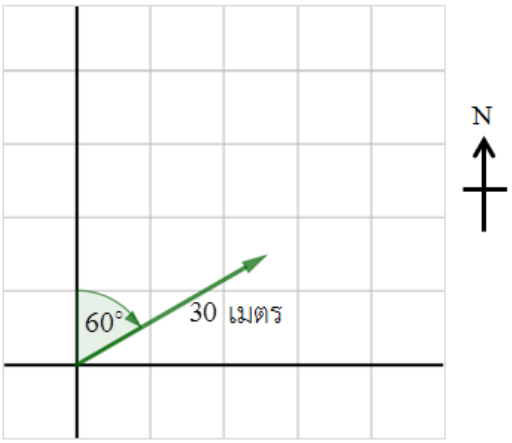
นักกอล์ฟตีลูกกอล์ฟไปข้างหน้าด้วยความเร็ว 120 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

รถไฟแล่นเข้าสู่สถานีด้วยอัตราเร็วที่ลดลง 3 เมตรต่อวินาที^{2}

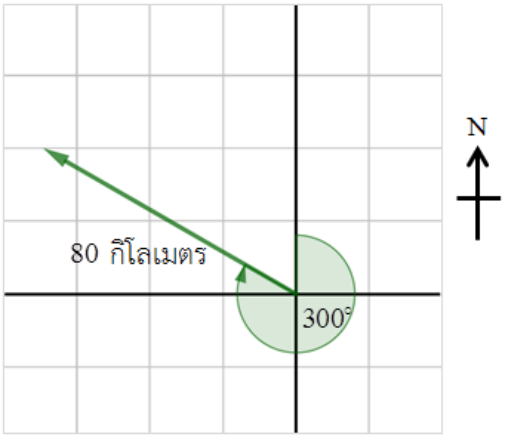
2. 1) เขียนเวกเตอร์แสดงการเคลื่อนที่ 120 เมตร ไปทางทิศเหนือ ได้ดังรูป



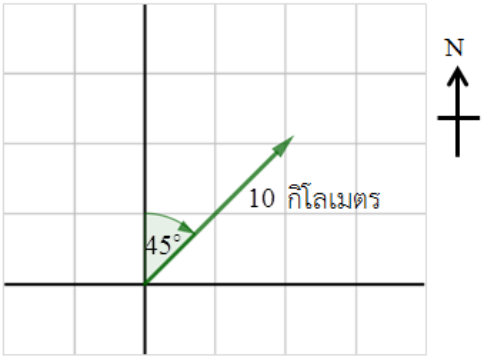
2) เขียนเวกเตอร์แสดงการเคลื่อนที่ 30 เมตร ไปทางทิศ 060 องศา ได้ดังรูป



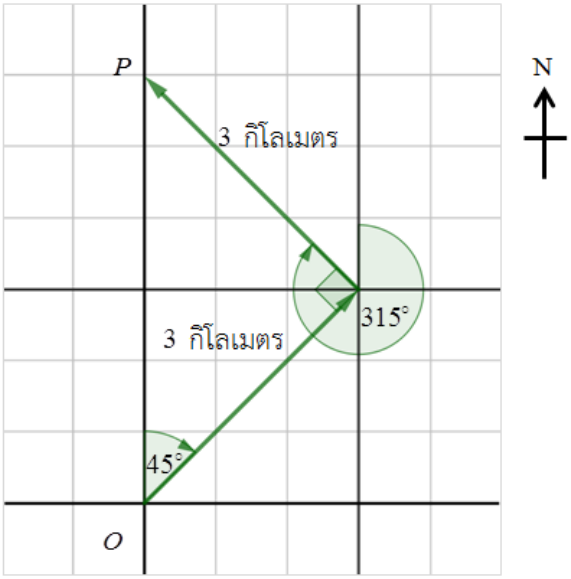
3) เขียนเวกเตอร์แสดงการเคลื่อนที่ 80 กิโลเมตร ไปทางทิศ 300 องศา ได้ดังรูป



4) เขียนเวกเตอร์แสดงการเคลื่อนที่ 10 กิโลเมตร ไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ ได้ดังรูป



3. ตัวอย่างเวกเตอร์ที่เท่ากับเวกเตอร์ที่กำหนดให้
   1) $\overrightarrow{DC}$
   2) $\overrightarrow{BE}$
   3) $-\overrightarrow{AD}$
   4) $\overrightarrow{AD}$
   5) $-\overrightarrow{CE}$
   6) $\overrightarrow{CE}$
4. $-\bar{u}$ แทนการเดินทางในทิศ 255 องศา เป็นระยะ 300 กิโลเมตร
5. เขียนเวกเตอร์แสดงการเดินทางของชายคนนี้ โดยมีจุด O เป็นจุดเริ่มต้นและจุด P เป็นจุดสิ้นสุดของการเดินทาง ดังรูป



จากรูป ชายคนนี้อยู่ห่างจุดเริ่มต้น $\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ กิโลเมตร และอยู่ทางทิศเหนือของจุดเริ่มต้น

แบบฝึกหัด 3.1ข

1. ตัวอย่างคำตอบ

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}\\ &= \vec{c}+\vec{c}\\ &= 2\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\\
&= \overrightarrow{CD}+\left(-\overrightarrow{AD}\right)\\
&= \vec{c}-\vec{f}\\
\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\\
&= \vec{b}+\vec{c}\\
\overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\\
&= -\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\\
&= -\vec{f}+\vec{a}\\
\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\\
&= \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{FD}\\
&= \vec{f}-\vec{e}\\
\overrightarrow{FA} &= \overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DA}\\
&= \overrightarrow{FD}-\overrightarrow{AD}\\
&= \vec{e}-\vec{f}\\
\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\\
&= \vec{f}+\vec{c}\\
\overrightarrow{EA} &= \overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}\\
&= -\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{AD}\\
&= -\vec{c}-\vec{f}
\end{aligned}$$

2. 1) $\overrightarrow{PQ}+\left(\overrightarrow{QS}+\overrightarrow{SP}\right) = \overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QP}$

$$= \vec{0}$$

2) $\left(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{RO}\right)+\overrightarrow{RS} = \left(\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OR}\right)+\overrightarrow{RS}$

$$\begin{aligned}
&= \left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OR}\right)+\overrightarrow{RS}\\
&= \overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RS}\\
&= \overrightarrow{PS}
\end{aligned}$$

3) $\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{RQ}\right)+\overrightarrow{OR} = \left(\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{SO}\right)+\overrightarrow{OR}$

$$\begin{aligned}
&= \overrightarrow{RQ}+\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OR}\right)\\
&= \overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{SR}\\
&= \overrightarrow{SR}+\overrightarrow{RQ}\\
&= \overrightarrow{SQ}
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 3.1ค

1. 1) จาก $3\vec{u}-2\vec{v} = \vec{v}$

$3\vec{u} = 3\vec{v}$

นั่นคือ $\vec{u} = \vec{v}$

ดังนั้น $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน

2) จาก $2\vec{u}+\vec{w} = 2\vec{w}+5\vec{u}$

$-3\vec{u} = \vec{w}$

นั่นคือ $\vec{u} = -\frac{1}{3}\vec{w}$

ดังนั้น $\vec{u}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{w}$ มีขนาดเป็นหนึ่งในสามของขนาดของ $\vec{w}$

2. จาก $3\vec{w} = 2\vec{s}$

จะได้ $3\big((a+4b)\vec{u}+(2a+b+1)\vec{v}\big) = 2\big((b-2a+2)\vec{u}+(2a-3b-1)\vec{v}\big)$

$3(a+4b)\vec{u}+3(2a+b+1)\vec{v} = 2(b-2a+2)\vec{u}+2(2a-3b-1)\vec{v}$

$\big(3(a+4b)-2(b-2a+2)\big)\vec{u} = \big(2(2a-3b-1)-3(2a+b+1)\big)\vec{v}$

เนื่องจาก $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ขนานกันและไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์

ดังนั้น $3(a+4b)-2(b-2a+2) = 0$

และ $2(2a-3b-1)-3(2a+b+1) = 0$

จะได้ $7a+10b-4 = 0$ ---------(1)

และ $-2a-9b-5 = 0$ ---------(2)

จาก (1) จะได้ $14a+20b-8 = 0$ ---------(3)

จาก (2) จะได้ $14a+63b+35 = 0$ ---------(4)

จาก (3) และ (4) จะได้ $43b+43 = 0$

นั่นคือ $b=-1$ และ $a=2$

3. 1) เนื่องจาก $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$ จะได้ $\vec{v}=-\vec{w}$

ดังนั้น $\vec{v}=\vec{w}$ เป็นเท็จ

2) เนื่องจาก $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=-\vec{u}+\vec{v}$

ดังนั้น $\overrightarrow{DB}=\vec{u}+\vec{v}$ เป็นเท็จ

3) $2\vec{s}-\vec{u} = \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}$

$= \overrightarrow{BA}$

$= -\vec{v}$

ดังนั้น $2\vec{s}-\vec{u}=\vec{v}$ เป็นเท็จ

4) $2\overrightarrow{AE} = 2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)$

$= 2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BE}$

$= 2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$

$= 2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$

$= 2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$= \vec{v}+\vec{u}$

$= \vec{u}+\vec{v}$

ดังนั้น $2\overrightarrow{AE}=\vec{u}+\vec{v}$ เป็นจริง

5) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$

$= -\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BE}$

$= -\vec{w}+\vec{s}$

ดังนั้น $\overrightarrow{AE}=\vec{w}+\vec{s}$ เป็นเท็จ

6) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$

$= -\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BE}$

$= -\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$= -\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)$

$= -\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}\right)$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

$= \frac{\vec{u}}{2}-\frac{\vec{w}}{2}$

ดังนั้น $\overrightarrow{AE}=\frac{\vec{u}}{2}-\frac{\vec{w}}{2}$ เป็นจริง

4. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}$

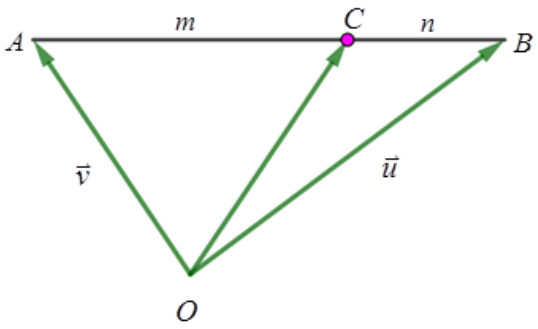
$= \overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

$= \overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}\right)$

$= \overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right)\end{aligned}$$

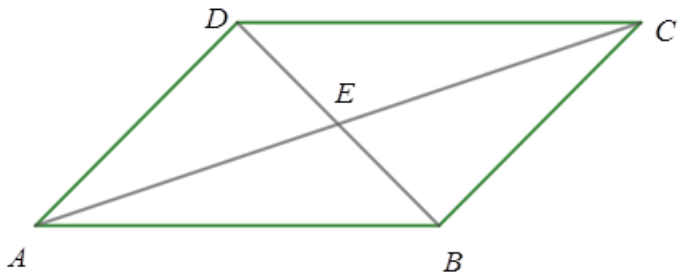
5.



จากรูป จะได้ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$

$$\begin{aligned}&= \overrightarrow{OB}+\frac{n}{m+n}\left(\overrightarrow{BA}\right)\\ &= \overrightarrow{OB}+\frac{n}{m+n}\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\\ &= \overrightarrow{OB}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}-\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OB}\\ &= \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}\\ &= \frac{1}{m+n}\left(m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}\right)\\ &= \frac{1}{m+n}\left(m\vec{u}+n\vec{v}\right)\end{aligned}$$

6. ให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีเส้นทแยงมุม AC และ BD แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน และตัดกันที่จุด E ดังรูป



จะแสดงว่า $\overrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overrightarrow{CD}$ และ $\overrightarrow{AD}$ ขนานกับ $\overrightarrow{BC}$

จากรูป จะได้ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}$ และ $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{ED}$

เนื่องจาก $AE=-\overrightarrow{CE}$ และ $EB=-\overrightarrow{ED}$

ดังนั้น $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{ED}=-\left(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{ED}\right)=-\overrightarrow{CD}$

นั่นคือ $\overrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overrightarrow{CD}$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกัน

จากรูป $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}$ และ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}$

ดังนั้น $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BC}$

นั่นคือ $\overrightarrow{AD}$ ขนานกับ $\overrightarrow{BC}$ และมีทิศทางเดียวกัน

จะได้ว่า รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมที่เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

แบบฝึกหัด 3.2

1. 1) ภาพฉายของจุด $(3,3,1)$ บนแกน X คือ จุด $(3,0,0)$
   2) ภาพฉายของจุด $(3,3,1)$ บนแกน Y คือ จุด $(0,3,0)$
   3) ภาพฉายของจุด $(3,3,1)$ บนแกน Z คือ จุด $(0,0,1)$
   4) ภาพฉายของจุด $(3,3,1)$ บนระนาบ XY คือ จุด $(3,3,0)$
   5) ภาพฉายของจุด $(3,3,1)$ บนระนาบ YZ คือ จุด $(0,3,1)$
   6) ภาพฉายของจุด $(3,3,1)$ บนระนาบ XZ คือ จุด $(3,0,1)$
2. 1) รูปทั่วไปของพิกัดของจุดบนแกน X คือ $(x,0,0)$
   2) รูปทั่วไปของพิกัดของจุดบนแกน Y คือ $(0,y,0)$
   3) รูปทั่วไปของพิกัดของจุดบนแกน Z คือ $(0,0,z)$
   4) รูปทั่วไปของพิกัดของจุดในระนาบ XY คือ $(x,y,0)$

5) รูปทั่วไปของพิกัดของจุดในระนาบ YZ คือ $(0, y, z)$

6) รูปทั่วไปของพิกัดของจุดในระนาบ XZ คือ $(x, 0, z)$

3. จากรูป จุด B มีพิกัดเป็น $(3, 5, 0)$

จุด C มีพิกัดเป็น $(1, 5, 0)$

จุด D มีพิกัดเป็น $(1, 2, 0)$

จุด G มีพิกัดเป็น $(3, 5, 3)$

จุด E มีพิกัดเป็น $(1, 2, 3)$

จุด F มีพิกัดเป็น $(3, 2, 3)$

4. $AF = \sqrt{(3-1)^2+(2-5)^2+(0-3)^2}$

$= \sqrt{2^2+(-3)^2+(-3)^2}$

$= \sqrt{4+9+9}$

$= \sqrt{22}$ หน่วย

ซึ่งมีความยาวเท่ากับ DG, OB และ EC

5. ภาพฉายของจุด $P(3, -4, 8)$ ในระนาบ XY, YZ และ XZ คือ $(3, -4, 0)$, $(0, -4, 8)$ และ $(3, 0, 8)$ ตามลำดับ

ภาพฉายของจุด $Q(7, -2, 8)$ ในระนาบ XY, YZ และ XZ คือ $(7, -2, 0)$, $(0, -2, 8)$ และ $(7, 0, 8)$ ตามลำดับ

และระยะทางระหว่างจุด P และ Q คือ

$\sqrt{(3-7)^2+(-4-(-2))^2+(8-8)^2} = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

เนื่องจากระยะทางของจุดที่เป็นภาพฉายในระนาบ XY, YZ และ XZ เป็น $2\sqrt{5}$, 2 และ 4 ตามลำดับ

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด P และ Q เท่ากับระยะทางของภาพฉายในระนาบ XY

6. $AB = \sqrt{(1-(-1))^2+(2-7)^2+(1-9)^2}$

$= \sqrt{2^2+(-5)^2+(-8)^2}$

$= \sqrt{4+25+64}$

$= \sqrt{93}$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(1-11)^2+(2-4)^2+(1-2)^2} \\ &= \sqrt{(-10)^2+(-2)^2+(-1)^2} \\ &= \sqrt{100+4+1} \\ &= \sqrt{105} \\ BC &= \sqrt{(-1-11)^2+(7-4)^2+(9-2)^2} \\ &= \sqrt{(-12)^2+3^2+7^2} \\ &= \sqrt{144+9+49} \\ &= \sqrt{202} \end{aligned}$$

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

แบบฝึกหัด 3.3ก

1. ให้ จุด B มีพิกัดเป็น (a,b)

จาก $\overline{AB} = \begin{bmatrix} a-3 \\ b-4 \end{bmatrix}$

จะได้ $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-3 \\ b-4 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $a-3 = 2$ และ $b-4 = 5$

จะได้ $a = 5$ และ $b = 9$

ดังนั้น พิกัดของจุด B คือ $(5,9)$

2. จาก $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ จะได้

$$\vec{u}+\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 \\ 3+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

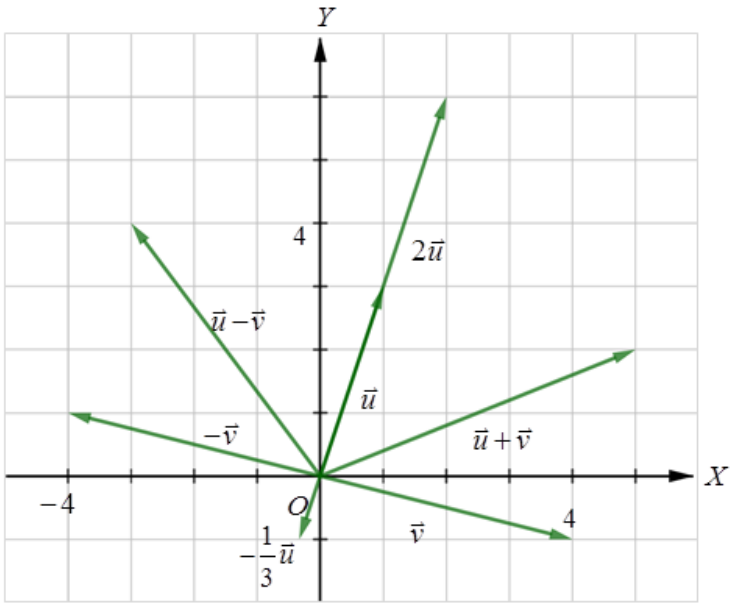
$$\vec{u}-\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4 \\ 3-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{u} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1) \\ 2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$-\vec{v} = -\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

และ $-\frac{1}{3}\bar{u} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{3}(1)\\-\frac{1}{3}(3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\-1\end{bmatrix}$

แสดงเวกเตอร์ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{u}+\bar{v}, \bar{u}-\bar{v}, 2\bar{u}, -\bar{v}$ และ $-\frac{1}{3}\bar{u}$ ได้ดังรูป



3. 1) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}-1-0\\4-0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$

$\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix}0-(-1)\\0-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}$

2) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}3-(-2)\\2-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$

$\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix}-2-3\\1-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\-1\end{bmatrix}$

3) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}-1-(-2)\\2-(-8)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\10\end{bmatrix}$

$\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix}-2-(-1)\\-8-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-10\end{bmatrix}$

4) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0-1 \\ 0-1 \\ 0-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ -1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

5) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -1-7 \\ 8-3 \\ 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 7-(-1) \\ 3-8 \\ 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$

6) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ -1-(-1) \\ 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 1-2 \\ -1-(-1) \\ 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

4. 1) $\vec{t}-5\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1-15 \\ 3-20 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -16 \\ -17 \end{bmatrix}$

2) นิเสธของ $\vec{t}-5\vec{u}$ คือ $-\begin{bmatrix} -16 \\ -17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \end{bmatrix}$

3) $2\bar{v}-\bar{w} = 2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\0\\-7\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\0\\-7\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}2-(-1)\\4-0\\6-(-7)\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}3\\4\\13\end{bmatrix}$

4) นิเสธของ $2\bar{v}-\bar{w}$ คือ $-\begin{bmatrix}3\\4\\13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\-4\\-13\end{bmatrix}$

5. 1) $\bar{u}+\bar{v} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}b_1+a_1\\b_2+a_2\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$

$= \bar{v}+\bar{u}$

2) $\alpha(\bar{u}+\bar{v}) = \alpha\left(\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}\right)$

$= \alpha\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}\alpha(a_1+b_1)\\\alpha(a_2+b_2)\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}\alpha a_1+\alpha b_1\\\alpha a_2+\alpha b_2\end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}\alpha(\vec{u}+\vec{v}) &= \begin{bmatrix}\alpha a_1\\ \alpha a_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha b_1\\ \alpha b_2\end{bmatrix}\\ &= \alpha\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}\\ &= \alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}\alpha(\beta\vec{v}) &= \alpha\left(\beta\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}\right)\\ &= \alpha\begin{bmatrix}\beta b_1\\ \beta b_2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\alpha(\beta b_1)\\ \alpha(\beta b_2)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}(\alpha\beta)b_1\\ (\alpha\beta)b_2\end{bmatrix}\\ &= (\alpha\beta)\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}\\ &= (\alpha\beta)\vec{v}\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\vec{u} &= (\alpha+\beta)\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}(\alpha+\beta)a_1\\ (\alpha+\beta)a_2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\alpha a_1+\beta a_1\\ \alpha a_2+\beta a_2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\alpha a_1\\ \alpha a_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta a_1\\ \beta a_2\end{bmatrix}\\ &= \alpha\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}\\ &= \alpha\vec{u}+\beta\vec{u}\end{aligned}$$

5) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (a_1+b_1)+c_1 \\ (a_2+b_2)+c_2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_1+(b_1+c_1) \\ a_2+(b_2+c_2) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1+c_1 \\ b_2+c_2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}\right)$

$= \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

6. 1) เนื่องจาก $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ จะได้ $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ขนานกัน

เนื่องจาก $\begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}=(-4)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}=3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ ต่างเป็นเวกเตอร์ที่ขนานกัน

เนื่องจาก $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}=\left(\frac{7}{8}\right)\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ จะได้ $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ ขนานกัน

2) เนื่องจาก $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}=(-2)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ จะได้ $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ขนานกัน

7. 1) $\overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix} -1-1 \\ 8-2 \\ 11-3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

2) $\vec{u}=\begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$

3) $\overrightarrow{OR}=\begin{bmatrix}1-0\\-3-0\\-4-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-3\\-4\end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $\vec{u}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PQ}$ และ $\overrightarrow{OR}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$

ดังนั้น $\overrightarrow{PQ},\vec{u}$ และ $\overrightarrow{OR}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกันทั้งหมด โดยที่ $\overrightarrow{PQ}$ และ $\vec{u}$ มีทิศทางเดียวกัน แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{OR}$

แบบฝึกหัด 3.3ข

1. 1) $\overrightarrow{OA}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}=\vec{i}+4\vec{j}$

2) $\overrightarrow{OS}=\begin{bmatrix}1\\3\\-4\end{bmatrix}=\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$

3) $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}-4-3\\1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\-1\end{bmatrix}=-7\vec{i}-\vec{j}$

4) $\overrightarrow{CD}=\begin{bmatrix}1-(-3)\\-2-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-6\end{bmatrix}=4\vec{i}-6\vec{j}$

5) $\overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix}3-1\\2-(-1)\\6-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$

6) $\overrightarrow{MN}=\begin{bmatrix}-1-0\\-1-1\\2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}=-\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

2. 1) ขนาดของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ คือ $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

ขนาดของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$ คือ $\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=5$

ขนาดของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}-1\\-4\end{bmatrix}$ คือ $\sqrt{(-1)^2+(-4)^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$

ขนาดของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ คือ $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

2) ขนาดของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$ คือ $\sqrt{1^2+1^2+3^2}=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$

ขนาดของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$ คือ $\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$

ขนาดของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}-4\\0\\-1\end{bmatrix}$ คือ $\sqrt{(-4)^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{16+0+1}=\sqrt{17}$

3) $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}5-1\\7-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$

จะได้ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$

4) $\overrightarrow{RS}=\begin{bmatrix}-1-7\\3-4\\5-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\-1\\4\end{bmatrix}$

จะได้ $\left|\overrightarrow{RS}\right|=\sqrt{(-8)^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{64+1+16}=9$

3. 1) $|\bar{u}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

จะได้ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ คือ

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{i}+\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{j}$$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ คือ $\frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{i}+\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{j}$

2) $|\bar{v}| = \sqrt{1^2+(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{11}$

จะได้ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{v}$ คือ

$$\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix}1\\-3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{11}}\\-\frac{3}{\sqrt{11}}\\-\frac{1}{\sqrt{11}}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{11}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{11}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{11}}\vec{k}$$

$$= \frac{\sqrt{11}}{11}\vec{i} - \frac{3\sqrt{11}}{11}\vec{j} - \frac{\sqrt{11}}{11}\vec{k}$$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ คือ $\frac{\sqrt{11}}{11}\vec{i} - \frac{3\sqrt{11}}{11}\vec{j} - \frac{\sqrt{11}}{11}\vec{k}$

3) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}-4-1\\5-(-3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\8\end{bmatrix}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-5)^2+8^2} = \sqrt{25+64} = \sqrt{89}$

จะได้ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ คือ

$$\frac{1}{\sqrt{89}}\begin{bmatrix}-5\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{5}{\sqrt{89}}\\\frac{8}{\sqrt{89}}\end{bmatrix}$$

$$= -\frac{5}{\sqrt{89}}\vec{i} + \frac{8}{\sqrt{89}}\vec{j}$$

$$= -\frac{5\sqrt{89}}{89}\vec{i} + \frac{8\sqrt{89}}{89}\vec{j}$$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ คือ $-\frac{5\sqrt{89}}{89}\vec{i} + \frac{8\sqrt{89}}{89}\vec{j}$

4) $\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix}0-1\\-3-5\\1-8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-8\\-7\end{bmatrix}$

$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-8)^2+(-7)^2} = \sqrt{1+64+49} = \sqrt{114}$

จะได้ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{CD}$ คือ

$$\frac{1}{\sqrt{114}}\begin{bmatrix}-1\\-8\\-7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{114}}\\-\frac{8}{\sqrt{114}}\\-\frac{7}{\sqrt{114}}\end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{114}}\vec{i} - \frac{8}{\sqrt{114}}\vec{j} - \frac{7}{\sqrt{114}}\vec{k}$$

$$= -\frac{\sqrt{114}}{114}\vec{i} - \frac{8\sqrt{114}}{114}\vec{j} - \frac{7\sqrt{114}}{114}\vec{k}$$

$$= -\frac{\sqrt{114}}{114}\vec{i} - \frac{4\sqrt{114}}{57}\vec{j} - \frac{7\sqrt{114}}{114}\vec{k}$$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{CD}$ คือ $-\frac{\sqrt{114}}{114}\vec{i} - \frac{4\sqrt{114}}{57}\vec{j} - \frac{7\sqrt{114}}{114}\vec{k}$

4. 1) เวกเตอร์ที่มีขนาด 4 หน่วย และขนานกับ $\vec{u}$ คือ $4\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{i} + \frac{\sqrt{5}}{5}\vec{j}\right) = \frac{8\sqrt{5}}{5}\vec{i} + \frac{4\sqrt{5}}{5}\vec{j}$

และ $-4\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{i} + \frac{\sqrt{5}}{5}\vec{j}\right) = -\frac{8\sqrt{5}}{5}\vec{i} - \frac{4\sqrt{5}}{5}\vec{j}$

2) เวกเตอร์ที่มีขนาด 4 หน่วย และขนานกับ $\vec{v}$ คือ

$4\left(\frac{\sqrt{11}}{11}\vec{i} - \frac{3\sqrt{11}}{11}\vec{j} - \frac{\sqrt{11}}{11}\vec{k}\right) = \frac{4\sqrt{11}}{11}\vec{i} - \frac{12\sqrt{11}}{11}\vec{j} - \frac{4\sqrt{11}}{11}\vec{k}$ และ

$-4\left(\frac{\sqrt{11}}{11}\vec{i} - \frac{3\sqrt{11}}{11}\vec{j} - \frac{\sqrt{11}}{11}\vec{k}\right) = -\frac{4\sqrt{11}}{11}\vec{i} + \frac{12\sqrt{11}}{11}\vec{j} + \frac{4\sqrt{11}}{11}\vec{k}$

3) เวกเตอร์ที่มีขนาด 4 หน่วย และขนานกับ $\overrightarrow{AB}$ คือ

$4\left(-\frac{5\sqrt{89}}{89}\vec{i} + \frac{8\sqrt{89}}{89}\vec{j}\right) = -\frac{20\sqrt{89}}{89}\vec{i} + \frac{32\sqrt{89}}{89}\vec{j}$ และ

$-4\left(-\frac{5\sqrt{89}}{89}\vec{i} + \frac{8\sqrt{89}}{89}\vec{j}\right) = \frac{20\sqrt{89}}{89}\vec{i} - \frac{32\sqrt{89}}{89}\vec{j}$

4) เวกเตอร์ที่มีขนาด 4 หน่วย และขนานกับ $\overline{CD}$ คือ

$$4\left(-\frac{\sqrt{114}}{114}\vec{i}-\frac{8\sqrt{114}}{114}\vec{j}-\frac{7\sqrt{114}}{114}\vec{k}\right)=-\frac{4\sqrt{114}}{114}\vec{i}-\frac{32\sqrt{114}}{114}\vec{j}-\frac{28\sqrt{114}}{114}\vec{k}$$ และ

$$-4\left(-\frac{\sqrt{114}}{114}\vec{i}-\frac{8\sqrt{114}}{114}\vec{j}-\frac{7\sqrt{114}}{114}\vec{k}\right)=\frac{4\sqrt{114}}{114}\vec{i}+\frac{32\sqrt{114}}{114}\vec{j}+\frac{28\sqrt{114}}{114}\vec{k}$$

แบบฝึกหัด 3.4

1. 1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (3\vec{i}+4\vec{j})\cdot(2\vec{i}+\vec{j})$
$= (3)(2)+(4)(1)$
$= 10$

2) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (2\vec{i}+5\vec{j})\cdot(\vec{j})$
$= (2)(0)+(5)(1)$
$= 5$

3) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k})\cdot(3\vec{i}+4\vec{k})$
$= (-1)(3)+(3)(0)+(1)(4)$
$= 1$

4) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-\vec{i}-\vec{k})\cdot(3\vec{i}+\vec{j})$
$= (-1)(3)+(0)(1)+(-1)(0)$
$= -3$

2. ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ซึ่ง $0°\le\theta\le180°$
จากทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$
ดังนั้น $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

1) เนื่องจาก $\vec{u}\cdot\vec{v} = (3\vec{i}+2\vec{j})\cdot(9\vec{i}+6\vec{j}) = (3)(9)+(2)(6) = 39$
และ $|\vec{u}| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
$|\vec{v}| = \sqrt{9^2+6^2} = \sqrt{81+36} = \sqrt{117}$
จะได้ $\cos\theta = \dfrac{39}{\sqrt{13}\sqrt{117}} = 1$
ดังนั้น $\theta=0°$

2) เนื่องจาก $\vec{u}\cdot\vec{v} = (3\vec{i}+\vec{j})\cdot(-2\vec{i}+\vec{j}) = (3)(-2)+(1)(1) = -5$

และ $|\vec{u}| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

จะได้ $\cos\theta = \frac{-5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ดังนั้น $\theta = 135°$

3) เนื่องจาก $\vec{u}\cdot\vec{v} = (2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})\cdot(\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k})$

$= (2)(1)+(1)(2)+(-1)(4)$

$= 0$

จะได้ว่า $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$

ดังนั้น $\theta = 90°$

4) เนื่องจาก $\vec{u}\cdot\vec{v} = (\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k})\cdot(\vec{i}-\vec{j})$

$= (1)(1)+(-2)(-1)+(-1)(0)$

$= 3$

และ $|\vec{u}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$|\vec{v}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$

จะได้ $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\theta = 30°$

3. 1) $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} = \left(\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)$

$= ((2)(4)+(-3)(1))+((2)(1)+(-3)(-1))$

$= 5+5$

$= 10$

2) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \left(\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\right)$

$= \begin{bmatrix}6\\-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6\\-2\end{bmatrix}$

$= (6)(6)+(-2)(-2)$

$= 40$

3) $\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\right)$

$= \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6\\-2\end{bmatrix}$

$= (4)(6)+(1)(-2)$

$= 22$

4) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \left(\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\right)$

$= \begin{bmatrix}6\\-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$

$= (6)(-2)+(-2)(-4)$

$= -4$

4. 1) $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} = \left(\begin{bmatrix}-4\\2\\4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\7\\-7\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}-4\\2\\4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6\\-3\\0\end{bmatrix}\right)$

$= \big((-4)(2)+(2)(7)+(4)(-7)\big)+\big((-4)(6)+(2)(-3)+(4)(0)\big)$

$= -22-30$

$= -52$

2) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \left(\begin{bmatrix}-4\\2\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\7\\-7\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix}-4\\2\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\7\\-7\end{bmatrix}\right)$

$= \begin{bmatrix}-2\\9\\-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\9\\-3\end{bmatrix}$

$= (-2)(-2)+(9)(9)+(-3)(-3)$

$= 94$

3) $\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \begin{bmatrix}2\\7\\-7\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}-4\\2\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\7\\-7\end{bmatrix}\right)$

$= \begin{bmatrix}2\\7\\-7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\9\\-3\end{bmatrix}$

$= (2)(-2)+(7)(9)+(-7)(-3)$

$$\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = 80$$

4) $$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \left(\begin{bmatrix}-4\\2\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\7\\-7\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix}-4\\2\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\7\\-7\end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix}-2\\9\\-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-6\\-5\\11\end{bmatrix}$$
$$= (-2)(-6)+(9)(-5)+(-3)(11)$$
$$= -66$$

5. จาก $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ และ $|\vec{u}|>0, |\vec{v}|>0$
จะได้ว่า $\vec{u}\cdot\vec{v}$ มีเครื่องหมายเดียวกับ $\cos\theta$

1) ถ้า $\vec{u}\cdot\vec{v}>0$ จะได้ $\cos\theta>0$
นั่นคือ $0°<\theta<90°$
ดังนั้น θ เป็นมุมแหลม

2) ถ้า $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ จะได้ $\cos\theta=0$
นั่นคือ $\theta=90°$
ดังนั้น θ เป็นมุมฉาก

3) ถ้า $\vec{u}\cdot\vec{v}<0$ จะได้ $\cos\theta<0$
นั่นคือ $90°<\theta<180°$
ดังนั้น θ เป็นมุมป้าน

6. 1) เนื่องจาก $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix} = (2)(3)+(3)(-2) = 0$
ดังนั้น $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$ ตั้งฉากกัน

2) เนื่องจาก $\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix} = (2)(-1)+(6)(3) = 16$
ดังนั้น $\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$ ไม่ตั้งฉากกัน

3) เนื่องจาก $\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} = (2)(1)+(-2)(2)+(1)(2) = 0$

ดังนั้น $\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ ตั้งฉากกัน

4) เนื่องจาก $\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix} = (2)(2)+(1)(-2)+(2)(1) = 4$

ดังนั้น $\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$ ไม่ตั้งฉากกัน

7. 1) ถ้า $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ จะได้ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (1-m)(m)+(2)(m+2)\\ &= m-m^2+2m+4\\ &= -m^2+3m+4\end{aligned}$$

จะได้
$$\begin{aligned}-m^2+3m+4 &= 0\\ m^2-3m-4 &= 0\\ (m-4)(m+1) &= 0\end{aligned}$$

นั่นคือ $m=4$ หรือ $m=-1$

ดังนั้น $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ เมื่อ $m=4$ หรือ $m=-1$

2) $|\vec{u}|=\sqrt{(1-m)^2+2^2}=\sqrt{(1-2m+m^2)+4}=\sqrt{m^2-2m+5}$

และ $|\vec{v}|=\sqrt{m^2+(m+2)^2}=\sqrt{m^2+(m^2+4m+4)}=\sqrt{2m^2+4m+4}$

ถ้า $\vec{u}$ มีขนาดเท่ากับ $\vec{v}$ จะได้
$$\begin{aligned}\sqrt{m^2-2m+5} &= \sqrt{2m^2+4m+4}\\ m^2-2m+5 &= 2m^2+4m+4\\ m^2+6m-1 &= 0\end{aligned}$$

จะได้ $m=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4(1)(-1)}}{2(1)}=-3\pm\sqrt{10}$

ดังนั้น $\vec{u}$ มีขนาดเท่ากับ $\vec{v}$ เมื่อ $m=-3+\sqrt{10}$ หรือ $m=-3-\sqrt{10}$

8. เนื่องจาก $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ จะได้ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

1) $\begin{aligned}|\vec{u}+\vec{v}|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})\\ &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{u}+(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{v}\\ &= \vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})+\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= |\vec{u}|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2\\ &= |\vec{u}|^2+2(\vec{u}\cdot\vec{v})+|\vec{v}|^2\\ &= |\vec{u}|^2+2(0)+|\vec{v}|^2\\ &= |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2\end{aligned}$

ดังนั้น $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$

2) $\begin{aligned}|\vec{u}-\vec{v}|^2 &= (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})\\ &= (\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{u}-(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{v}\\ &= \vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v})-\vec{v}\cdot(\vec{u}-\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= |\vec{u}|^2-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2\\ &= |\vec{u}|^2-2(\vec{u}\cdot\vec{v})+|\vec{v}|^2\\ &= |\vec{u}|^2-2(0)+|\vec{v}|^2\\ &= |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2\end{aligned}$

ดังนั้น $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$

9. จาก $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2+2(\vec{u}\cdot\vec{v})+|\vec{v}|^2$

จะได้ $4^2 = 5^2+2(\vec{u}\cdot\vec{v})+3^2$

$2(\vec{u}\cdot\vec{v}) = -18$

และจาก $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2-2(\vec{u}\cdot\vec{v})+|\vec{v}|^2$

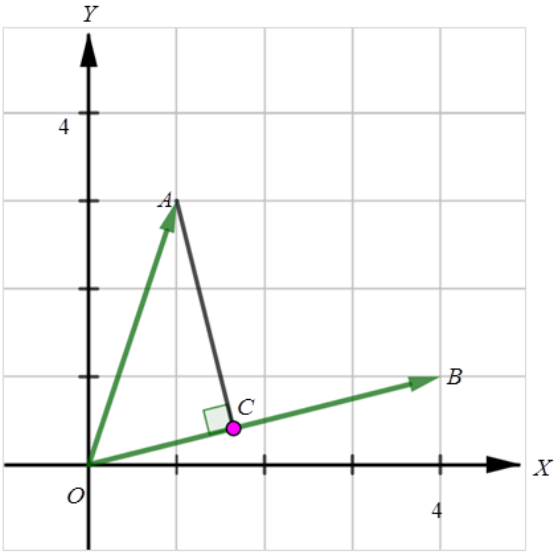
จะได้ $\begin{aligned}|\vec{u}-\vec{v}|^2 &= 5^2-(-18)+3^2\\ &= 52\end{aligned}$

นั่นคือ $|\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{52}$ หรือ $|\vec{u}-\vec{v}|=-\sqrt{52}$

เนื่องจาก $|\vec{u}-\vec{v}|\geq 0$

ดังนั้น $|\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{52}$

10.



เนื่องจาก $\overrightarrow{OC}$ ขนานกับ $\overrightarrow{OB}$ จะได้ว่า มีจำนวนจริง k ที่ $k \neq 0$ ซึ่ง $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OB}$

ดังนั้น $\overrightarrow{OC} = k\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4k \\ k \end{bmatrix}$

และ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k \\ k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4k-1 \\ k-3 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\overrightarrow{AC}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OB}$

จะได้ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

$$\begin{bmatrix} 4k-1 \\ k-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$(4k-1)(4) + (k-3)(1) = 0$$

$$17k - 7 = 0$$

$$k = \frac{7}{17}$$

จะได้ $\overrightarrow{OC} = \frac{28}{17}\vec{i} + \frac{7}{17}\vec{j}$

และ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \left(-\vec{i} - 3\vec{j}\right) + \left(\frac{28}{17}\vec{i} + \frac{7}{17}\vec{j}\right) = \frac{11}{17}\vec{i} - \frac{44}{17}\vec{j}$

จะได้ $\left|\overrightarrow{OC}\right| = \sqrt{\left(\frac{28}{17}\right)^2 + \left(\frac{7}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{784+49}{289}} = \frac{\sqrt{833}}{17} = \frac{7\sqrt{17}}{17}$

และ $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{\left(\frac{11}{17}\right)^2 + \left(-\frac{44}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{121+1936}{289}} = \sqrt{\frac{2057}{289}} = \sqrt{\frac{121}{17}} = \frac{11\sqrt{17}}{17}$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม OAC เท่ากับ

$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OC}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left(\frac{7\sqrt{17}}{17}\right)\left(\frac{11\sqrt{17}}{17}\right) = \frac{77}{34}$ ตารางหน่วย

11. จาก $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 5-7 \\ 9-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 13-7 \\ 10-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

จะได้ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

และ $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

ให้ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AD}$

จะได้ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos\theta$

เนื่องจาก $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = (-2)(6) + (1)(2) = -10$

จะได้ $-10 = \left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{40}\right)\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{-10}{\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{40}\right)}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

นั่นคือ $\theta = 135°$

จะได้ว่า $B\hat{A}D = 135°$

เนื่องจาก รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

จะได้ว่า $\hat{B} = \hat{D} = 45°$ และ $\hat{A} = \hat{C} = 135°$

12. จาก $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$

จะได้ $-\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

$$\left|-\vec{w}\right|^2 = \left|\vec{u} + \vec{v}\right|^2$$

$$\left|\vec{w}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2 + 2\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) + \left|\vec{v}\right|^2$$

จาก $\left|\vec{u} - \vec{v}\right| = \sqrt{3}$

$$\begin{aligned}
|\bar{u}-\bar{v}|^2 &= 3 \\
|\bar{u}|^2-2(\bar{u}\cdot\bar{v})+|\bar{v}|^2 &= 3 \\
1^2-2(\bar{u}\cdot\bar{v})+1^2 &= 3 \\
-2(\bar{u}\cdot\bar{v}) &= 1 \\
2(\bar{u}\cdot\bar{v}) &= -1
\end{aligned}$$

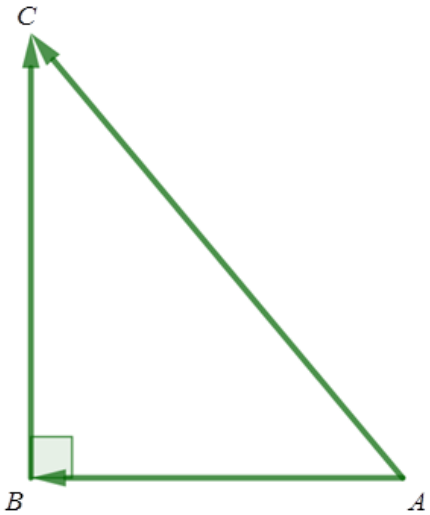
จะได้ $|\bar{w}|^2 = 1^2+(-1)+1^2$

$|\bar{w}|^2 = 1$

นั่นคือ $|\bar{w}| = 1$

ดังนั้น ขนาดของ $\bar{w}$ เท่ากับ 1

13. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี AC เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก ดังรูป



จาก $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

จะได้ $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2$

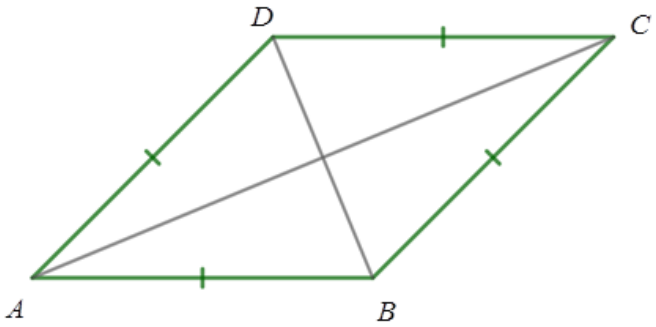
$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+2\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\right)+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2$$

เนื่องจาก $\overrightarrow{AB}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{BC}$ จะได้ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$

นั่นคือ $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2$

ดังนั้น $AB^2+BC^2 = AC^2$

14. ให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน และ เส้นทแยงมุม AC และ BD ตัดกัน ดังรูป



จะแสดงว่า $\overrightarrow{AC}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{BD}$

จากรูป จะได้ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

เนื่องจาก $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ดังนั้น $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$

จะได้ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right)$

$= \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right)$

$= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$

$= \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2$

$= 0$

นั่นคือ $\overrightarrow{AC}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{BD}$

ดังนั้น เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนตัดกันเป็นมุมฉาก

แบบฝึกหัด 3.5

1. 1) $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$

   2) $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

   3) $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$

   4) $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

   5) $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$

   6) $\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

2. 1) $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= \big((0)(1)-(3)(2)\big)\vec{i} - \big((2)(-1)-(3)(1)\big)\vec{j} + \big((2)(2)-(0)(1)\big)\vec{k}$

$= -6\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$

$\vec{v}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= \big((2)(3)-(-1)(0)\big)\vec{i} - \big((1)(3)-(-1)(2)\big)\vec{j} + \big((1)(0)-(2)(2)\big)\vec{k}$

$= 6\vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}$

2) $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= \big((1)(0)-(-1)(1)\big)\vec{i} - \big((1)(0)-(-1)(0)\big)\vec{j} + \big((1)(1)-(1)(0)\big)\vec{k}$

$= \vec{i} + \vec{k}$

$\vec{v}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= \big((1)(-1)-(0)(1)\big)\vec{i} - \big((0)(-1)-(0)(1)\big)\vec{j} + \big((0)(1)-(1)(1)\big)\vec{k}$

$= -\vec{i} - \vec{k}$

3) $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= \big((7)(-3)-(0)(4)\big)\vec{i} - \big((2)(-3)-(0)(5)\big)\vec{j} + \big((2)(4)-(7)(5)\big)\vec{k}$

$= -21\vec{i} + 6\vec{j} - 27\vec{k}$

$\vec{v}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & -3 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= \big((4)(0)-(-3)(7)\big)\vec{i} - \big((5)(0)-(-3)(2)\big)\vec{j} + \big((5)(7)-(4)(2)\big)\vec{k}$

$= 21\vec{i} - 6\vec{j} + 27\vec{k}$

3. 1) $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= \big((-3)(-1)-(4)(1)\big)\vec{i} - \big((5)(-1)-(4)(0)\big)\vec{j} + \big((5)(1)-(-3)(0)\big)\vec{k}$

$= -\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$

2) $|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2+5^2+5^2}$

$= \sqrt{1+25+25}$

$= \sqrt{51}$

3) เนื่องจาก $|\vec{u}| = \sqrt{5^2+(-3)^2+4^2}$

$= \sqrt{25+9+16}$

$= \sqrt{50}$

$= 5\sqrt{2}$

และ $|\vec{v}| = \sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}$

$= \sqrt{0+1+1}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2}$$

จาก $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$

จะได้ $\sin\theta = \dfrac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

นั่นคือ $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{51}}{\left(5\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)}$

$$= \frac{\sqrt{51}}{10}$$

ดังนั้น ไซน์ของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ คือ $\dfrac{\sqrt{51}}{10}$

4. ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{w} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

จะได้ $\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$$= \left(b_2c_3 - b_3c_2\right)\vec{i} - \left(b_1c_3 - b_3c_1\right)\vec{j} + \left(b_1c_2 - b_2c_1\right)\vec{k}$$

$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right) = \left(a_1\right)\left(b_2c_3 - b_3c_2\right) - \left(a_2\right)\left(b_1c_3 - b_3c_1\right) + \left(a_3\right)\left(b_1c_2 - b_2c_1\right)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

และ $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

$$= \left(a_2b_3 - a_3b_2\right)\vec{i} - \left(a_1b_3 - a_3b_1\right)\vec{j} + \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)\vec{k}$$

$$\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{w} = \left(a_2b_3 - a_3b_2\right)\left(c_1\right) - \left(a_1b_3 - a_3b_1\right)\left(c_2\right) + \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)\left(c_3\right)$$

$$= a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

ดังนั้น $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right) = \left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{w}$

5. **วิธีที่ 1** ให้ $\bar{u}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ และ $\bar{v}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ จะได้

$$\begin{aligned}
(\bar{u}-\bar{v})\times(\bar{u}+\bar{v}) &= \begin{bmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{bmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3\\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3\end{vmatrix}\\
&= \big((a_2-b_2)(a_3+b_3)-(a_3-b_3)(a_2+b_2)\big)\vec{i}\\
&\quad -\big((a_1-b_1)(a_3+b_3)-(a_3-b_3)(a_1+b_1)\big)\vec{j}\\
&\quad +\big((a_1-b_1)(a_2+b_2)-(a_2-b_2)(a_1+b_1)\big)\vec{k}\\
&= \big(a_2a_3+a_2b_3-b_2a_3-b_2b_3-a_3a_2-a_3b_2+b_3a_2+b_3b_2\big)\vec{i}\\
&\quad -\big(a_1a_3+a_1b_3-b_1a_3-b_1b_3-a_3a_1-a_3b_1+b_3a_1+b_3b_1\big)\vec{j}\\
&\quad +\big(a_1a_2+a_1b_2-b_1a_2-b_1b_2-a_2a_1-a_2b_1+b_2a_1+b_2b_1\big)\vec{k}\\
&= \big(2a_2b_3-2b_2a_3\big)\vec{i}-\big(2a_1b_3-2b_1a_3\big)\vec{j}+\big(2a_1b_2-2b_1a_2\big)\vec{k}\\
&= \big((2a_2)b_3-(2a_3)b_2\big)\vec{i}-\big((2a_1)b_3-(2a_3)b_1\big)\vec{j}+\big((2a_1)b_2-(2a_2)b_1\big)\vec{k}\\
&= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2a_1 & 2a_2 & 2a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\\
&= (2\bar{u})\times\bar{v}
\end{aligned}$$

วิธีที่ 2 ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(\bar{u}-\bar{v})\times(\bar{u}+\bar{v}) &= \big((\bar{u}-\bar{v})\times\bar{u}\big)+\big((\bar{u}-\bar{v})\times\bar{v}\big)\\
&= \big((\bar{u}+(-\bar{v}))\times\bar{u}\big)+\big((\bar{u}+(-\bar{v}))\times\bar{v}\big)\\
&= (\bar{u}\times\bar{u})+\big((-\bar{v})\times\bar{u}\big)+(\bar{u}\times\bar{v})+\big((-\bar{v})\times\bar{v}\big)\\
&= (\bar{u}\times\bar{u})-(\bar{v}\times\bar{u})+(\bar{u}\times\bar{v})-(\bar{v}\times\bar{v})\\
&= \bar{0}+(\bar{u}\times\bar{v})+(\bar{u}\times\bar{v})-\bar{0}\\
&= 2(\bar{u}\times\bar{v})\\
&= (2\bar{u})\times\bar{v}
\end{aligned}$$

6. 1) ไม่สามารถดำเนินการได้
   2) สามารถดำเนินการได้ และมีผลลัพธ์เป็นปริมาณเวกเตอร์
   3) สามารถดำเนินการได้ และมีผลลัพธ์เป็นปริมาณเวกเตอร์
   4) ไม่สามารถดำเนินการได้
   5) สามารถดำเนินการได้ และมีผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์

7. เวกเตอร์ที่มีทิศทางตั้งฉากกับระนาบที่กำหนดด้วย $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ คือ $\vec{u}\times\vec{v}$ และ $\vec{v}\times\vec{u}$

จาก $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= \big((-1)(-2)-(1)(1)\big)\vec{i} - \big((2)(-2)-(1)(-1)\big)\vec{j} + \big((2)(1)-(-1)(-1)\big)\vec{k}$

$= \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$

และ $\vec{v}\times\vec{u} = -(\vec{u}\times\vec{v})$

$= -\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$

เนื่องจาก $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = |(2)(-1)+(-1)(1)+(1)(-2)| = |-2-1-2| = |-5| = 5$

และ $|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{1^2+3^2+1^2} = \sqrt{11}$

จะได้ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}\times\vec{v}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{11}}\left(\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}\right)$

และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มิศทางเดียวกับ $\vec{v}\times\vec{u}$ คือ $-\frac{1}{\sqrt{11}}\left(\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}\right)$

ดังนั้น เวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $|\vec{u}\cdot\vec{v}|$ และมีทิศทางตั้งฉากกับระนาบที่กำหนดด้วย $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ คือ $\frac{5}{\sqrt{11}}\left(\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}\right) = \frac{5\sqrt{11}}{11}\vec{i} + \frac{15\sqrt{11}}{11}\vec{j} + \frac{5\sqrt{11}}{11}\vec{k}$ และ

$-\frac{5}{\sqrt{11}}\left(\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}\right) = -\frac{5\sqrt{11}}{11}\vec{i} - \frac{15\sqrt{11}}{11}\vec{j} - \frac{5\sqrt{11}}{11}\vec{k}$

8. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $PQRS$ เท่ากับ $\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PS}\right|$

เนื่องจาก $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PS} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 0\\ 0 & 3 & 4\end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix}-2 & 0\\ 3 & 4\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}3 & -2\\ 0 & 3\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \big((-2)(4)-(0)(3)\big)\vec{i} - \big((3)(4)-(0)(0)\big)\vec{j} + \big((3)(3)-(-2)(0)\big)\vec{k}$$

$$= -8\vec{i} - 12\vec{j} + 9\vec{k}$$

จะได้ $\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PS}\right| = \sqrt{(-8)^2+(-12)^2+9^2} = \sqrt{64+144+81} = \sqrt{289} = 17$

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $PQRS$ มีพื้นที่ 17 ตารางหน่วย

9. พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

เนื่องจาก $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}8-0\\ 8-2\\ -2-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\ 6\\ -4\end{bmatrix} = 8\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k}$

และ $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix}9-0\\ 12-2\\ 6-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\ 10\\ 4\end{bmatrix} = 9\vec{i}+10\vec{j}+4\vec{k}$

ดังนั้น $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 8 & 6 & -4\\ 9 & 10 & 4\end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix}6 & -4\\ 10 & 4\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}8 & -4\\ 9 & 4\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}8 & 6\\ 9 & 10\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \big((6)(4)-(-4)(10)\big)\vec{i} - \big((8)(4)-(-4)(9)\big)\vec{j} + \big((8)(10)-(6)(9)\big)\vec{k}$$

$$= 64\vec{i} - 68\vec{j} + 26\vec{k}$$

จะได้ $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{64^2+(-68)^2+26^2} = \sqrt{9,396} = 18\sqrt{29}$

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่ $\frac{1}{2}\left(18\sqrt{29}\right) = 9\sqrt{29}$ ตารางหน่วย

10. 1) เนื่องจากปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ $\left|\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)\right|$

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \left((1)(1)-(0)(1)\right)\vec{i} - \left((1)(1)-(0)(0)\right)\vec{j} + \left((1)(1)-(1)(0)\right)\vec{k}$$

$$= \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

จะได้ $\left|\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)\right| = \left|\left(\vec{i}+\vec{k}\right)\cdot\left(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)\right|$

$$= \left|(1)(1)+(0)(-1)+(1)(1)\right|$$

$$= |2|$$

$$= 2$$

ดังนั้น ทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานมีปริมาตร 2 ลูกบาศก์หน่วย

2) เนื่องจากปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ $\left|\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)\right|$

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \left((-1)(2)-(1)(1)\right)\vec{i} - \left((1)(2)-(1)(1)\right)\vec{j} + \left((1)(1)-(-1)(1)\right)\vec{k}$$

$$= -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

จะได้ $\left|\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)\right| = \left|\left(2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}\right)\cdot\left(-3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\right)\right|$

$$= \left|(2)(-3)+(3)(-1)+(-4)(2)\right|$$

$$= |-17|$$

$$= 17$$

ดังนั้น ทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานมีปริมาตร 17 ลูกบาศก์หน่วย

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. 1) ตัวอย่างเวกเตอร์ที่ขนานกัน

$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{DC}$ โดยที่ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{DC}$ มีทิศทางเดียวกัน

$\overrightarrow{AD} // \overrightarrow{CB}$ โดยที่ $\overrightarrow{AD}$ และ $\overrightarrow{CB}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน

$\overrightarrow{AE} // \overrightarrow{EC}$ โดยที่ $\overrightarrow{AE}$ และ $\overrightarrow{EC}$ มีทิศทางเดียวกัน

2) ตัวอย่างเวกเตอร์ที่เท่ากัน

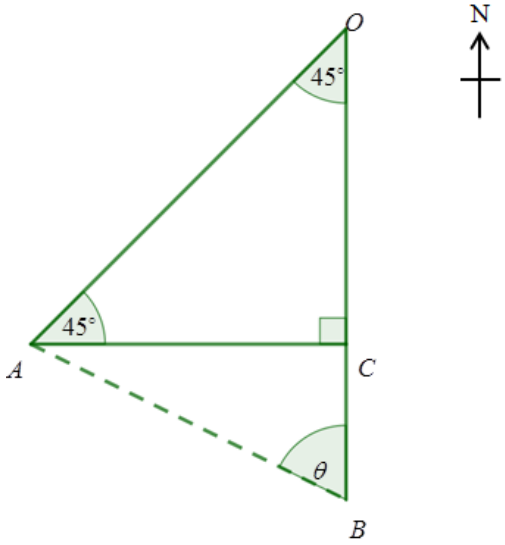
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$

3) ตัวอย่างเวกเตอร์ที่เป็นนิเสธกัน

$\overrightarrow{AD}$ และ $\overrightarrow{CB}$ เป็นนิเสธกัน

2. ให้จุด O เป็นจุดเริ่มต้น และให้ ทศพรและปุณณ์เดินมายังจุด A และจุด B ตามลำดับ ให้ C เป็นจุดที่ทำให้ $\overline{AC}$ ตั้งฉากกับ $\overline{OB}$ ดังรูป



เนื่องจาก $OA = OB$

จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม OAB เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ดังนั้น $O\hat{A}B = O\hat{B}A$

จะได้ $O\hat{B}A = \frac{1}{2}(180° - 45°) = 67.5°$

ดังนั้น ทศพรอยู่ทางทิศ $292.5°$ ของปุณณ์ โดยวัดจากทิศเหนือไปตามเข็มนาฬิกา

3. 1) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$
$= \vec{v} + \vec{w}$

2) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$
$= \vec{v}$

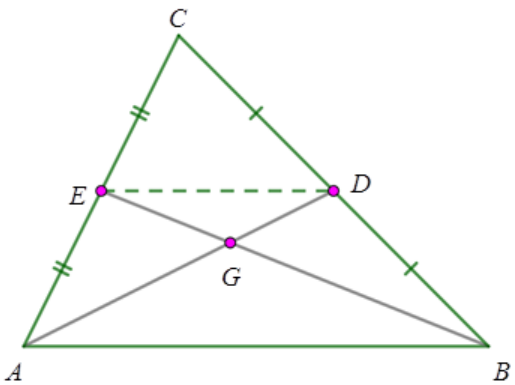
3) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}$
$= \overrightarrow{BD} + \left(-\overrightarrow{ED}\right)$
$= \vec{v} - \vec{u}$

4) $\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB}\right) + \overrightarrow{DE} = \left(\overrightarrow{AB} - \left(-\overrightarrow{BD}\right)\right) + \overrightarrow{DE}$
$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) + \overrightarrow{DE}$
$= \overrightarrow{AE}$
$= \vec{t}$

5) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}$
$= -\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{AE}$
$= -\vec{w} - \vec{u} - \vec{t}$

6) $\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}\right) - \left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}\right) = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{DE}$
$= \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED}$
$= \overrightarrow{BD}$
$= \vec{v}$

4.



จากรูป จะได้ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ และ $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

เนื่องจาก $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

สังเกตว่า $\overrightarrow{AG} \,//\, \overrightarrow{GD}$ และ $\overrightarrow{BG} \,//\, \overrightarrow{GE}$ จะได้ว่า

มีจำนวนจริง k ซึ่ง $k \neq 0$ ที่ $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{GD}$ และมีจำนวนจริง m ซึ่ง $m \neq 0$ ที่ $\overrightarrow{BG} = m\overrightarrow{GE}$

จาก $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

จะได้ว่า $\overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BG}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(k\overrightarrow{GD} - m\overrightarrow{GE}\right)$

ดังนั้น $\left(1-\frac{k}{2}\right)\overrightarrow{GD} = \left(1-\frac{m}{2}\right)\overrightarrow{GE}$

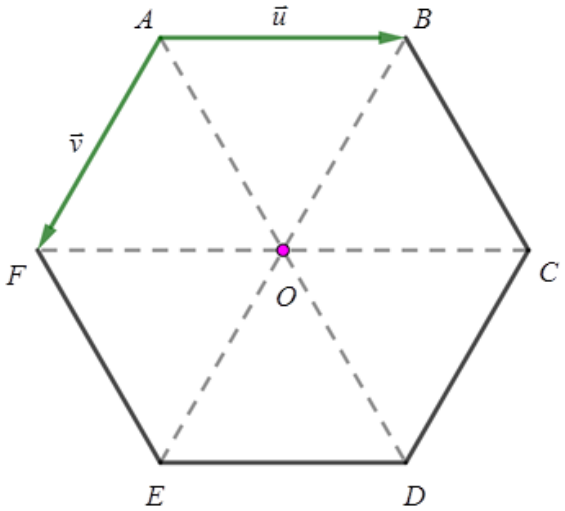
เนื่องจาก $\overrightarrow{GD}$ และ $\overrightarrow{GE}$ ไม่ขนานกันและไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ทั้งคู่

จะได้ว่า $1-\frac{k}{2} = 0$ และ $1-\frac{m}{2} = 0$

นั่นคือ $k = 2$ และ $m = 2$

ดังนั้น $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GD}$

5.



1) $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$

$= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$

$= -\vec{u} + \vec{v}$

2) ให้จุด O เป็นจุดตัดของเส้นทแยงมุม AD, BE และ CF

จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม AOB เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และ $\overrightarrow{CF}$ ขนานกับ $\overrightarrow{AB}$

ดังนั้น $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$

จะได้ว่า $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OF} = -2\vec{u}$

3) ในทำนองเดียวกับข้อ 2) จะได้ว่า $\overrightarrow{EO} = -\overrightarrow{AF} = -\vec{v}$

ดังนั้น $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF}$

$= -\vec{v} + (-\vec{u})$

$= -\vec{v} - \vec{u}$

6. จาก $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{v}$ และมีขนาดเป็น $\frac{1}{2}$ เท่าของขนาดของ $\vec{v}$

จะได้ $\vec{w} = -\frac{1}{2}\vec{v}$ หรือ $\vec{v} = -2\vec{w}$

และจาก $\vec{u} = 3\vec{v}$ จะได้ $\vec{u} = 3(-2\vec{w}) = -6\vec{w}$

ดังนั้น $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{w}$ และมีขนาดเป็น 6 เท่าของขนาดของ $\vec{w}$

7. จาก $(a+2b-7)\vec{u} = (3b-a-3)\vec{v}$

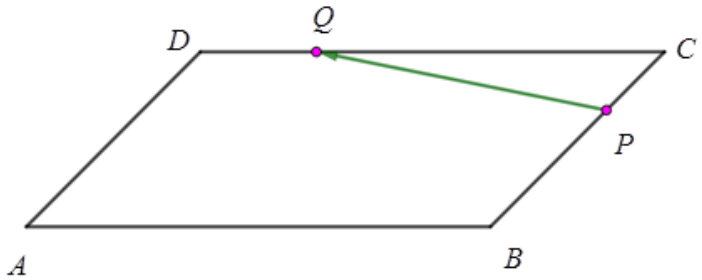
เนื่องจาก $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ขนานกันและไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ทั้งคู่

จะได้ $a+2b-7 = 0$ ---------(1)

และ $3b-a-3 = 0$ ---------(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $b = 2$ และ $a = 3$

8.



จากรูป จะได้ $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ}$

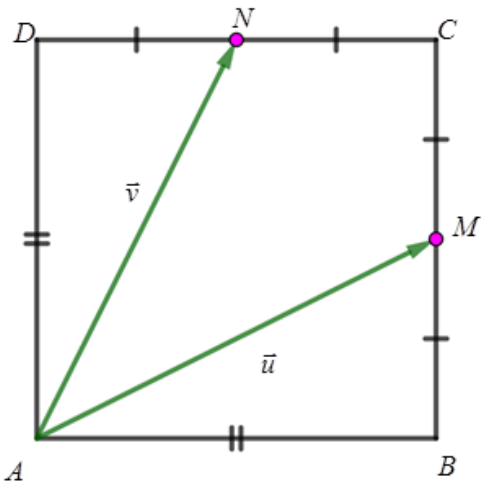
$= \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}(-\overrightarrow{AB})$

$= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

ดังนั้น $a = -\frac{3}{4}$ และ $b = \frac{1}{3}$

9.



จากรูป จะได้ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

และ $\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v} &= \frac{4}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) - \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \\ &= \left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right) - \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) \\ &= \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

10. ให้ (x, y, z) เป็นจุดที่อยู่ห่างจากจุด $(0, 0, 0)$ และ $(1, 2, 3)$ เป็นระยะทางเท่ากัน จะได้

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} &= \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9} \\ x^2 + y^2 + z^2 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 \\ 2x + 4y + 6z &= 14 \\ x + 2y + 3z &= 7\end{aligned}$$

นั่นคือ $a = 2, b = 3$ และ $c = 7$

11. 1) จาก A เป็นภาพฉายของจุด P บนแกน X

จะได้ A มีพิกัดเป็น $(1, 0, 0)$

จาก B เป็นภาพฉายของจุด P ในระนาบ XY

จะได้ B มีพิกัดเป็น $(1, -2, 0)$

จาก C เป็นภาพฉายของจุด P บนในระนาย XZ

จะได้ C มีพิกัดเป็น $(1, 0, 2)$

จะได้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ -2-0 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 0-0 \\ 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 0-(-2) \\ 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

และ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 0^2} = 2$

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = 2$

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

จะเห็นว่า $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

และเนื่องจาก $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (0)(0) + (-2)(0) + (0)(2) = 0$

จะได้ว่า $\overrightarrow{AB}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{AC}$

นั่นคือ รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากด้วย

2) ความยาวรอบรูปของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $2 + 2 + 2\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}$ หน่วย

3) พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $\frac{1}{2}(2)(2) = 2$ ตารางหน่วย

12. 1) $2\vec{t}-\frac{1}{2}\vec{u} = 2\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}2+1\\-4+2\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$

2) จาก $\vec{u}-3\vec{t} = \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\6\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}-2+(-3)\\-4+6\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}-5\\2\end{bmatrix}$

ดังนั้น นิเสธของ $\vec{u}-3\vec{t}$ คือ $-\begin{bmatrix}-5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}$

3) $2(\vec{v}+2\vec{w}) = 2\left(\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-2\\4\\-5\end{bmatrix}\right)$

$= 2\left(\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4\\8\\-10\end{bmatrix}\right)$

$= 2\begin{bmatrix}0+(-4)\\-2+8\\1+(-10)\end{bmatrix}$

$= 2\begin{bmatrix}-4\\6\\-9\end{bmatrix}$

$$2(\vec{v}+2\vec{w}) = \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \\ -18 \end{bmatrix}$$

4) จาก $\frac{1}{2}(3\vec{v}-\vec{w}) = \frac{1}{2}\left(3\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}\right)$$

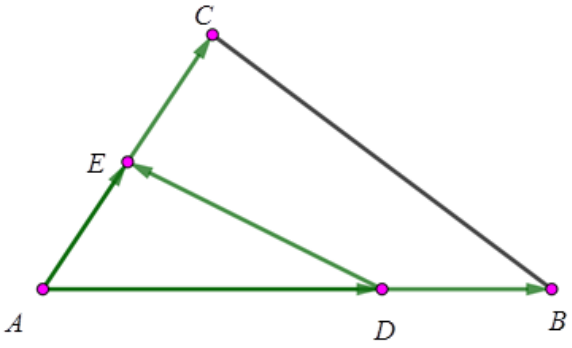
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0-(-2) \\ -6-4 \\ 3-(-5) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น นิเสธของ $\frac{1}{2}(3\vec{v}-\vec{w})$ คือ $-\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$

13.



จากรูป $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$

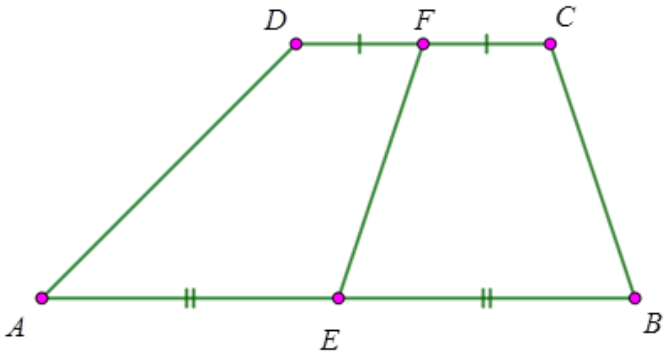
$= \left(-\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AE}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ &= -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

จะได้ $m=-\frac{1}{6}$ และ $n=\frac{1}{2}$

ดังนั้น $m-n=-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=-\frac{2}{3}$

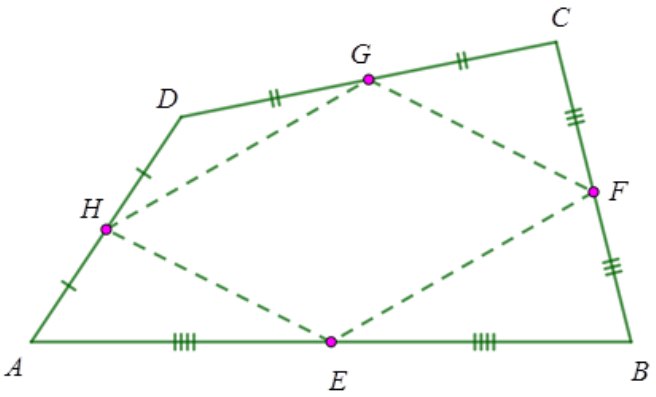
14.



จากรูป $$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)\end{aligned}$$

นั่นคือ $\left|\overrightarrow{EF}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right|$

15.



ต้องแสดงว่า มีจำนวนจริง k ที่ $\overrightarrow{HG} = k\overrightarrow{EF}$ และมีจำนวนจริง m ที่ $\overrightarrow{HE} = m\overrightarrow{GF}$

จากรูป
$$\begin{aligned}\overrightarrow{HG} &= \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DG} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} \\ &= \overrightarrow{EF}\end{aligned}$$

นั่นคือ $\overrightarrow{HG}$ ขนานกับ $\overrightarrow{EF}$

และจากรูป จะได้
$$\begin{aligned}\overrightarrow{HE} &= \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AE} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HE} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CF}\\ &= \overrightarrow{GF}\end{aligned}$$

นั่นคือ $\overrightarrow{HE}$ ขนานกับ $\overrightarrow{GF}$

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยม $EFGH$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

16. เนื่องจาก $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะได้ C มีพิกัดเป็น $(3, 3)$

ดังนั้น $\overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}3-1\\3-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

17. ให้ Q มีพิกัดเป็น (x, y)

จาก $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix}x-(-1)\\y-3\end{bmatrix}$

จะได้ $\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+1\\y-3\end{bmatrix}$

นั่นคือ $x+1 = 2$ จะได้ $x=1$

และ $y-3 = -2$ จะได้ $y=1$

ดังนั้น พิกัดของจุด Q คือ $(1, 1)$

18. จาก $a\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

จะได้ $\begin{bmatrix}3a\\-2a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-b\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}3a-b\\-2a+b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

ดังนั้น $3a-b = 1$ ---------(1)

และ $-2a+b = 1$ ---------(2)

จาก (1) และ (2) จะได้

$a = 2$

และ $b = 5$

19. เนื่องจาก $\begin{bmatrix} 6 \\ k \end{bmatrix}$ ขนานกับ $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

แสดงว่า มีจำนวน m ที่ $m \neq 0$ ซึ่งทำให้ $\begin{bmatrix} 6 \\ k \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} 6 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3m \\ -2m \end{bmatrix}$

จะได้ $6 = 3m$ และ $k = -2m$

จาก $6 = 3m$ จะได้ $m = 2$

นั่นคือ $k = -2(2) = -4$

ดังนั้น $\bar{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$

จะได้ $\bar{u} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 6+(-2) \\ -4+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ขนาดของ $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ คือ $\sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

ดังนั้น ขนาดของ $\bar{u} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ เท่ากับ 5 หน่วย

20. จาก $|\bar{u}| = \sqrt{(-2)^2 + a^2 + b^2}$

$$= \sqrt{4 + a^2 + b^2}$$

จะได้ $\sqrt{4 + a^2 + b^2} = 3$

$4 + a^2 + b^2 = 9$

ดังนั้น $a^2 + b^2 = 5$

21. 1) $\vec{u}+\vec{v} = \begin{bmatrix}4\\-3\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+(-1)\\-3+2\\2+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\\3\end{bmatrix}$

$|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{3^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19}$

จะได้ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}+\vec{v}$ คือ

$$\frac{1}{\sqrt{19}}\begin{bmatrix}3\\-1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{19}}\\\frac{-1}{\sqrt{19}}\\\frac{3}{\sqrt{19}}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{19}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{19}}\vec{j}+\frac{3}{\sqrt{19}}\vec{k}$$

$$= \frac{3\sqrt{19}}{19}\vec{i}-\frac{\sqrt{19}}{19}\vec{j}+\frac{3\sqrt{19}}{19}\vec{k}$$

2) $2\vec{u}-\vec{v} = 2\begin{bmatrix}4\\-3\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\-6\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8-(-1)\\-6-2\\4-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\-8\\3\end{bmatrix}$

$|2\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{9^2+(-8)^2+3^2} = \sqrt{81+64+9} = \sqrt{154}$

จะได้ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $2\vec{u}-\vec{v}$ คือ

$$-\frac{1}{\sqrt{154}}\begin{bmatrix}9\\-8\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{9}{\sqrt{154}}\\\frac{8}{\sqrt{154}}\\-\frac{3}{\sqrt{154}}\end{bmatrix}$$

$$= -\frac{9}{\sqrt{154}}\vec{i}+\frac{8}{\sqrt{154}}\vec{j}-\frac{3}{\sqrt{154}}\vec{k}$$

$$= -\frac{9\sqrt{154}}{154}\vec{i}+\frac{8\sqrt{154}}{154}\vec{j}-\frac{3\sqrt{154}}{154}\vec{k}$$

22. 1) $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -3-1 \\ 1-3 \\ 2-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

2) เนื่องจาก ขนาดของ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ คือ $\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

จะได้ $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

3) เนื่องจาก $\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-2 \\ -2-1 \\ 11-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$

และขนาดของ $\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ คือ $\sqrt{(-6)^2+(-3)^2+6^2} = \sqrt{36+9+36} = \sqrt{81} = 9$

จะได้ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ คือ $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$

จะได้ $\overrightarrow{AC} = -\frac{4}{9}\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\overrightarrow{RS} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$ และ $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{RS}$

นั่นคือ $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ และ $\overrightarrow{AC}$ ขนานกัน

โดยที่ $\overrightarrow{PQ}$ และ $\overrightarrow{RS}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน และ $\overrightarrow{RS}$ มีขนาดเป็น $\frac{1}{6}$ เท่าของขนาดของ $\overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{PQ}$ และ $\overrightarrow{AC}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน และ $\overrightarrow{AC}$ มีขนาดเป็น $\frac{2}{3}$ เท่าของขนาดของ $\overrightarrow{PQ}$

และ $\overrightarrow{RS}$ และ $\overrightarrow{AC}$ มีทิศทางเดียวกัน และ $\overrightarrow{AC}$ มีขนาดเป็น 4 เท่าของขนาดของ $\overrightarrow{RS}$

23. 1) $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -2-1 \\ 0-4 \\ 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$

2) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

3) $\overrightarrow{OR} = \begin{bmatrix} 5-0 \\ 0-0 \\ 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

เนื่องจาก $\overrightarrow{PQ} = -\bar{u}$

จะได้ว่า $\overrightarrow{PQ}$ และ $\bar{u}$ ขนานกัน

24. 1) $\bar{u} \cdot \bar{v} = (3\vec{i}) \cdot (3\vec{j})$

$= (3)(0) + (0)(3)$

$= 0$

จะได้ว่า $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$

ดังนั้น $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$ และขนาดของมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากับ $90°$

2) $\bar{u} \cdot \bar{v} = (6\vec{i} + 8\vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 7\vec{j})$

$= (6)(-1) + (8)(7)$

$= 50$

ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ซึ่ง $0° \le \theta \le 180°$

จาก $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

จะได้ $\cos\theta = \dfrac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$

จาก $|\bar{u}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$

และ $|\bar{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

จะได้ $\cos\theta = \dfrac{50}{(10)(5\sqrt{2})}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

นั่นคือ $\theta = 45°$

ดังนั้น $\vec{u}\cdot\vec{v}=50$ และขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เท่ากับ $45°$

3) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}\right)\cdot\left(5\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\right)$

$= (1)(5)+(-3)(1)+(2)(-1)$

$= 0$

จะได้ว่า $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$

ดังนั้น $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ และขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เท่ากับ $90°$

4) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(\vec{i}-7\vec{j}\right)\cdot\left(3\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}\right)$

$= (1)(3)+(-7)(4)+(0)(-5)$

$= -25$

ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ซึ่ง $0°\le\theta\le180°$

จาก $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

จะได้ $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

จาก $|\vec{u}| = \sqrt{1^2+(-7)^2+0^2} = \sqrt{1+49+0} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

และ $|\vec{v}| = \sqrt{3^2+4^2+(-5)^2} = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

จะได้ $\cos\theta = \dfrac{-25}{\left(5\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}\right)} = -\dfrac{1}{2}$

นั่นคือ $\theta = 120°$

ดังนั้น $\vec{u}\cdot\vec{v}=-25$ และขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เท่ากับ $120°$

25. 1) $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

$= \left(-2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\right)\cdot\left(5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right)+\left(-2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\right)\cdot\left(-3\vec{j}+5\vec{k}\right)$

$= \left((-2)(5)+(-1)(-2)+(3)(1)\right)+\left((-2)(0)+(-1)(-3)+(3)(5)\right)$

$= (-10+2+3)+(0+3+15)$

$= 13$

2) $(3\vec{u})\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot(2\vec{w})$

$= \left(3\left(-2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\right)\cdot\left(5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right)\right)-\left(\left(5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right)\cdot 2\left(-3\vec{j}+5\vec{k}\right)\right)$

$= \left(-6\vec{i}-3\vec{j}+9\vec{k}\right)\cdot\left(5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right)-\left(5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right)\cdot\left(-6\vec{j}+10\vec{k}\right)$

$= \left((-6)(5)+(-3)(-2)+(9)(1)\right)-\left((5)(0)+(-2)(-6)+(1)(10)\right)$

$= (-30+6+9)-(0+12+10)$

$= -37$

3) $(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} = \left(\left(-2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\right)\cdot\left(-3\vec{j}+5\vec{k}\right)\right)\left(5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right)$

$= \left((-2)(0)+(-1)(-3)+(3)(5)\right)\left(5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right)$

$= (0+3+15)\left(5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right)$

$= 18\left(5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right)$

$= 90\vec{i}-36\vec{j}+18\vec{k}$

4) จาก $\vec{v}\cdot\vec{w} = \left(5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right)\cdot\left(-3\vec{j}+5\vec{k}\right)$

$= 5(0)+(-2)(-3)+1(5)$

$= 0+6+5$

$= 11$

จาก $\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 5\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}-2 & 1\\ -3 & 5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}5 & 1\\ 0 & 5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}5 & -2\\ 0 & -3\end{vmatrix}\vec{k}$

$= \left((-2)(5)-1(-3)\right)\vec{i}-\left(5(5)-1(0)\right)\vec{j}+\left(5(-3)-(-2)(0)\right)\vec{k}$

$= -7\vec{i}-25\vec{j}-15\vec{k}$

จะได้ $|\vec{v}\times\vec{w}| = \sqrt{(-7)^2+\left(-25^2\right)+(-15)^2} = \sqrt{49+625+225} = \sqrt{899}$

$|\vec{v}| = \sqrt{5^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{25+4+1} = \sqrt{30}$

และ $|\vec{w}| = \sqrt{0^2+(-3)^2+5^2} = \sqrt{0+9+25} = \sqrt{34}$

ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{v}$ และ $\vec{w}$

จะได้ $\cos\theta = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \dfrac{11}{\left(\sqrt{30}\right)\left(\sqrt{34}\right)}$

และ $\sin\theta = \dfrac{|\vec{v}\times\vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \dfrac{\sqrt{899}}{\left(\sqrt{30}\right)\left(\sqrt{34}\right)}$

ดังนั้น $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{899}}{\left(\sqrt{30}\right)\left(\sqrt{34}\right)}}{\dfrac{11}{\left(\sqrt{30}\right)\left(\sqrt{34}\right)}} = \dfrac{\sqrt{899}}{11}$

26. ให้ $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$

จาก $\vec{u}\cdot\vec{v} = (\vec{i}+\vec{j})\cdot(a\vec{i}+b\vec{j}) = a+b$ และ $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2$

จะได้ $a+b = 2$ ---------(1)

จาก $\vec{u}+\vec{v} = (\vec{i}+\vec{j})+(a\vec{i}+b\vec{j}) = (1+a)\vec{i}+(1+b)\vec{j}$

จะได้ $|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{(1+a)^2+(1+b)^2}$

จาก $|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{26}$

จะได้ $\sqrt{(1+a)^2+(1+b)^2} = \sqrt{26}$ ---------(2)

จาก (1) และ (2) จะได้

$$\sqrt{(1+a)^2+(1+(2-a))^2} = \sqrt{26}$$
$$(1+a)^2+(3-a)^2 = 26$$
$$1+2a+a^2+9-6a+a^2 = 26$$
$$10-4a+2a^2 = 26$$
$$2a^2-4a-16 = 0$$
$$a^2-2a-8 = 0$$
$$(a-4)(a+2) = 0$$

นั่นคือ $a-4 = 0$ หรือ $a+2 = 0$

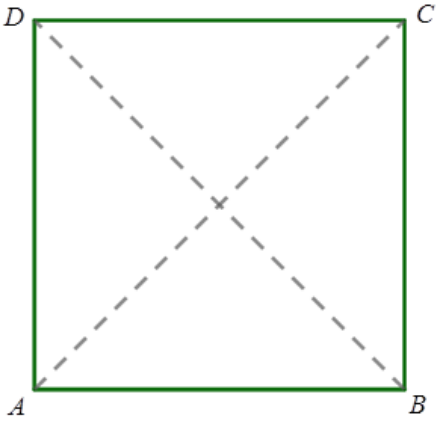
จะได้ $a = 4$ หรือ $a = -2$

ถ้า $a = 4$ จะได้ $b = -2$ นั่นคือ $\vec{v} = 4\vec{i}-2\vec{j}$

ถ้า $a = -2$ จะได้ $b = 4$ นั่นคือ $\vec{v} = -2\vec{i}+4\vec{j}$

ดังนั้น $\vec{v}$ ที่เป็นไปได้คือ $4\vec{i}-2\vec{j}$ หรือ $-2\vec{i}+4\vec{j}$

27. ให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ เส้นทแยงมุม AC และ BD ตัดกัน ดังรูป



จะแสดงว่า $\overrightarrow{AC}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{BD}$

จากรูป จะได้ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

เนื่องจาก $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ดังนั้น $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$

จะได้
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right) \\
&= \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right) \\
&= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\overrightarrow{AC}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{BD}$

ดังนั้น เส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตัดกันเป็นมุมฉาก

28. จาก $\dfrac{|\vec{u}+\vec{v}|}{|\vec{u}-\vec{v}|} = \sqrt{\dfrac{31}{21}}$

จะได้ $\dfrac{|\vec{u}+\vec{v}|^2}{|\vec{u}-\vec{v}|^2} = \dfrac{31}{21}$

$$\frac{|\vec{u}|^2+2(\vec{u}\cdot\vec{v})+|\vec{v}|^2}{|\vec{u}|^2-2(\vec{u}\cdot\vec{v})+|\vec{v}|^2} = \frac{31}{21}$$

จาก $|\vec{u}|=1$ จะได้

$$\frac{1+2(\vec{u}\cdot\vec{v})+|\vec{v}|^2}{1-2(\vec{u}\cdot\vec{v})+|\vec{v}|^2} = \frac{31}{21}$$

จาก $\vec{u}$ ทำมุม $60°$ กับ $\vec{v}$ จะได้ $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos 60° = \dfrac{|\vec{v}|}{2}$

นั่นคือ $$\frac{1+2\left(\frac{|\vec{v}|}{2}\right)+|\vec{v}|^2}{1-2\left(\frac{|\vec{v}|}{2}\right)+|\vec{v}|^2} = \frac{31}{21}$$

$$\frac{1+|\vec{v}|+|\vec{v}|^2}{1-|\vec{v}|+|\vec{v}|^2} = \frac{31}{21}$$

$$21+21|\vec{v}|+21|\vec{v}|^2 = 31-31|\vec{v}|+31|\vec{v}|^2$$

$$10|\vec{v}|^2-52|\vec{v}|+10 = 0$$

$$5|\vec{v}|^2-26|\vec{v}|+5 = 0$$

$$(5|\vec{v}|-1)(|\vec{v}|-5) = 0$$

นั่นคือ $5|\vec{v}|-1 = 0$ หรือ $|\vec{v}|-5 = 0$

จะได้ $|\vec{v}| = \dfrac{1}{5}$ หรือ $|\vec{v}| = 5$

ดังนั้น $|\vec{v}|=\dfrac{1}{5}$ หรือ $|\vec{v}|=5$

29. เนื่องจาก $\vec{u}+\vec{v}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u}-2\vec{v}$

จะได้ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v}) = 0$

$$\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{u}-2(\vec{u}\cdot\vec{v})-2(\vec{v}\cdot\vec{v}) = 0$$

$$|\vec{u}|^2-\vec{u}\cdot\vec{v}-2|\vec{v}|^2 = 0$$

เนื่องจาก $|\vec{u}|=|\vec{v}|$ จะได้

$$-|\vec{u}|^2-\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$
$$|\vec{u}|^2 = -(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

จาก $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

จะได้ $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|^2} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{-(\vec{u}\cdot\vec{v})} = -1$

นั่นคือ $\theta = 180°$

ดังนั้น ขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เท่ากับ $180°$

30. จาก $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

จะได้ $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = (|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta)^2$
$= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\cos^2\theta$
$= (\vec{u}\cdot\vec{u})(\vec{v}\cdot\vec{v})\cos^2\theta$

เนื่องจาก $0\le\cos^2\theta\le 1$ จะได้ $(\vec{u}\cdot\vec{u})(\vec{v}\cdot\vec{v})\cos^2\theta\le(\vec{u}\cdot\vec{u})(\vec{v}\cdot\vec{v})$

นั่นคือ $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2\le(\vec{u}\cdot\vec{u})(\vec{v}\cdot\vec{v})$

จาก (1) จะได้ว่า $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = (\vec{u}\cdot\vec{u})(\vec{v}\cdot\vec{v})$ ก็ต่อเมื่อ $\cos^2\theta=1$

นั่นคือ $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=(\vec{u}\cdot\vec{u})(\vec{v}\cdot\vec{v})$ ก็ต่อเมื่อ $\theta=0°$ หรือ $\theta=180°$

31. เนื่องจาก $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3-7 \\ -2-(-5) \\ -6-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -12 \end{bmatrix}$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 6-3 \\ -14-(-2) \\ -10-(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} 10-6 \\ -17-(-14) \\ 2-(-10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

และ $\overrightarrow{DA} = \begin{bmatrix} 7-10 \\ -5-(-17) \\ 6-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{DA}\right|$

และ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-4)(3) + (3)(-12) + (-12)(-4) = 0$

นั่นคือ $\overrightarrow{AB}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{BC}$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\overrightarrow{BC}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{CD}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{DA}$

และ $\overrightarrow{DA}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{AB}$

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดดังกล่าว เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

32. จาก $|\vec{u}| = |\vec{w}|$

จะได้ $|\vec{u}|^2 = |\vec{w}|^2$

จาก $|\vec{u} - \vec{v}| = |\vec{v} + \vec{w}|$

จะได้ $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{v} + \vec{w}|^2$

$$|\vec{u}|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + |\vec{v}|^2 = |\vec{v}|^2 + 2(\vec{v} \cdot \vec{w}) + |\vec{w}|^2$$

$$-(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$-|\vec{u}||\vec{v}|\cos\frac{\pi}{5} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta \quad \text{เมื่อ } \theta \text{ เป็นมุมระหว่าง } \vec{v} \text{ และ } \vec{w}$$

$$-\cos\frac{\pi}{5} = \cos\theta$$

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\theta$$

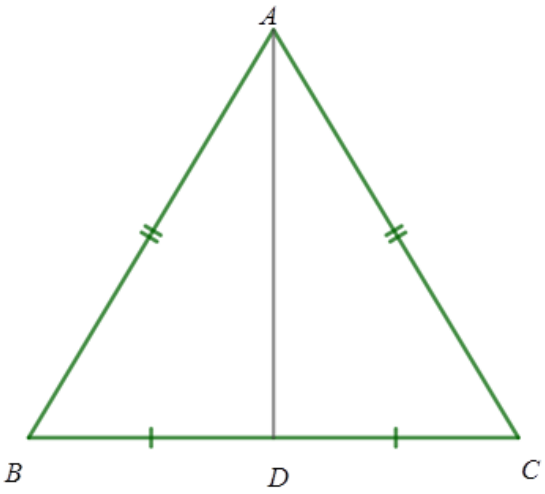
$$\theta = \pi - \frac{\pi}{5}$$

$$\theta = \frac{4\pi}{5}$$

ดังนั้น ขนาดของมุมระหว่าง $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ มีขนาด $\frac{4\pi}{5}$ เรเดียน

33. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มี A เป็นจุดยอด จะได้ว่า $AB = AC$

ให้ $\overrightarrow{AD}$ เป็นเส้นมัธยฐานที่แบ่งครึ่งด้าน BC ที่จุด D ดังรูป



จะแสดงว่า $\overrightarrow{DA}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{BC}$

จากรูป จะได้ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

และ
$$\begin{aligned}\overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{CA} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}\right)\end{aligned}$$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{BA}\right|^2 + \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} - \left|\overrightarrow{AC}\right|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{BA}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AC}\right|^2\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

จะได้ $\overrightarrow{DA}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{DC}$

เนื่องจาก $\overline{DC}$ ขนานกับ $\overline{BC}$ จะได้ $\overline{DA}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$
ดังนั้น เส้นมัธยฐานที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วตั้งฉากกับฐาน

34. 1) $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= \big((1)(-2)-(-4)(0)\big)\vec{i} - \big((2)(-2)-(-4)(-3)\big)\vec{j} + \big((2)(0)-(1)(-3)\big)\vec{k}$

$= -2\vec{i}+16\vec{j}+3\vec{k}$

2) **วิธีที่ 1**

$\vec{v}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= \big((0)(-4)-(-2)(1)\big)\vec{i} - \big((-3)(-4)-(-2)(2)\big)\vec{j} + \big((-3)(1)-(0)(2)\big)\vec{k}$

$= 2\vec{i}-16\vec{j}-3\vec{k}$

วิธีที่ 2

เนื่องจาก $\vec{v}\times\vec{u} = -(\vec{u}\times\vec{v})$

$= -\big(-2\vec{i}+16\vec{j}+3\vec{k}\big)$

$= 2\vec{i}-16\vec{j}-3\vec{k}$

3) จาก $\vec{u}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= \big((1)(-1)-(-4)(3)\big)\vec{i} - \big((2)(-1)-(-4)(-2)\big)\vec{j} + \big((2)(3)-(1)(-2)\big)\vec{k}$

$= 11\vec{i}+10\vec{j}+8\vec{k}$

จะได้ $|\vec{u}\times\vec{w}| = \sqrt{11^2+10^2+8^2} = \sqrt{121+100+64} = \sqrt{285}$

4) $\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= \big((0)(-1)-(-2)(3)\big)\vec{i} - \big((-3)(-1)-(-2)(-2)\big)\vec{j} + \big((-3)(3)-(0)(-2)\big)\vec{k}$

$= 6\vec{i} + \vec{j} - 9\vec{k}$

$\vec{w}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{w}) = -6\vec{i} - \vec{j} + 9\vec{k}$

จะได้ $(\vec{v}\times\vec{w})-(\vec{w}\times\vec{v}) = 6\vec{i} + \vec{j} - 9\vec{k} - (-6\vec{i} - \vec{j} + 9\vec{k}) = 12\vec{i} + 2\vec{j} - 18\vec{k}$

5) จาก $\vec{u}\times\vec{w} = 11\vec{i} + 10\vec{j} + 8\vec{k}$

จะได้ $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w}) = (-3\vec{i} - 2\vec{k})\cdot(11\vec{i} + 10\vec{j} + 8\vec{k})$

$= (-3)(11)+(0)(10)+(-2)(8)$

$= -49$

และจาก $\vec{w}\times\vec{u} = -(\vec{u}\times\vec{w})$

$= -11\vec{i} - 10\vec{j} - 8\vec{k}$

จะได้ $\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u}) = (-3\vec{i} - 2\vec{k})\cdot(-11\vec{i} - 10\vec{j} - 8\vec{k})$

$= (-3)(-11)+(0)(-10)+(-2)(-8)$

$= 49$

ดังนั้น $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w}) - \vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u}) = -49 - 49 = -98$

6) จาก $2\vec{w} = -4\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$

จะได้ $\vec{v}\times 2\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & -2 \\ -4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= \big((0)(-2)-(-2)(6)\big)\vec{i} - \big((-3)(-2)-(-2)(-4)\big)\vec{j} + \big((-3)(6)-(0)(-4)\big)\vec{k}$

$= 12\vec{i} + 2\vec{j} - 18\vec{k}$

และจาก $\vec{u}\times(\vec{v}\times 2\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -4 \\ 12 & 2 & -18 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -18 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 12 & -18 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 12 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= \big((1)(-18)-(-4)(2)\big)\vec{i} - \big((2)(-18)-(-4)(12)\big)\vec{j} + \big((2)(2)-(1)(12)\big)\vec{k}$

$= -10\vec{i} - 12\vec{j} - 8\vec{k}$

จะได้ $\vec{u}\times(\vec{v}\times 2\vec{w})+3\vec{w} = (-10\vec{i}-12\vec{j}-8\vec{k})+3(-2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k})$

$= (-10\vec{i}-12\vec{j}-8\vec{k})+(-6\vec{i}+9\vec{j}-3\vec{k})$

$= -16\vec{i}-3\vec{j}-11\vec{k}$

7) ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{v}$ และ $\vec{w}$

จาก $\vec{v}\times\vec{w} = 6\vec{i}+\vec{j}-9\vec{k}$

จะได้ $|\vec{v}\times\vec{w}| = \sqrt{6^2+1^2+(-9)^2} = \sqrt{36+1+81} = \sqrt{118}$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{9+0+4} = \sqrt{13}$

และ $|\vec{w}| = \sqrt{(-2)^2+3^2+(-1)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

จาก $|\vec{v}\times\vec{w}| = |\vec{v}||\vec{w}|\sin\theta$

จะได้ $\sin\theta = \dfrac{|\vec{v}\times\vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \dfrac{\sqrt{118}}{(\sqrt{13})(\sqrt{14})} = \dfrac{\sqrt{59}}{\sqrt{91}}$

8) ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{w}$

จาก $|\vec{u}\times\vec{w}| = \sqrt{285}$

$|\vec{u}| = \sqrt{2^2+1^2+(-4)^2} = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$

และ $|\vec{w}| = \sqrt{(-2)^2+3^2+(-1)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

จาก $|\vec{u}\times\vec{w}| = |\vec{u}||\vec{w}|\sin\theta$

จะได้ $\sin\theta = \dfrac{|\vec{u}\times\vec{w}|}{|\vec{u}||\vec{w}|} = \dfrac{\sqrt{285}}{(\sqrt{21})(\sqrt{14})} = \dfrac{\sqrt{285}}{7\sqrt{6}}$

จาก $\vec{u}\cdot\vec{w} = (2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})\cdot(-2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k})$

$= (2)(-2)+(1)(3)+(-4)(-1)$

$= 3$

และ $\vec{u}\cdot\vec{w} = |\vec{u}||\vec{w}|\cos\theta$

จะได้ $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|} = \dfrac{3}{(\sqrt{21})(\sqrt{14})} = \dfrac{3}{7\sqrt{6}}$

ดังนั้น $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\frac{3}{7\sqrt{6}}}{\frac{\sqrt{285}}{7\sqrt{6}}} = \dfrac{3}{\sqrt{285}} = \dfrac{\sqrt{285}}{95}$

35. จาก $\begin{bmatrix}1\\1\\m\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&m\\-2&1&4\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}1&m\\1&4\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1&m\\-2&4\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1&1\\-2&1\end{vmatrix}\vec{k}$

$= \big((1)(4)-(m)(1)\big)\vec{i} - \big((1)(4)-(m)(-2)\big)\vec{j} + \big((1)(1)-(1)(-2)\big)\vec{k}$

$= (4-m)\vec{i} - (4+2m)\vec{j} + 3\vec{k}$

จะได้ $4-m=9$ และ $-4-2m=6$ นั่นคือ $m=-5$

36. เนื่องจาก $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ ตั้งฉากกับ $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix}$

จาก $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&1\\-2&1&3\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}-1&1\\1&3\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1&1\\-2&3\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1&-1\\-2&1\end{vmatrix}\vec{k}$

$= \big((-1)(3)-(1)(1)\big)\vec{i} - \big((1)(3)-(1)(-2)\big)\vec{j} + \big((1)(1)-(-1)(-2)\big)\vec{k}$

$= -4\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$

ขนาดของ $-4\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k}$ คือ $\sqrt{(-4)^2+(-5)^2+(-1)^2} = \sqrt{16+25+1} = \sqrt{42}$

นั่นคือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $-4\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{42}}\left(-4\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k}\right)$

จะได้ เวกเตอร์ที่มีขนาด 5 หน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $-4\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k}$ คือ

$\frac{5}{\sqrt{42}}\left(-4\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k}\right) = -\frac{10\sqrt{42}}{21}\vec{i} - \frac{25\sqrt{42}}{42}\vec{j} - \frac{5\sqrt{42}}{42}\vec{k}$

และจาก $\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} = -\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix}\right) = 4\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$

ขนาดของ $4\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$ คือ $\sqrt{4^2+5^2+1^2} = \sqrt{16+25+1} = \sqrt{42}$

นั่นคือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $4\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{42}}\left(4\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}\right)$

จะได้ เวกเตอร์ที่มีขนาด 5 หน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $4\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$ คือ

$$\frac{5}{\sqrt{42}}\left(4\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}\right) = \frac{10\sqrt{42}}{21}\vec{i}+\frac{25\sqrt{42}}{42}\vec{j}+\frac{5\sqrt{42}}{42}\vec{k}$$

ดังนั้น เวกเตอร์ที่มีขนาด 5 หน่วยทั้งหมด ซึ่งตั้งฉากกับทั้ง $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix}$ คือ

$$-\frac{10\sqrt{42}}{21}\vec{i}-\frac{25\sqrt{42}}{42}\vec{j}-\frac{5\sqrt{42}}{42}\vec{k} \text{ และ } \frac{10\sqrt{42}}{21}\vec{i}+\frac{25\sqrt{42}}{42}\vec{j}+\frac{5\sqrt{42}}{42}\vec{k}$$

37. จาก $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

จะได้ $-\frac{1}{2} = (1)(1)\cos\theta$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

จะได้ $\theta = 120°$

จาก $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$

$= (1)(1)\sin 120°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

38. จาก $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}0-5\\5-7\\-12-(-5)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\-2\\-7\end{bmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix}-3-0\\1-5\\-1-(-12)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\-4\\11\end{bmatrix}$

$\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix}2-(-3)\\3-1\\6-(-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\2\\7\end{bmatrix}$

$\overrightarrow{DA} = \begin{bmatrix}5-2\\7-3\\-5-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\4\\-11\end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ ขนานกัน และ $\overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{DA}$ ขนานกัน

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ เท่ากับ $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$

เนื่องจาก $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -2 & -7 \\ -3 & -4 & 11 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ -4 & 11 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ -3 & 11 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= \big((-2)(11)-(-7)(-4)\big)\vec{i} - \big((-5)(11)-(-7)(-3)\big)\vec{j} + \big((-5)(-4)-(-2)(-3)\big)\vec{k}$

$= -50\vec{i} + 76\vec{j} + 14\vec{k}$

จะได้ $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-50)^2+76^2+14^2} = \sqrt{8472} = 2\sqrt{2118}$

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ มีพื้นที่ $2\sqrt{2118}$ ตารางหน่วย

39. พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

จาก $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -4-2 \\ 1-(-3) \\ 5-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

และ $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 7-2 \\ -2-(-3) \\ 6-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= \big((4)(7)-(6)(1)\big)\vec{i} - \big((-6)(7)-(6)(5)\big)\vec{j} + \big((-6)(1)-(4)(5)\big)\vec{k}$

$= 22\vec{i} + 72\vec{j} - 26\vec{k}$

จะได้ $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{22^2+72^2+(-26)^2} = \sqrt{6344} = 2\sqrt{1586}$

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่ $\frac{1}{2}\left(2\sqrt{1586}\right) = \sqrt{1586}$ ตารางหน่วย

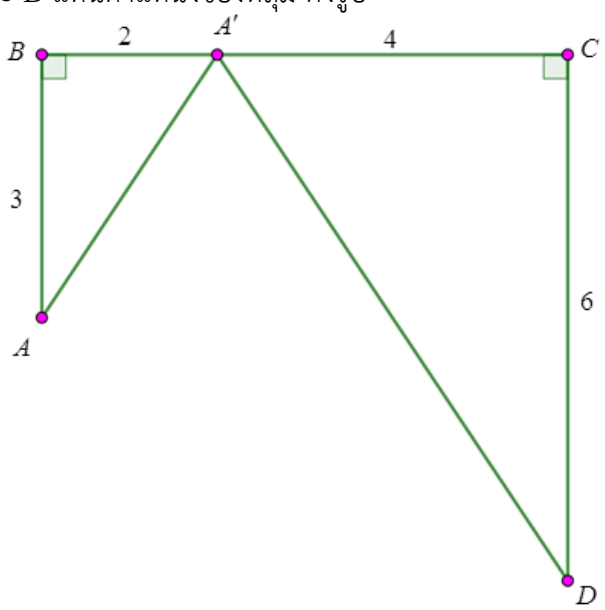
40. เนื่องจากปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ $\left|\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)\right|$

$$\begin{aligned}
\vec{v}\times\vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= \left((-1)(-1)-(1)(2)\right)\vec{i} - \left((-1)(-1)-(1)(3)\right)\vec{j} + \left((-1)(2)-(-1)(3)\right)\vec{k} \\
&= -\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}
\end{aligned}$$

จะได้ $$\begin{aligned}
\left|\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)\right| &= \left|\left(-2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}\right)\cdot\left(-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\right)\right| \\
&= \left|(-2)(-1)+(5)(2)+(3)(1)\right| \\
&= \left|2+10+3\right| \\
&= \left|15\right| \\
&= 15
\end{aligned}$$

ดังนั้น ทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานมีปริมาตร 15 ลูกบาศก์หน่วย

41. ให้ จุด B, C และ D แทนตำแหน่งของหลุม ดังรูป



จากรูป จะได้ว่า ลูกสนุกเกอร์จะลงหลุม D เมื่อ $B\hat{A}'A = C\hat{A}'D$

กำหนดให้ จุด A มีพิกัดเป็น $(0, 0)$ จะได้

จุด B มีพิกัดเป็น $(0, 3)$

จุด A' มีพิกัดเป็น $(2, 3)$

จุด C มีพิกัดเป็น $(6, 3)$

และ จุด D มีพิกัดเป็น $(6, -3)$

จะได้ $\overrightarrow{A'B} = \begin{bmatrix} 0-2 \\ 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\overrightarrow{A'A} = \begin{bmatrix} 0-2 \\ 0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$\left|\overrightarrow{A'B}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$ และ $\left|\overrightarrow{A'A}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{A'A} = (-2)(-2) + 0(-3) = 4$

จาก $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{A'A} = \left|\overrightarrow{A'B}\right|\left|\overrightarrow{A'A}\right| \cos B\hat{A}'A$

จะได้ $\cos B\hat{A}'A = \dfrac{\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{A'A}}{\left|\overrightarrow{A'B}\right|\left|\overrightarrow{A'A}\right|} = \dfrac{4}{2\sqrt{13}} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$

จะได้ $\overrightarrow{A'C} = \begin{bmatrix} 6-2 \\ 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\overrightarrow{A'D} = \begin{bmatrix} 6-2 \\ -3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}$

$\left|\overrightarrow{A'C}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$ และ $\left|\overrightarrow{A'D}\right| = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{A'D} = (4)(4) + 0(-6) = 16$

จาก $\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{A'D} = \left|\overrightarrow{A'C}\right|\left|\overrightarrow{A'D}\right| \cos C\hat{A}'D$

จะได้ $\cos C\hat{A}'D = \dfrac{\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{A'D}}{\left|\overrightarrow{A'C}\right|\left|\overrightarrow{A'D}\right|} = \dfrac{16}{(4)\left(2\sqrt{13}\right)} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$

นั่นคือ $\cos B\hat{A}'A = \cos C\hat{A}'D$

เนื่องจาก $0° < B\hat{A}'A < 90°$ และ $0° < C\hat{A}'D < 90°$

จะได้ $B\hat{A}'A = C\hat{A}'D$

ดังนั้น ลูกสนุกเกอร์สีแดงนี้จะลงหลุม และจะลงหลุม D เพราะขนาดของมุมที่ลูกสนุกเกอร์เคลื่อนไปในแนว AA' กระทบขอบโต๊ะที่ตำแหน่ง A' เท่ากับขนาดของมุมที่สะท้อนในแนว $A'D$ ทำกับขอบโต๊ะ

42. 1) จากรูป มุมระหว่าง $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เท่ากับ $45°$

จะได้ $|\vec{v}\times\vec{w}| = |\vec{v}||\vec{w}|\sin 45°$

$= (225)(450)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= 50,625\sqrt{2}$

จากรูป $\vec{v}\times\vec{w}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$

นั่นคือ มุมระหว่าง $\vec{v}\times\vec{w}$ และ $\vec{u}$ เท่ากับ $0°$

จะได้ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = |\vec{u}||\vec{v}\times\vec{w}|\cos 0°$

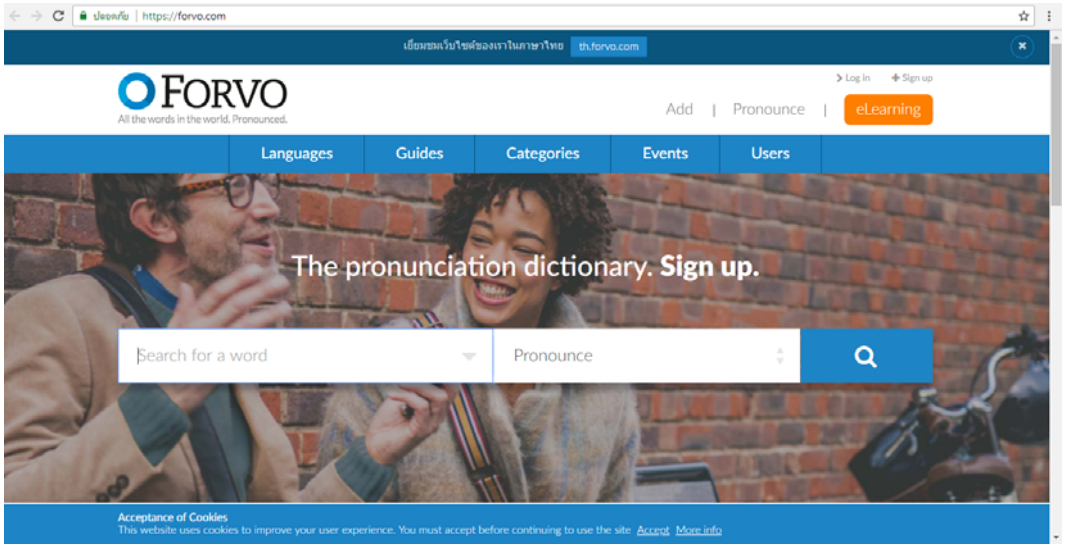
$= (180)\left(50,625\sqrt{2}\right)(1)$

$= 9,112,500\sqrt{2}$

2) จากข้อ 1) จะได้ความจุของตู้ปลานี้ คือ $9,112,500\sqrt{2}\div 1,000 = 9,112.5\sqrt{2}$ ลิตร

แหล่งเรียนรู้เพิ่มเติม

forvo.com เป็นเว็บไซต์ที่รวบรวมการออกเสียงคำในภาษาต่าง ๆ ก่อตั้งขึ้นเมื่อ ค.ศ. 2008 โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อพัฒนาการสื่อสารทางการพูด ผ่านการแลกเปลี่ยนการออกเสียงคำในภาษาต่าง ๆ ทั้งจากบุคคลที่เป็นเจ้าของภาษาและบุคคลที่ไม่ใช่เจ้าของภาษา forvo.com ได้รับคัดเลือกจากนิตยสาร Times ให้เป็น 50 เว็บไซต์ที่ดีที่สุดใน ค.ศ. 2013 (50 best websites of 2013) ปัจจุบันเว็บไซต์นี้เป็นฐานข้อมูลที่รวบรวมการออกเสียงที่ใหญ่ที่สุด มีคลิปเสียงที่แสดงการออกเสียงคำศัพท์ประมาณสี่ล้านคำในภาษาต่าง ๆ มากกว่า 330 ภาษา



ครูอาจใช้เว็บไซต์ forvo.com เพื่อศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับการออกเสียงคำศัพท์คณิตศาสตร์หรือชื่อนักคณิตศาสตร์ในภาษาอังกฤษหรือภาษาอื่น ๆ ที่ปรากฏในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ได้ เช่น periodic function ซึ่งเป็นคำศัพท์คณิตศาสตร์ในภาษาอังกฤษ หรือ Gustave Eiffel วิศวกรและสถาปนิกชาวฝรั่งเศส

บรรณานุกรม

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2558). *คู่มือครูรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2561). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 1 ตามผลการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *หนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริมศักยภาพคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 ระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์.* กรุงเทพฯ: พัฒนาคุณภาพวิชาการ.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *หนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริมศักยภาพคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เวกเตอร์.* กรุงเทพฯ: พัฒนาคุณภาพวิชาการ.

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน. (2560). *ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.

คณะผู้จัดทำ

คณะที่ปรึกษา

ศ. ดร.ชูกิจ ลิมปิจำนงค์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.ศรเทพ วรรณรัตน์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.วนิดา ธนประโยชน์ศักดิ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะผู้จัดทำคู่มือครู

นางสาวปฐมาภรณ์ อวชัย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวอัมริสา จันทนะศิริ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายพัฒนชัย รวิวรรณ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวภิญญดา กลับแก้ว	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.ศศิวรรณ เมลืองนนท์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.สุธารส นิลรอด	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.จิณณวัตร เจตน์จรุงกิจ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายทศธรรม เมขลา	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายณัฐพล อุดมเลิศสกุล	นักวิชาการอิสระ
ดร.ธนากร ปริญญาศาสตร์	มหาวิทยาลัยศิลปากร จังหวัดนครปฐม
นายวิจิต ยังจิตร	นักวิชาการอิสระ
นายวิฑิตพงศ์ พะวงษา	โรงเรียนสภาราชินี จังหวัดตรัง
นายสถิตพงษ์ เพ็ชรถึง	โรงเรียน มอ.วิทยานุสรณ์ จังหวัดสงขลา
นางสุธิดา นานช้า	โรงเรียนย่านตาขาวรัฐชนูปถัมภ์ จังหวัดตรัง

คณะผู้พิจารณาคู่มือครู

นายประสาท สอ้านวงศ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
รศ. ดร.สมพร สูตินันท์โอภาส	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจินตนา อารยะรังสฤษฏ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจำเริญ เจียวหวาน	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสุเทพ กิตติพิทักษ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ดร.สุพัตรา ผาติวิสันติ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.อลงกรณ์ ตั้งสงวนธรรม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

บรรณาธิการ

รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะทำงานฝ่ายเสริมวิชาการ

นางสาวขวัญใจ ภาสพันธุ์	โรงเรียนราชวินิตบางเขน กรุงเทพฯ
นายณรงค์ฤทธิ์ ฉายา	โรงเรียนสาธิตแห่งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ศูนย์วิจัยและพัฒนาการศึกษา กรุงเทพฯ
นายถนอมเกียรติ งานสกุล	โรงเรียนสตรีภูเก็ต จังหวัดภูเก็ต
นางนงนุช ผลทวี	โรงเรียนทับปุดวิทยา จังหวัดพังงา
นางมยุรี สาลีวงศ์	โรงเรียนสตรีสิริเกศ จังหวัดศรีสะเกษ
นางสาวศราญลักษณ์ บุตรรัตน์	โรงเรียนบางละมุง จังหวัดชลบุรี
นายศรัณย์ แสงนิลาวิวัฒน์	โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย เพชรบุรี จังหวัดเพชรบุรี
ว่าที่ร้อยตรีสามารถ วนาธรัตน์	โรงเรียนเฉลิมขวัญสตรี จังหวัดพิษณุโลก
นางศุภรา ทวรรณกุล	ข้าราชการบำนาญ
นายสุกิจ สมงาม	ข้าราชการบำนาญ
นางสุปราณี พ่วงพี	ข้าราชการบำนาญ
นายชัยรัตน์ สุนทรประพี	นักวิชาการอิสระ
ฝ่ายนวัตกรรมเพื่อการเรียนรู้	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปิยาภรณ์ ทองมาก	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ