



คณิตศาสตร์

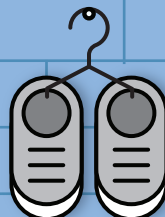
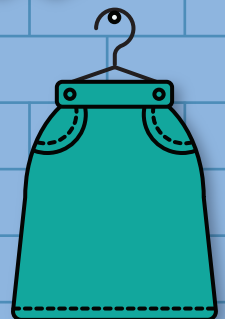
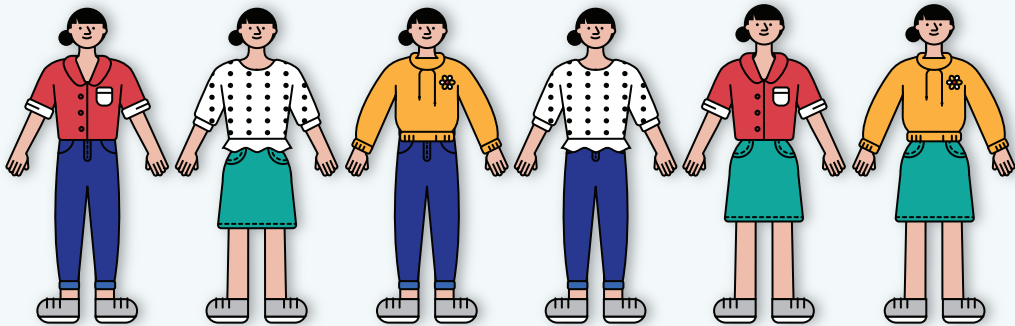
เล่ม ๒

๕

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑





คู่มือครู

รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๒

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) มีหน้าที่ในการพัฒนาหลักสูตร วิธีการเรียนรู้ การประเมินผล การจัดทำหนังสือเรียน คู่มือครู แบบฝึกทักษะ กิจกรรม และสื่อการเรียนรู้เพื่อใช้ประกอบการเรียนรู้ในกลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๒ นี้ จัดทำตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีเนื้อหาสาระ ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน การวิเคราะห์ความสอดคล้องของแบบฝึกหัดท้ายบทกับจุดมุ่งหมายประจำบท ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู ซึ่งเป็นความรู้ที่ครูควรทราบนอกเหนือจากเนื้อหาในหนังสือเรียน ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทพร้อมเฉลย รวมทั้งเฉลยแบบฝึกหัด ซึ่งสอดคล้องกับหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๒ ที่ต้องใช้ควบคู่กัน

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่า คู่มือครูเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ และเป็นส่วนสำคัญในการพัฒนาคุณภาพและมาตรฐานการศึกษา กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิ บุคลากรทางการศึกษา และหน่วยงานต่าง ๆ ที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำไว้ ณ โอกาสนี้



(ศาสตราจารย์ชูกิจ ลิมปิจำนงค์)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อต้องการพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ด้วยการลงมือปฏิบัติทำกิจกรรมและแก้ปัญหาที่หลากหลายเพื่อให้ผู้เรียนเกิดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งมีทักษะแห่งศตวรรษที่ ๒๑ สสวท. จึงได้จัดทำคู่มือครูประกอบการใช้หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๒ ที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตร เพื่อเป็นแนวทางให้โรงเรียนนำไปจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๒ นี้ ประกอบด้วย เนื้อหาสาระ ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน การวิเคราะห์ความสอดคล้องของแบบฝึกหัดท้ายบทกับจุดมุ่งหมายประจำบท ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครูซึ่งเป็นความรู้ที่ครูควรทราบนอกเหนือจากเนื้อหาในหนังสือเรียน ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทพร้อมเฉลย รวมทั้งเฉลยแบบฝึกหัด ซึ่งครูผู้สอนสามารถนำไปใช้เป็นแนวทางในการวางแผนการจัดการเรียนรู้ให้บรรลุจุดประสงค์ที่ตั้งไว้ โดยสามารถนำไปจัดกิจกรรมการเรียนรู้ได้ตามความเหมาะสมและความพร้อมของโรงเรียน ในการจัดทำคู่มือครูเล่มนี้ ได้รับความร่วมมือเป็นอย่างดีจาก ผู้ทรงคุณวุฒิ คณาจารย์ นักวิชาการอิสระ รวมทั้งครูผู้สอน นักวิชาการ จากสถาบัน และสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชน จึงขอขอบคุณมา ณ ที่นี้

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่า คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๒ นี้ จะเป็นประโยชน์แก่ผู้สอนและผู้ที่เกี่ยวข้องทุกฝ่าย ที่จะช่วยให้จัดการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้คู่มือครูเล่มนี้ มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

แนะนำการใช้คู่มือครู

ในหนังสือเล่มนี้แบ่งเป็น 3 บท ตามหนังสือเรียนหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 โดยแต่ละบทจะมีส่วนประกอบ ดังนี้



ตัวชี้วัด

ตัวชี้วัดระบุสิ่งที่นักเรียนพึงรู้และปฏิบัติได้ รวมทั้งคุณลักษณะของผู้เรียนในแต่ละ
ระดับชั้น ซึ่งสะท้อนถึงมาตรฐานการเรียนรู้ มีความเฉพาะเจาะจงและมีความเป็น
รูปธรรม นำไปใช้ในการกำหนดเนื้อหา จัดทำหน่วยการเรียนรู้ จัดการเรียนรู้การสอน
และเป็นเกณฑ์สำคัญสำหรับการวัดประเมินผลเพื่อตรวจสอบคุณภาพผู้เรียน



จุดมุ่งหมาย

เป้าหมายที่นักเรียนควรไปถึงหลังจากเรียนจบบทนี้



ความรู้ก่อนหน้า

ความรู้ที่นักเรียนจำเป็นต้องมีก่อนที่จะเรียนบทนี้



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

ประเด็นเกี่ยวกับเนื้อหาที่ครูควรเน้นย้ำกับนักเรียน ประเด็นเกี่ยวกับเนื้อหาที่ครูควรระมัดระวัง จุดประสงค์ของตัวอย่างที่นำเสนอในหนังสือเรียน เนื้อหาที่ควรทบทวนก่อนสอนเนื้อหาใหม่ และประเด็นที่ครูควรตระหนักในการสอน



ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

ประเด็นที่นักเรียนมักเข้าใจผิดเกี่ยวกับเนื้อหา



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

ประเด็นที่ครูควรทราบเกี่ยวกับแบบฝึกหัด เช่น จุดมุ่งหมายของแบบฝึกหัด เนื้อหาที่ควรทบทวนก่อนทำแบบฝึกหัด และเรื่องที่ครูควรให้ความสำคัญในการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน



กิจกรรมในคู่มือครู

กิจกรรมที่คู่มือครูเล่มนี้เสนอแนะไว้ให้ครูนำไปใช้ในชั้นเรียน ประกอบด้วยกิจกรรมนำเข้าสู่บทเรียน ที่ใช้เพื่อตรวจสอบความรู้ก่อนหน้าที่นักเรียนจำเป็นต้องทราบก่อนเรียนเนื้อหาใหม่ และกิจกรรมที่ใช้สำหรับสร้างความคิดรวบยอดในเนื้อหา โดยหลังจากทำกิจกรรมแล้ว ครูควรเชื่อมโยงผลที่ได้จากการทำกิจกรรมกับความคิดรวบยอดที่ต้องการเน้น ทั้งนี้ ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมเหล่านี้ด้วยตนเอง



กิจกรรมในหนังสือเรียน

กิจกรรมที่นักเรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม (learning and innovation skills) ที่จำเป็นสำหรับศตวรรษที่ 21 อันได้แก่ การคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม (creative and innovation) การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา (critical thinking and problem solving) การสื่อสาร (communication) และการร่วมมือ (collaboration)



เฉลยกิจกรรมในหนังสือเรียน

เฉลยคำตอบหรือตัวอย่างคำตอบของกิจกรรมในหนังสือเรียน



แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน

ตัวอย่างการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน ที่มีขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ซึ่งเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้และพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

สารบัญ		บทที่ 1 – 2
บทที่	เนื้อหา	หน้า
1 $i^2 = -1$ จำนวนเชิงซ้อน	บทที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน	1
	1.1 เนื้อหาสาระ	3
	1.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน	10
	1.3 แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน	27
	1.4 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน	41
	1.5 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท	42
	1.6 ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู	44
	1.7 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท และเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท	58
2  หลักการนับเบื้องต้น	บทที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น	66
	2.1 เนื้อหาสาระ	68
	2.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน	70
	2.3 แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน	109
	2.4 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน	112
	2.5 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท	113
	2.6 ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู	116
	2.7 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท และเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท	120

สารบัญ	บทที่ 3	
บทที่	เนื้อหา	หน้า
3  ความน่าจะเป็น	บทที่ 3 ความน่าจะเป็น	130
	3.1 เนื้อหาสาระ	132
	3.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน	134
	3.3 แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน	142
	3.4 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน	158
	3.5 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท	159
	3.6 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท	162
	และเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท	
เฉลยแบบฝึกหัด		174
	บทที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน	174
	บทที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น	280
	บทที่ 3 ความน่าจะเป็น	326
	แหล่งเรียนรู้เพิ่มเติม	398
	บรรณานุกรม	399
	คณะผู้จัดทำ	400

บทที่ 1

จำนวนเชิงซ้อน

วิวัฒนาการของจำนวนในระบบจำนวนจริง แสดงให้เห็นว่า จำนวนต่าง ๆ เกิดขึ้นจากความจำเป็นของมนุษย์ในการที่จะแก้ปัญหา จำนวนใหม่ที่เกิดขึ้นนั้น นอกจากจะทำให้แก้ปัญหาตามต้องการได้แล้ว ยังก่อให้เกิดความรู้และทฤษฎีใหม่ ๆ อีกด้วย จำนวนเชิงซ้อนเป็นจำนวนที่สร้างจากการขยายระบบจำนวนจริง นอกจากจำนวนเชิงซ้อนจะมีประโยชน์ทางพีชคณิตแล้ว จำนวนเชิงซ้อนยังสามารถนำไปประยุกต์อย่างกว้างขวางกับสาขาต่าง ๆ เช่น วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ โดยในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ได้นำเสนอบทนิยามของจำนวนเชิงซ้อน สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน และสมการพหุนามตัวแปรเดียว

ในบทเรียนนี้มุ่งให้นักเรียนบรรลุผลการเรียนรู้ตามสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม และบรรลุจุดมุ่งหมายดังต่อไปนี้



ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

ผลการเรียนรู้

- เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนและใช้สมบัติของจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา
- หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1
- แก้สมการพหุนามตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสี่ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

- จำนวนเชิงซ้อนและสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน
- จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว
- รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1
- สมการพหุนามตัวแปรเดียว



จุดมุ่งหมาย

1. ใช้ความรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา
2. ทหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน
3. ทหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1
4. แก้สมการพหุนามตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสี่ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา



ความรู้ก่อนหน้า

- จำนวนจริง
- เรขาคณิตวิเคราะห์
- ฟังก์ชันตรีโกณมิติ



ipst.me/8448

1.1 เนื้อหาสาระ

1. บทนิยาม 1

จำนวนเชิงซ้อน คือ คู่อันดับ (a, b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และกำหนดการเท่ากัน การบวก และการคูณของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ (c, d)

1) การเท่ากัน

$$(a, b) = (c, d) \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = c \text{ และ } b = d$$

2) การบวก

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

3) การคูณ

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

อาจเขียนแทน $(a, b) \cdot (c, d)$ ด้วย $(a, b)(c, d)$ และเขียนแทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน ทั้งหมดด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{C}$

2. เมื่อเขียนแทนจำนวนเชิงซ้อน $(0, 1)$ ด้วยสัญลักษณ์ i จะได้ว่า $i^2 = -1$

3. จำนวนเชิงซ้อน (a, b) สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $a + bi$

4. บทนิยาม 2

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = (a, b)$ หรือ $z = a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

เรียก a ว่า ส่วนจริง ของ z และเขียนแทนด้วย $\text{Re}(z)$

เรียก b ว่า ส่วนจินตภาพ ของ z และเขียนแทนด้วย $\text{Im}(z)$

5. จำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจินตภาพเป็นศูนย์ คือ จำนวนจริง

จำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็นศูนย์แต่ส่วนจินตภาพไม่เป็นศูนย์ เรียกว่า จำนวนจินตภาพแท้

6. เวกเตอร์การบวก ในระบบจำนวนเชิงซ้อน คือ $(0, 0)$ หรือ 0

7. ตัวผกผันการบวก ของจำนวนเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วย $-z$

เมื่อ $z = a + bi$ จะได้ $-z = -a - bi$

8. บทนิยาม 3

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z และ w จะได้ว่า $z - w = z + (-w)$

9. เวกเตอร์การคูณ ในระบบจำนวนเชิงซ้อน คือ $(1, 0)$ หรือ 1

10. ตัวผกผันการคูณ ของจำนวนเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วย z^{-1}

เมื่อ $z = a + bi$ และ $z \neq 0$ จะได้ว่า $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$

11. บทนิยาม 4

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z และ w ซึ่ง $w \neq 0$ จะได้ว่า $z \div w = zw^{-1}$ และเขียนแทน $z \div w$ ด้วย $\frac{z}{w}$

12. ระบบจำนวนเชิงซ้อนสอดคล้องกับสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณ ซึ่งเรียกว่า สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน สามารถสรุปได้ดังนี้
ให้ z, z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

สมบัติ	การบวก	การคูณ
สมบัติปิด	1) $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$	6) $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$
สมบัติการสลับที่	2) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	7) $z_1 z_2 = z_2 z_1$
สมบัติการเปลี่ยนหมู่	3) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$	8) $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	4) $z + 0 = z = 0 + z$ เรียก 0 ว่า เอกลักษณ์การบวก	9) $z \cdot 1 = z = 1 \cdot z$ เรียก 1 ว่า เอกลักษณ์การคูณ
สมบัติการมีตัวผกผัน	5) $z + (-z) = 0 = (-z) + z$ เรียก $-z$ ว่า ตัวผกผันการบวก หรืออินเวอร์สการบวกของ z	10) ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $z \cdot z^{-1} = 1 = z^{-1} \cdot z$ เรียก z^{-1} ว่า ตัวผกผันการคูณ หรืออินเวอร์สการคูณของ z
สมบัติการแจกแจง	11) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$	

13. บทนิยาม 5

ให้ $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

สังยุค ของ z คือ $a - bi$

14. สังยุคของ z เขียนแทนด้วย $\bar{z}$ ซึ่ง $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

15. ทฤษฎีบท 1

ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

$$1) \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ และ } \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$2) \overline{\bar{z}} = z$$

$$3) \frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \text{ เมื่อ } z \neq 0$$

$$4) \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$5) \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$6) \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$7) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \text{ เมื่อ } z_2 \neq 0$$

16. บทนิยาม 6

ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ รากที่สองของ z คือ จำนวนเชิงซ้อน w ซึ่ง $w^2 = z$

17. ถ้า w เป็นรากที่สองของ z แล้ว $-w$ จะเป็นรากที่สองของ z ด้วย และรากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่ศูนย์จะมีเพียงสองจำนวนเท่านั้น

18. ทฤษฎีบท 2

กำหนดจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ และให้ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ จะได้ว่ารากที่สองของ z คือ

$$\pm \left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + \sqrt{\frac{r-a}{2}} i \right) \text{ เมื่อ } b \geq 0$$

$$\pm \left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} - \sqrt{\frac{r-a}{2}} i \right) \text{ เมื่อ } b < 0$$

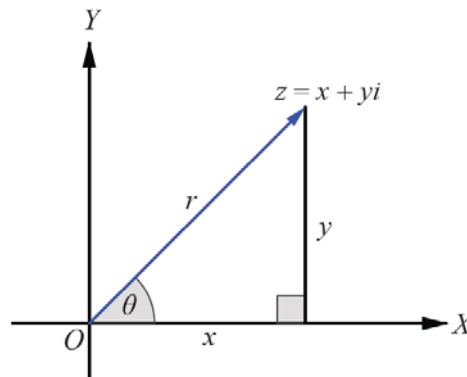
19. ทฤษฎีบท 3

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$ จะได้ว่าคำตอบของสมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ คือ

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ เมื่อ } b^2 - 4ac \geq 0$$

$$\text{และ } \frac{-b \pm \sqrt{|b^2 - 4ac|} i}{2a} \text{ เมื่อ } b^2 - 4ac < 0$$

20. เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อนอาจเขียนอยู่ในรูปของคู่อันดับ (a, b) หรือในรูป $a+bi$ โดยที่ a เป็นส่วนจริง และ b เป็นส่วนจินตภาพ ดังนั้น อาจแทนจำนวนเชิงซ้อน (a, b) ใด ๆ ด้วยจุดในระนาบได้เช่นเดียวกับการแทนคู่อันดับในความสัมพันธ์ใด ๆ ด้วยจุดในระนาบในระบบพิกัดฉาก และเรียกแกน X ว่า **แกนจริง** เรียกแกน Y ว่า **แกนจินตภาพ** และเรียกระนาบนี้ว่า **ระนาบเชิงซ้อน**
21. **บทนิยาม 7**
ค่าสัมบูรณ์ ของจำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ คือ จำนวนจริง $\sqrt{a^2+b^2}$
 นั่นคือ $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$
22. ค่าสัมบูรณ์ของ $a+bi$ คือ ระยะทางระหว่างจุด $(0,0)$ และ (a, b)
23. **ทฤษฎีบท 4**
 ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า
- 1) $|z|^2 = z\bar{z}$
 - 2) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
 - 3) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ เมื่อ $z \neq 0$
 - 4) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
 - 5) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
 - 6) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$
24. ถ้า $z_1 = a+bi$ และ $z_2 = c+di$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้วค่าสัมบูรณ์ของ $z_1 - z_2$ หรือ $|z_1 - z_2|$ หมายถึง ระยะทางระหว่างจุด $(0, 0)$ และจุดที่แสดงจำนวนเชิงซ้อน $z_1 - z_2$ ในระนาบเชิงซ้อน
25. **รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน**
 ถ้า $z = x + yi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ จะสามารถเขียนแสดง z ด้วยเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อนได้ดังนี้



เมื่อกำหนดให้ r แทนระยะทางระหว่างจุดกำเนิด O กับ z และ θ เป็นขนาดของมุม ซึ่งถ้าวัดมุมทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X ทางด้านบวกไปยัง $\overline{Oz}$ จะได้ $\theta > 0$ และถ้าวัดมุมตามเข็มนาฬิกาจากแกน X ทางด้านบวกไปยัง $\overline{Oz}$ จะได้ $\theta < 0$ และได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$x = r \cos \theta \quad \text{และ} \quad y = r \sin \theta$$

นอกจากนี้ ยังได้ความสัมพันธ์ที่ทำให้หา r และ θ จาก x และ y ดังนี้

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{และ} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad \text{เมื่อ } x \neq 0$$

ดังนั้น อาจเขียนจำนวนเชิงซ้อน z ในรูป r และ θ ได้ดังนี้

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เรียกว่า **รูปเชิงขั้ว** ของ z

และเรียก θ ว่า **อาร์กิวเมนต์** ของ z

26. สำหรับทุกจำนวนเต็ม k ถ้า θ เป็นอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน z แล้ว $\theta + 2k\pi$ เป็นอาร์กิวเมนต์ของ z ด้วย
27. ให้ $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ถ้า $z_1 = z_2$ จะได้ว่า $|z_1| = |z_2|$ นั่นคือ $r_1 = r_2$ และเนื่องจาก $\cos \theta_1 = \cos \theta_2$ และ $\sin \theta_1 = \sin \theta_2$ ก็ต่อเมื่อ $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $z_1 = z_2$ ก็ต่อเมื่อ $r_1 = r_2$ และ $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

28. ทฤษฎีบท 5

ให้ $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ โดยที่ $z_1 \neq 0$ และ $z_2 \neq 0$ จะได้ว่า

$$1) \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$2) \quad \frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2} (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)$$

$$3) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

$$4) \quad \bar{z}_1 = r_1 (\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1))$$

29. ทฤษฎีบท 6 ทฤษฎีบทของเดอมัวร์

ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

30. ทฤษฎีบท 7

ถ้า $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ และ n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

31. ทฤษฎีบท 8

ถ้า $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ แล้ว รากที่ n ของ w มีทั้งหมด n รากที่แตกต่างกัน คือ

$$z = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right) \text{ เมื่อ } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

32. ทฤษฎีบท 9 ทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต

ให้ $p(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและมีดีกรีมากกว่าศูนย์

จะได้ว่าสมการ $p(x) = 0$ จะมีคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อยหนึ่งคำตอบ

33. ทฤษฎีบท 10 ทฤษฎีบทตัวประกอบ

ให้ $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ เป็นพหุนาม โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_n \neq 0$ สำหรับจำนวนจริง c ใด ๆ จะได้ว่า

พหุนาม $p(x)$ มี $x - c$ เป็นตัวประกอบ ก็ต่อเมื่อ $p(c) = 0$

34. ทฤษฎีบท 11 ทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ

ให้ $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ เป็นพหุนาม โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a_n \neq 0$

ถ้า $x - \frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $p(x)$ โดยที่ m และ k เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $m \neq 0$ และ ห.ร.ม. ของ m และ k เท่ากับ 1 แล้ว m หาร a_n ลงตัว และ k หาร a_0 ลงตัว

35. ทฤษฎีบท 12

ให้ $p(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและมีดีกรี n เมื่อ $n \geq 1$ จะได้ว่าสมการ $p(x) = 0$ จะมีคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด n คำตอบ เมื่อนับคำตอบที่ซ้ำกัน

36. ทฤษฎีบท 13

ถ้าจำนวนเชิงซ้อน z เป็นคำตอบของสมการพหุนาม

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริง แล้ว $\bar{z}$ จะเป็นคำตอบของสมการพหุนามนี้

1.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน

จำนวนเชิงซ้อน



กิจกรรม : แก้มการพหุนาม

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน โดยนักเรียนจะได้เห็นความจำเป็นของการขยายระบบจำนวนจริงเป็นระบบจำนวนเชิงซ้อนจากการหาคำตอบของสมการพหุนาม

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 – 4 คน แบบละความสามารถ และให้นักเรียนแต่ละกลุ่มหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการพหุนาม $x-3=0$, $x+2=0$, $2x-1=0$ และ $x^2-7=0$

แนวคำตอบ

- คำตอบของสมการพหุนาม $x-3=0$ คือ 3
 - คำตอบของสมการพหุนาม $x+2=0$ คือ -2
 - คำตอบของสมการพหุนาม $2x-1=0$ คือ $\frac{1}{2}$
 - คำตอบของสมการพหุนาม $x^2-7=0$ คือ $\sqrt{7}$ และ $-\sqrt{7}$
2. จากคำตอบที่ได้ในข้อ 1 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบของสมการพหุนามที่กำหนดให้ว่าเป็นสมาชิกของเซตใด

แนวคำตอบ

คำตอบของสมการพหุนามที่กำหนดให้เป็นสมาชิกของเซตของจำนวนจริง

3. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มหาคำตอบของสมการพหุนาม $x^2 + 1 = 0$ และอภิปรายว่า สมการดังกล่าวมีคำตอบเป็นจำนวนจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

แนวคำตอบ

เนื่องจาก $x^2 \geq 0$ จะได้ว่า $x^2 + 1 > 0$ ดังนั้น ไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบของสมการพหุนาม $x^2 + 1 = 0$

หมายเหตุ

- เมื่อจบกิจกรรมนี้แล้ว ครูควรเชื่อมโยงการแก้สมการพหุนามในกิจกรรมนี้กับเนื้อหา เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน โดยอธิบายว่านักคณิตศาสตร์สร้างเซตของจำนวนในระบบใหม่ที่เรียกว่า ระบบจำนวนเชิงซ้อน เพื่อให้สมการพหุนามที่ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง เช่น $x^2 + 1 = 0$ ได้มีคำตอบ โดยเซตของจำนวนเชิงซ้อนมีเซตของจำนวนจริงเป็นสับเซต



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- (a, b) เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนหลายอย่าง เช่น คู่อันดับ ช่วง แต่ในบทนี้จะหมายถึง คู่อันดับซึ่งแสดงจำนวนเชิงซ้อน (a, b) โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง เรียก a ว่าส่วนจริง และเรียก b ว่าส่วนจินตภาพ
- เซตของจำนวนจริงเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อน เนื่องจากจำนวนจริง คือ จำนวนเชิงซ้อนซึ่งมีส่วนจินตภาพเป็น 0



ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

- นักเรียนมักเข้าใจผิดว่า ส่วนจินตภาพของ $a + bi$ คือ bi ซึ่งครูควรเชื่อมโยงการเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi$ ด้วย (a, b) และนักเรียนจะสังเกตได้ว่าส่วนจินตภาพ คือ b
- นักเรียนมักเข้าใจผิดว่า สามารถนำจำนวนเชิงซ้อนมาเปรียบเทียบกับได้ว่าจำนวนใดมากกว่าหรือน้อยกว่ากัน

สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ระบบจำนวนเชิงซ้อนมีเอกลักษณ์การบวก คือ $(0, 0)$ และเอกลักษณ์การคูณ คือ $(1, 0)$ แต่สำหรับระบบจำนวนจริงนั้น มีเอกลักษณ์การบวก คือ 0 และเอกลักษณ์การคูณ คือ 1
- บทนิยามเกี่ยวกับการลบและการหารจำนวนเชิงซ้อนนิยามเช่นเดียวกับการลบและการหารจำนวนจริง นั่นคือ การลบคือการบวกด้วยตัวผกผันการบวกของตัวลบ และการหารคือการคูณด้วยตัวผกผันการคูณของตัวหาร



ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

นักเรียนมักสับสนว่าตัวผกผันการบวกของ z และสังยุคของ z เป็นจำนวนเดียวกัน ดังนั้น ในการจัดการเรียนการสอนครูควรให้ความสำคัญกับสมบัติการมีตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน และบทนิยามของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน โดยจะเห็นว่า สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ ตัวผกผันการบวกของ z คือ $-z = -a - bi$ แต่สังยุคของ z คือ $\bar{z} = a - bi$ และ $-z = \bar{z}$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน เช่น แบบฝึกหัด 1.2 ข้อ 5 ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนใช้ทฤษฎีบท 1 สังยุคของจำนวนเชิงซ้อนช่วยในการแก้ปัญหา ดังแสดงในตัวอย่างที่ 9

รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

นักเรียนได้ศึกษามาแล้วในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 1 เกี่ยวกับคำตอบของสมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a \neq 0$ ว่ามีคำตอบเป็นจำนวนจริงก็ต่อเมื่อ $b^2 - 4ac \geq 0$ และไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริงเมื่อ $b^2 - 4ac < 0$ แต่จากทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า ทุกสมการกำลังสองมีคำตอบเสมอ แม้ว่า $b^2 - 4ac < 0$

กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- จากบทนิยามของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน ครูสามารถใช้รูปที่ 1 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 บทที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน เพื่ออธิบายว่า ค่าสัมบูรณ์ของ $3 + 2i$ คือ ระยะทางระหว่างจุด $(0, 0)$ และจุด $(3, 2)$ หรือคือ ขนาดของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ได้
- จากที่นักเรียนได้ศึกษามาแล้วว่า $|z_1 - z_2|$ คือ ระยะทางระหว่างจุด $(0, 0)$ และจุดที่แสดงจำนวนเชิงซ้อน $z_1 - z_2$ ในระนาบเชิงซ้อน ครูควรอธิบายเพิ่มเติมว่า $|z_1 - z_2|$ หมายถึง ระยะทางระหว่างจุด z_1 และ z_2 ในระนาบเชิงซ้อน รายละเอียดดังแสดงในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2

- การเขียนกราฟแสดงเซตของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนที่มีระยะห่างจาก z_0 น้อยกว่าหรือเท่ากับ r เมื่อ $z = x + yi$, $z_0 = c + di$ และ r เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่งคือการเขียนกราฟของ $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$ ในระนาบเชิงซ้อน ดังแสดงในรูปที่ 3 นั้น ครูอาจเชื่อมโยงกับสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และรัศมียาว r หน่วย คือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ดังนี้

ให้ $z = x + yi$ และ $z_0 = c + di$ ซึ่ง $|z - z_0| \leq r$

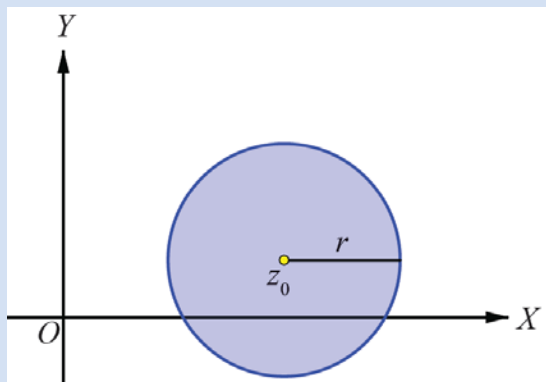
$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad |z - z_0| &= |(x + yi) - (c + di)| \\ &= |(x - c) + (y - d)i| \\ &= \sqrt{(x - c)^2 + (y - d)^2} \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad |z - z_0|^2 = (x - c)^2 + (y - d)^2$$

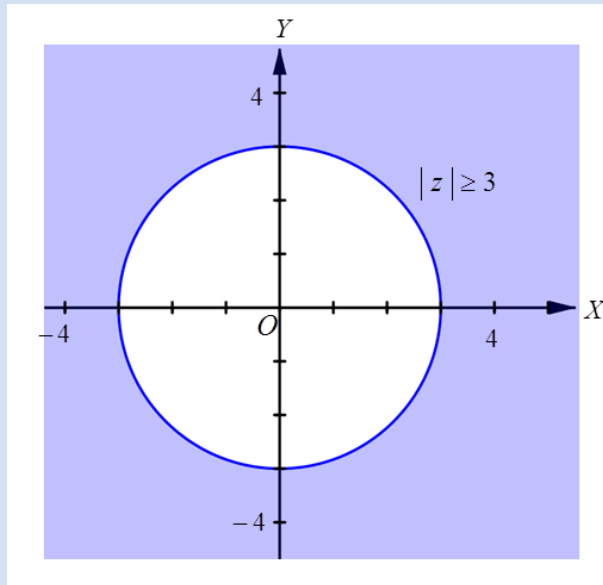
เนื่องจาก $|z - z_0| \leq r$ จะได้ $|z - z_0|^2 \leq r^2$

$$\text{ดังนั้น} \quad (x - c)^2 + (y - d)^2 \leq r^2 \quad \text{----- (1)}$$

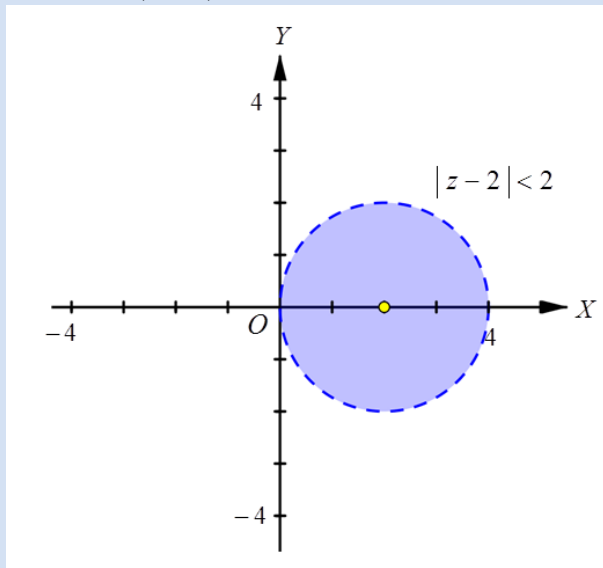
เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ (1) กับสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม จะได้ว่าคำตอบของสมการ (1) เป็นเซตของจุดทั้งหมดที่อยู่บนเส้นรอบวงและอยู่ภายในวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (c, d) และรัศมียาว r หน่วย ซึ่งเขียนกราฟได้ดังรูป



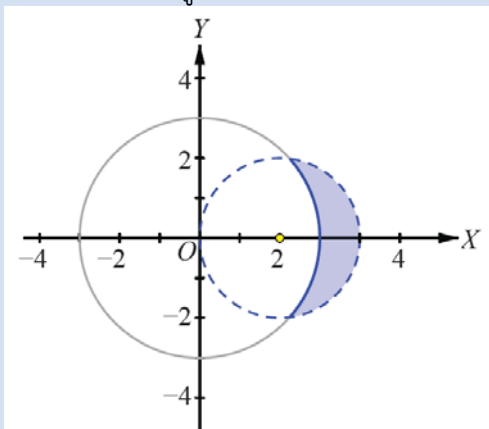
- ในตัวอย่างที่ 15 ครูอาจอธิบายเพิ่มเติมในประเด็นต่อไปนี้
 - 1) การเขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อนเพื่อแก้ปัญหา ได้ดังนี้
 - o เขียนกราฟของ $|z| \geq 3$



- o เขียนกราฟของ $|z-2| < 2$ ในระนาบเดียวกันกับกราฟของ $|z| \geq 3$



o แสดงบริเวณที่ซ้อนทับกันดังรูปในตัวอย่างที่ 15



2) การแก้ปัญหาโดยเปรียบเทียบเกี่ยวกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม ดังนี้

ให้ $z_1 = x_1 + y_1i$ ซึ่ง $|z_1| \geq 3$

จะได้

$$|z_1| = |(x_1 + y_1i)|$$

นั่นคือ

$$|z_1|^2 = x_1^2 + y_1^2$$

เนื่องจาก $|z| \geq 3$ จะได้ $|z_1|^2 \geq 9$

ดังนั้น

$$x_1^2 + y_1^2 \geq 9 \quad \text{----- (1)}$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (1) กับสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม จะได้ว่าคำตอบของสมการ (1) เป็นเซตของจุดทั้งหมดที่อยู่บนเส้นรอบวงและอยู่ภายในวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ และรัศมียาว 3 หน่วย

ให้ $z_2 = x_2 + y_2i$ ซึ่ง $|z_2 - 2| < 2$

จะได้

$$\begin{aligned} |z_2 - 2| &= |(x_2 + y_2i) - 2| \\ &= |(x_2 - 2) + y_2i| \\ &= \sqrt{(x_2 - 2)^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

นั่นคือ

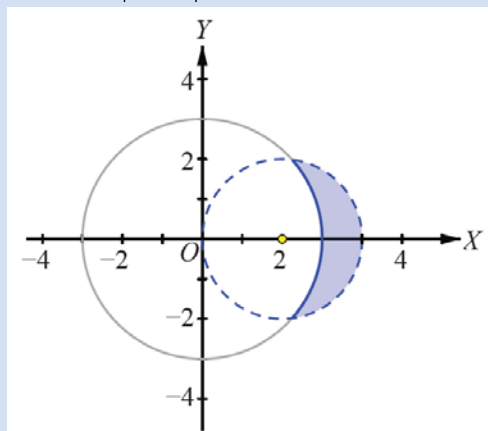
$$|z_2 - 2|^2 = (x_2 - 2)^2 + y_2^2$$

เนื่องจาก $|z_2 - 2| < 2$ จะได้ $|z_2 - 2|^2 < 4$

$$\text{ดังนั้น } (x-2)^2 + y^2 < 4 \quad \text{---- (2)}$$

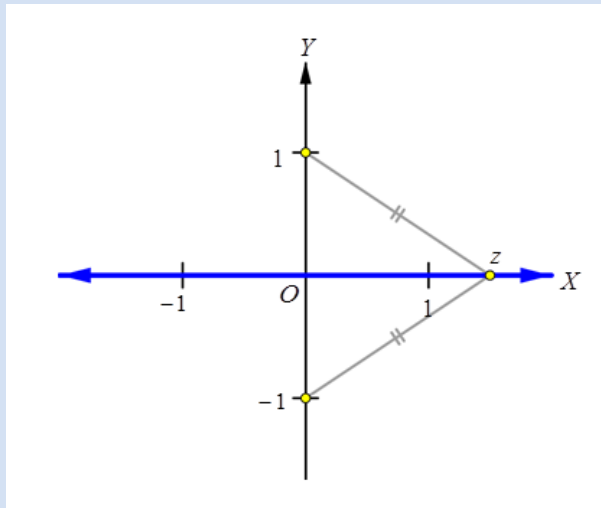
เมื่อเปรียบเทียบอสมการ (2) กับสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม จะได้ว่าคำตอบของอสมการ (2) เป็นเซตของจุดทั้งหมดที่อยู่ภายในวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, 0)$ และรัศมียาว 2 หน่วย

ดังนั้น กราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $|z| \geq 3$ และอสมการ $|z - 2| < 2$ คือพื้นที่ที่ซ้อนทับกัน ซึ่งเขียนกราฟได้ดังรูป

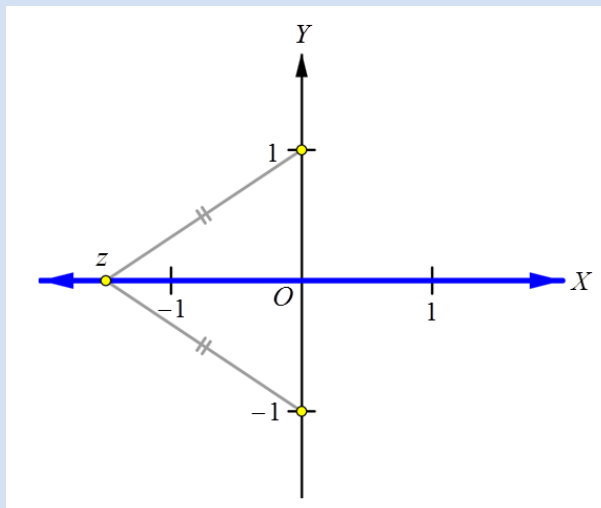


- ในตัวอย่างที่ 16 ครูอาจอธิบายเพิ่มเติมในประเด็นต่อไปนี้

- 1) จากกราฟที่แสดงในตัวอย่างที่ 16 ครูให้นักเรียนลงจุดหนึ่งจุดบนแกนจริง และหาระยะห่างของจุดนั้นกับจุด $(0, 1)$ ซึ่งเป็นจุดแทน i และจุด $(0, -1)$ ซึ่งเป็นจุดแทน $-i$ แล้วเปรียบเทียบกับระยะห่างระหว่างจุดนั้นกับจุด $(0, 1)$ และระหว่างจุดนั้นกับจุด $(0, -1)$ เช่น



หรือ



- 2) ครูอาจยกตัวอย่างการใช้ความรู้ทางพีชคณิตเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน ในการพิจารณาก่อนเขียนกราฟ ซึ่งได้ดังนี้

ให้ $z = x + yi$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง

จาก $|z + i| = |z - i|$

จะได้ $|(x + yi) + i| = |(x + yi) - i|$

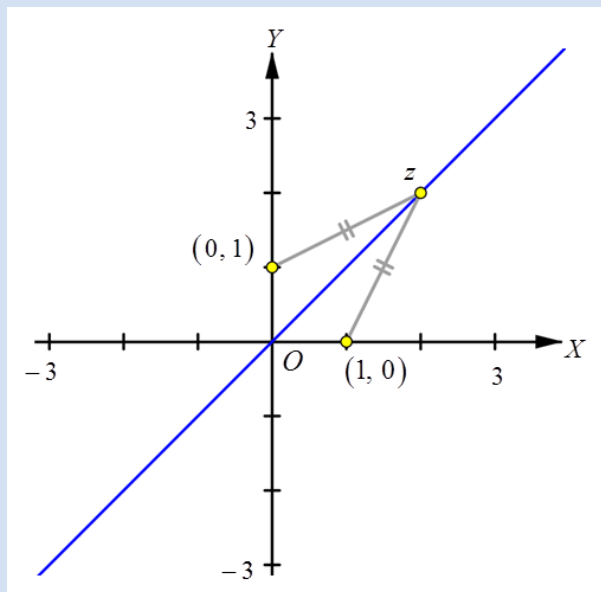
$$|x + (y+1)i| = |x + (y-1)i|$$

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + (y+1)^2} &= \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \\ x^2 + (y+1)^2 &= x^2 + (y-1)^2 \\ x^2 + y^2 + 2y + 1 &= x^2 + y^2 - 2y + 1 \\ y &= -y \\ y &= 0\end{aligned}$$

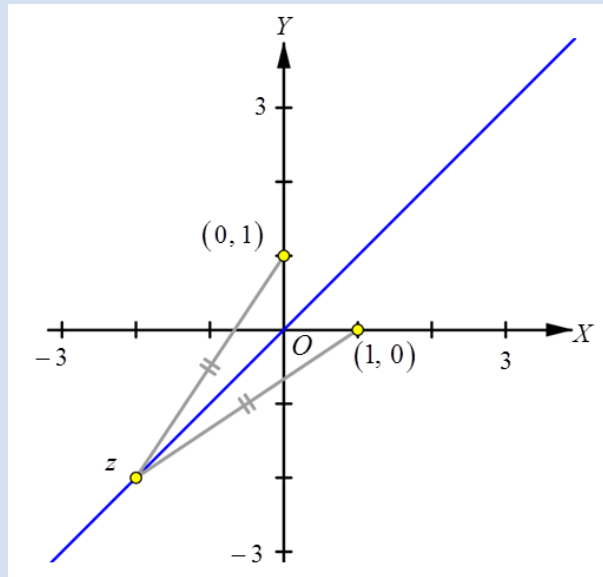
นั่นคือ

ดังนั้น $z = x + 0i$ หรือ $z = x$

- ในตัวอย่างที่ 17 ครูอาจอธิบายเพิ่มเติมในทำนองเดียวกับตัวอย่างที่ 16 ในประเด็นต่อไปนี้
 - 1) จากกราฟที่แสดงในตัวอย่างที่ 17 ครูให้นักเรียนลงจุดหนึ่งจุดบนเส้นตรง $y = x$ และให้นักเรียนหาระยะห่างของจุดนั้นกับจุด $(0, 1)$ ซึ่งเป็นจุดแทน i และจุด $(1, 0)$ แล้วเปรียบเทียบกับระยะห่างระหว่างจุดนั้นกับจุด $(0, 1)$ และระหว่างจุดนั้นกับจุด $(1, 0)$ เช่น



หรือ



- 2) ครูอาจยกตัวอย่างการพิจารณาสมการที่กำหนดให้โดยใช้ความรู้ทางพีชคณิตเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนก่อนเขียนกราฟ ได้ดังนี้
ให้ $z = x + yi$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง

$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad |z - i| &= |z - 1| \\ \text{จะได้} \quad |(x + yi) - i| &= |(x + yi) - 1| \\ |x + (y - 1)i| &= |(x - 1) + yi| \\ \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} &= \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \\ x^2 + (y - 1)^2 &= (x - 1)^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 - 2y + 1 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 \end{aligned}$$

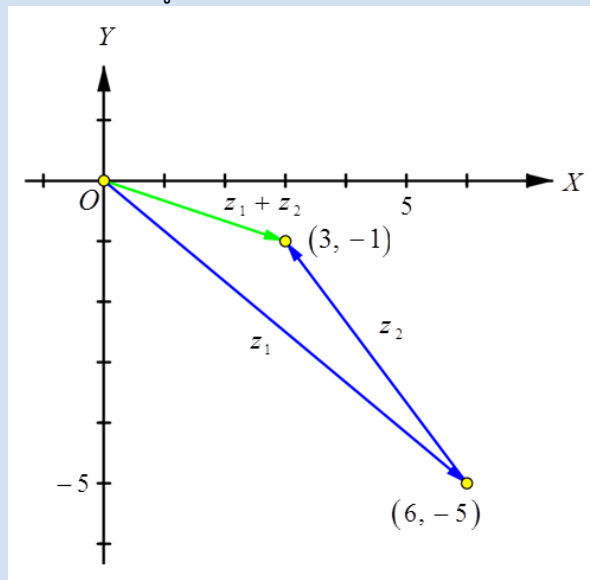
$$\text{นั่นคือ} \quad y = x$$

$$\text{ดังนั้น } z = x + xi \text{ หรือ } z = y + yi$$

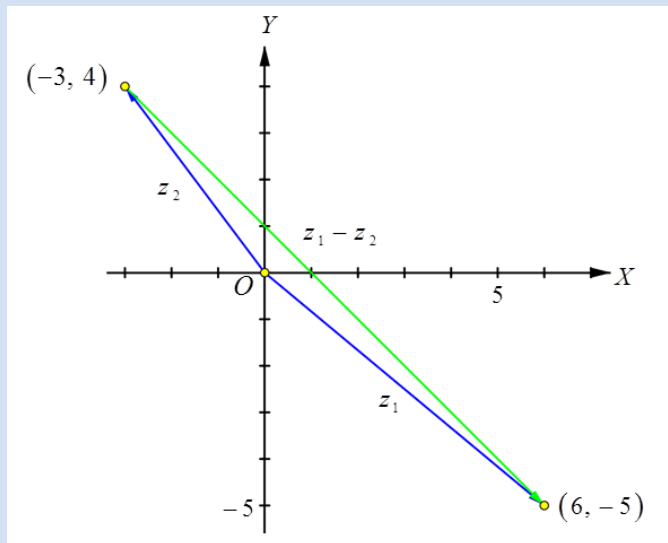


ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

- การเขียนกราฟแสดงผลบวกหรือผลต่างของจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวน ในแบบฝึกหัด 1.4 ข้อ 3 นักเรียนอาจใช้ความรู้เกี่ยวกับการหาผลบวกหรือผลต่างของเวกเตอร์ได้ เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ อาจแทนด้วยเวกเตอร์ที่มีจุด $(0,0)$ เป็นจุดเริ่มต้น และจุด (a,b) เป็นจุดสิ้นสุด ในกรณีนี้เมื่อ $z_1=6-5i$ และ $z_2=-3+4i$ จะเขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อน z_1+z_2 ได้โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับการหาผลบวกของเวกเตอร์ได้ ดังนี้



และเขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อน $z_1 - z_2$ ได้โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับการหาผลลบของเวกเตอร์ได้ ดังนี้



รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ในการหาอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน เพื่อเขียนแสดงจำนวนเชิงซ้อน $z = x + yi$ ในรูปเชิงขั้ว ครูควรเน้นย้ำให้นักเรียนพิจารณาว่า จำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้อยู่ในจุดภาคใด
- สำหรับจำนวนเต็ม k ใด ๆ $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos \theta$ และ $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin \theta$ จะได้ว่า $\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi) = \cos \theta + i\sin \theta$ นั่นคือ สำหรับทุกจำนวนเต็ม k ถ้า θ เป็นอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน z แล้ว $\theta + 2k\pi$ เป็นอาร์กิวเมนต์ของ z ด้วย หรือกล่าวได้ว่าอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน z มีได้หลายค่า ดังนั้น ในการเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว หากโจทย์ไม่ได้กำหนดโดเมนของอาร์กิวเมนต์ จะต้องเขียนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดในรูปเชิงขั้วทั่วไป ดังแสดงในตัวอย่างที่ 18

- ทฤษฎีบท 5 ช่วยให้เราหาคูณและผลหารของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้ง่ายขึ้น
- ทฤษฎีบท 7 เป็นทฤษฎีบทที่ทำให้เห็นประโยชน์ของการเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วเพื่อนำไปใช้ในการหาผลสำเร็จของจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูปเลขยกกำลัง ดังแสดงในตัวอย่างที่ 21 นอกจากนี้ยังสามารถใช้ทฤษฎีบทนี้ช่วยในการหาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน z ได้ เช่น ในการหาตัวผกผันการคูณของ $2 + 2i$ ทำได้ดังนี้

ให้ $z = 2 + 2i$ จะได้ว่า z^{-1} เป็นตัวผกผันการคูณของ z

เนื่องจาก $z = 2 + 2i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

และจากทฤษฎีบท 7 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} z^{-1} &= (2\sqrt{2})^{-1} \left(\cos\left((-1)\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + i\sin\left((-1)\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \end{aligned}$$

ดังนั้น ตัวผกผันการคูณของ $2 + 2i$ คือ $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เป็นการขยายจากการหารากที่ n ของจำนวนจริง ซึ่งจะเห็นว่า ในระบบจำนวนจริง เมื่อ n เป็นจำนวนจริงบวกคู่ จะมีจำนวนจริงบางจำนวนที่ไม่มีรากที่ n เช่น ไม่มีจำนวนจริง a ที่เป็นรากที่สองของ -1 เนื่องจากไม่มีจำนวนจริง a ที่ทำให้ $a^2 = -1$
- ตัวอย่างที่ 22, 23 และ 24 ใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ช่วยในการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน โดยเขียนเวกเตอร์แสดงรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เพื่อแสดงให้เห็นว่ารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนจะมีทั้งหมด n รากที่แตกต่างกัน เพื่อเป็นการนำเข้าสู่ทฤษฎีบท 8
- การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน อาจเขียนแสดงมุม θ ในหน่วยองศาก็ได้ เช่น ในตัวอย่างที่ 22 สามารถเขียน z ได้เป็น $z = 1(\cos(330k)^\circ + i\sin(330k)^\circ)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$
- จากทฤษฎีบท 8 ในกรณีที่ $k = 0$ จะได้ $z = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right) \right)$ และผลต่างของอาร์กิวเมนต์ที่อยู่ติดกันจะเท่ากันเสมอ ซึ่งเท่ากับ $\frac{2\pi}{n}$ นั่นคือ เมื่อเขียนเวกเตอร์แสดงรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนในระนาบเชิงซ้อนแล้ว เวกเตอร์จะแบ่งวงกลมออกเป็น n ส่วนเท่า ๆ กัน



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

- การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดไว้ในแบบฝึกหัด 1.6 ข้อ 2 โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการหารากที่ 4 ของ 1 นั้น ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนตรวจสอบการเป็นรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้ความรู้ที่ว่า ถ้าให้ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วรากที่ n ของ w คือ จำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมการ $z^n = w$ นอกจากนี้ในการพิจารณาว่า $\cos 4\theta + i\sin 4\theta = \cos 0 + i\sin 0$ อาจมีนักเรียนบางคนสรุปว่า $4\theta = 0$ เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ซึ่งนักเรียนควรสรุปให้ถูกต้องว่า $4\theta = 0 + 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

สมการพหุนามตัวแปรเดียว



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ทฤษฎีบท 9 ทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต เป็นทฤษฎีบทที่ยืนยันว่า สมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และมีดีกรีมากกว่าศูนย์ จะมีคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อยหนึ่งคำตอบ
- ในตัวอย่างที่ 26 จะใช้ทฤษฎีบท 10 (ทฤษฎีบทตัวประกอบ) ช่วยในการหาคำตอบทั้งหมดของสมการพหุนาม และในตัวอย่างที่ 27 จะใช้ทฤษฎีบท 11 (ทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ) ช่วยในการหาคำตอบทั้งหมดของสมการพหุนาม
- การแก้ปัญหาโดยใช้ทฤษฎีบท 11 (ทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ) ดังแสดงในตัวอย่างที่ 27 อาจใช้สมบัติการแจกแจงช่วยในการแยกตัวประกอบเพื่อหาเซตคำตอบของสมการพหุนามได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } 2x^4 + x^3 - 2x - 1 &= x^3(2x+1) - (2x+1) \\ &= (2x+1)(x^3 - 1) \\ &= (2x+1)(x-1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $2x+1=0$ หรือ $x-1=0$ หรือ $x^2 + x + 1 = 0$

$$\text{ถ้า } x^2 + x + 1 = 0 \text{ จะได้ } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}i}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ $2x^4 + x^3 - 2x - 1 = 0$ คือ

$$\left\{ -\frac{1}{2}, 1, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right\}$$

- สมการพหุนามบางสมการอาจมีคำตอบซ้ำกัน ดังแสดงในตัวอย่างที่ 28 ซึ่งครูควรเน้นย้ำกับนักเรียนว่าเป็นไปตามทฤษฎีบท 12
- ทฤษฎีบท 13 ทำให้ทราบว่า ถ้าสมการพหุนามมีคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้วสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนนั้น จะเป็นคำตอบของสมการพหุนามด้วย ซึ่งจะเป็นประโยชน์ทำให้การหาคำตอบของสมการพหุนามได้รวดเร็วขึ้น ดังแสดงในตัวอย่างที่ 29



ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

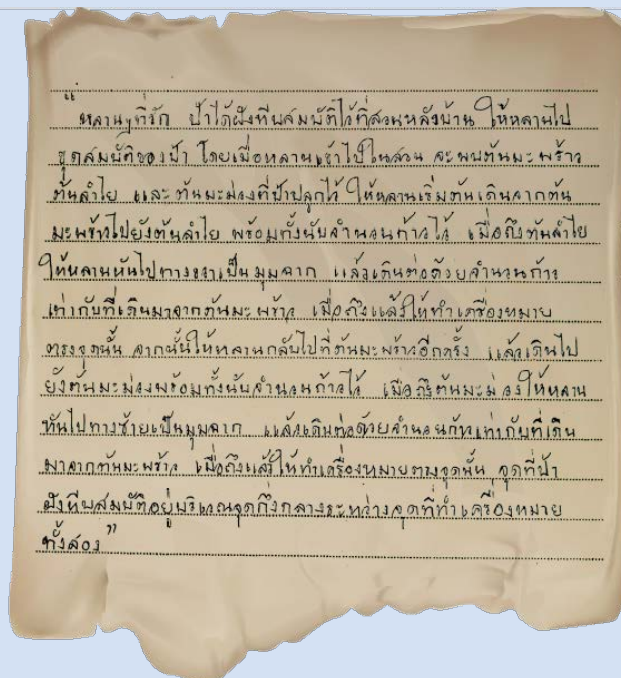
- เมื่อกำหนดให้ c เป็นคำตอบหนึ่งของสมการพหุนาม $p(x) = 0$ นักเรียนมักเข้าใจผิดว่า $x + c$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของพหุนาม $p(x)$ ซึ่งในการจัดการเรียนการสอน ครูควรเน้นย้ำให้นักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีบทตัวประกอบและทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ
- นักเรียนบางคนอาจเข้าใจผิดว่า $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ คือสมการพหุนาม ซึ่งครูควรให้นักเรียนสังเกตจากทฤษฎีบท 10 ทฤษฎีบทตัวประกอบ ซึ่งจะเห็นว่า $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ เป็นพหุนาม และ $p(x) = 0$ เป็นสมการพหุนาม ดังแสดงในทฤษฎีบท 12

1.3 แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน



กิจกรรม : ทบสมบัติของป่าบุญมา

หลังจากป่าบุญมาเสียชีวิต หลาน ๆ ได้ช่วยกันเก็บของที่บ้านของป่าบุญมา และบังเอิญพบบันทึกที่ป่าบุญมาเขียนไว้ มีเนื้อความดังนี้



หลังจากที่หลาน ๆ ของป่าบุญมาพบบันทึกนี้ จึงได้พากันไปที่สวนหลังบ้าน เพื่อขุดหาทาบสมบัติที่ป่าบุญมาฝังไว้ แต่เมื่อหลาน ๆ ของป่าบุญมาไปถึงสวน กลับพบเพียงต้นลำไยและต้นมะม่วง ไม่ว่าจะช่วยกันหาเท่าไร ก็ไม่พบต้นมะพร้าว ที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะว่าต้นมะพร้าวได้ตายลงหลายปีก่อนและถูกขุดทิ้งจนไร้ร่องรอย

ถ้านักเรียนเป็นหลานของป่าบุญมา นักเรียนจะมีวิธีการหาทาบสมบัติของป่าบุญมาได้อย่างไร

ขั้นตอนการปฏิบัติ

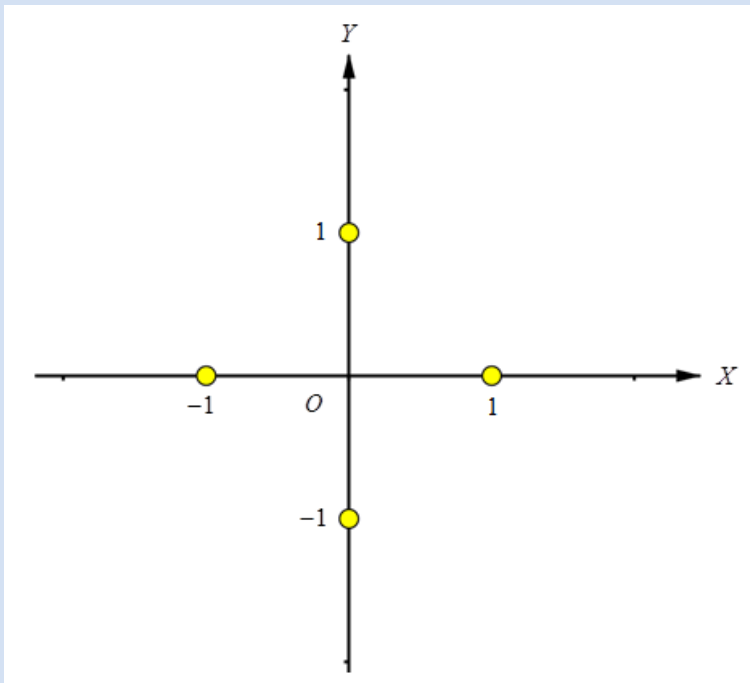
- เขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อน $1, 1 \cdot i, 1 \cdot i \cdot i, 1 \cdot i \cdot i \cdot i$ และ $1 \cdot i \cdot i \cdot i \cdot i$ ในระนาบเชิงซ้อน
- จากกราฟที่ได้ในข้อ 1 นักเรียนคิดว่าการคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วย i สามารถพิจารณาเป็นการหมุนจุดที่แสดงจำนวนเชิงซ้อนนั้นได้อย่างไร
- นักเรียนคิดว่าการคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วย $-i$ สามารถพิจารณาเป็นการหมุนจุดที่แสดงจำนวนเชิงซ้อนนั้นได้อย่างไร
- ให้นักเรียนนำลายแทงหีบสมบัติของبابาญมา มาเขียนลงในระนาบเชิงซ้อน โดยให้ c แทนระยะห่างระหว่างต้นลำไยและต้นมะม่วง กำหนดจุด $R(a, b)$ อยู่ในจุดภาคที่ 1 แทนตำแหน่งต้นมะพร้าว ให้ $d = \frac{c}{2}$ กำหนดจุด $P(-d, 0)$ และ $Q(d, 0)$ แทนตำแหน่งต้นลำไยและต้นมะม่วง ตามลำดับ และให้จุด M_1 และ M_2 แทนตำแหน่งที่ทำเครื่องหมาย เมื่อเดินไปจากต้นลำไยและต้นมะม่วงตามลำดับ
- ให้ R', P' และ Q' เป็นจุดที่ได้จากการเลื่อนจุด R, P และ Q ไปทางขวาเป็นระยะทาง d หน่วย ตามลำดับ จงหาพิกัดของจุด R', P' และ Q' พร้อมทั้งเขียนกราฟที่ได้จากการเลื่อนจุดทุกจุดบนกราฟที่ได้ในข้อ 4 ไปทางขวาเป็นระยะทาง d หน่วย
- จากกราฟที่ได้ในข้อ 5 จุด M'_1 ได้จากการหมุนจุด R' รอบจุดกำเนิดเป็นมุมเท่าใดในทิศทางใด
- จากข้อ 6 จำนวนเชิงซ้อน M'_1 ได้จากการคูณจำนวนเชิงซ้อน R' ด้วยจำนวนเชิงซ้อนใด และจงหาพิกัดของจุด M'_1 และ M_1
- ให้ R'', P'' และ Q'' เป็นจุดที่ได้จากการเลื่อนจุด R, P และ Q ไปทางซ้ายเป็นระยะทาง d หน่วย ตามลำดับ จงหาพิกัดของจุด R'', P'' และ Q'' พร้อมทั้งเขียนกราฟที่ได้จากการเลื่อนจุดทุกจุดบนกราฟที่ได้ในข้อ 4 ไปทางขวาเป็นระยะทาง d หน่วย
- จากกราฟที่ได้ในข้อ 8 จุด M'_2 ได้จากการหมุนจุด R'' รอบจุดกำเนิดเป็นมุมเท่าใดในทิศทางใด
- จากข้อ 9 จำนวนเชิงซ้อน M'_2 ได้จากการคูณจำนวนเชิงซ้อน R'' ด้วยจำนวนเชิงซ้อนใด และจงหาพิกัดของจุด M'_2 และ M_2

11. จงหาพิกัดของจุดที่ป่าบุญมาฝั่งหีบสมบัติไว้
12. จากข้อมูลในข้อ 11 นักเรียนจะมีวิธีการหาหีบสมบัติของป่าบุญมาได้อย่างไร ถึงแม้ว่าจะไม่ทราบตำแหน่งของต้นมะพร้าว
13. เปิดเว็บไซต์ ipst.me/8452
14. จากแผนที่จำลองจุดที่ฝังหีบสมบัติของป่าบุญมาในเว็บไซต์ข้างต้น ให้นักเรียนลองสำรวจว่าจุดที่บอกตำแหน่งหีบสมบัติเปลี่ยนไปหรือไม่ เมื่อ
 - 1) เลื่อนจุดที่แทนต้นลำไย
 - 2) เลื่อนจุดที่แทนต้นมะม่วง
 - 3) เลื่อนจุดที่แทนต้นมะพร้าว
15. จากข้อ 14 ตำแหน่งของหีบสมบัติของป่าบุญมาขึ้นกับอะไรบ้าง



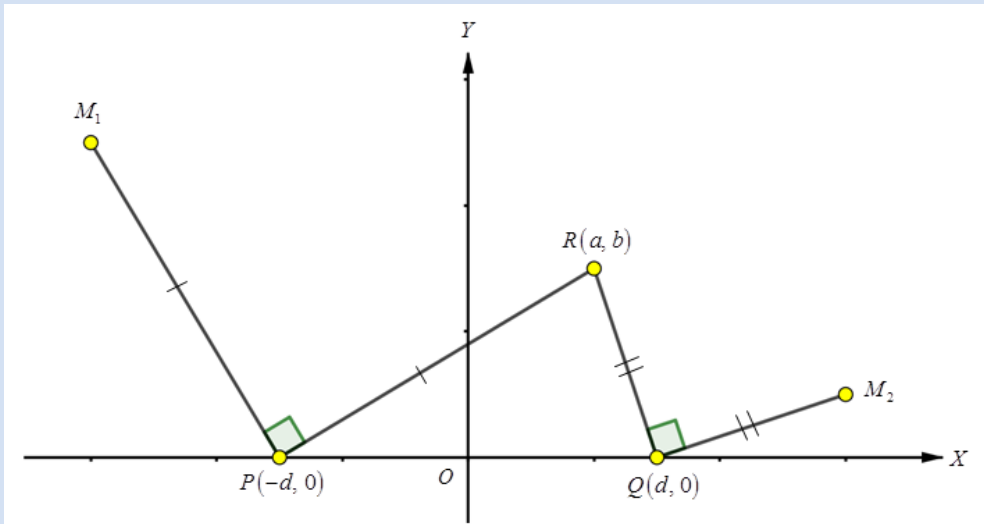
เฉลยกิจกรรม : ทิศสมบัติของป้าบุญมา

1. เนื่องจาก $1 \cdot i = i$, $1 \cdot i \cdot i = i^2 = -1$, $1 \cdot i \cdot i \cdot i = i^3 = -i$ และ $1 \cdot i \cdot i \cdot i \cdot i = i^4 = 1$ ดังนั้น จะเขียนจุดซึ่งแสดงจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดในระนาบเชิงซ้อนได้ดังนี้

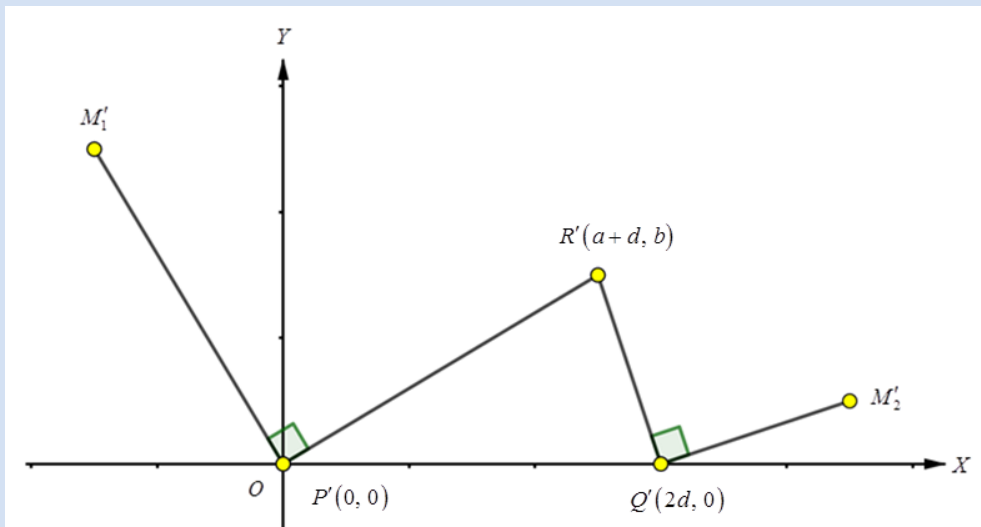


2. จากข้อ 1 จะเห็นว่าการคูณด้วย i ได้ผลลัพธ์เป็น i และเมื่อคูณผลลัพธ์ด้วย i ไปเรื่อย ๆ จะได้ผลลัพธ์เป็น $-1, -i, 1, \dots$ เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ดังนั้น สามารถพิจารณาได้ว่าการคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วย i เป็นการหมุนจุดที่แสดงจำนวนเชิงซ้อนนั้นรอบจุดกำเนิดเป็นมุม 90 องศา ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
3. การคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วย $-i$ สามารถพิจารณาได้เป็นการหมุนจุดที่แสดงจำนวนเชิงซ้อนนั้นรอบจุดกำเนิดเป็นมุม 90 องศา ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

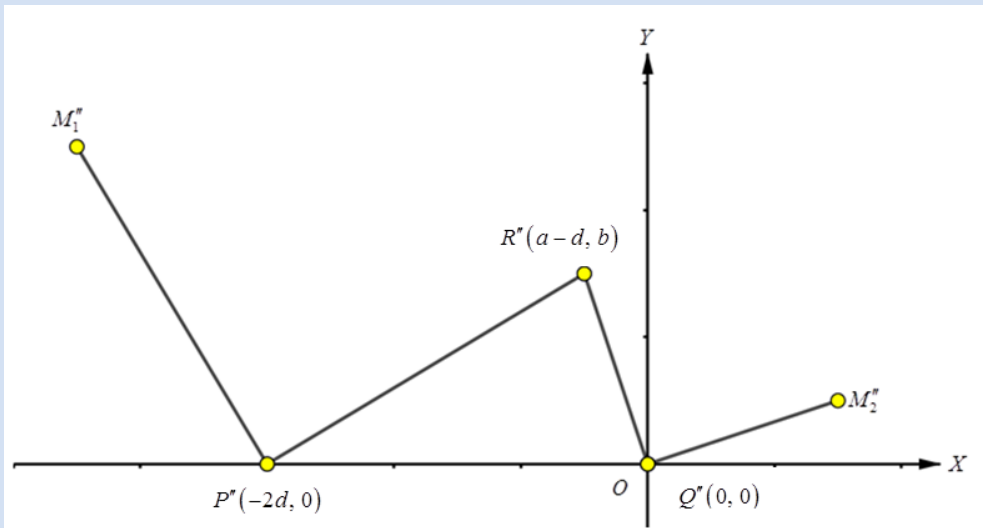
4. นำลายแทงหีบสมบัติของبابูญมา มาเขียนลงในระนาบเชิงซ้อนได้ดังนี้



5. จุด R' , P' และ Q' มีพิกัดเป็น $(a+d, b)$, $(0,0)$ และ $(2d,0)$ และเขียนกราฟได้ดังนี้

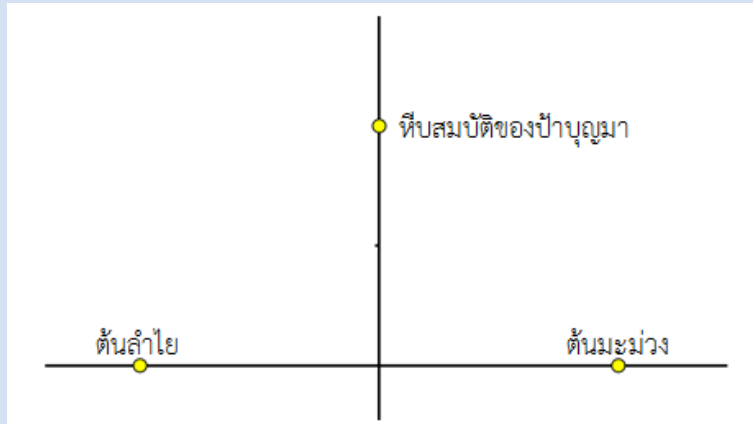


6. จุด M_1' ได้จากการหมุนจุด R' รอบจุดกำเนิดเป็นมุม 90 องศา ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
7. จำนวนเชิงซ้อน M_1' ได้จากการคูณจำนวนเชิงซ้อน R' ด้วย i
 นั่นคือ $M_1' = (a + d + bi)i = -b + (a + d)i$
 ดังนั้น พิกัดของจุด M_1' คือ $(-b, a + d)$ และพิกัดของจุด M_1 คือ $(-b - d, a + d)$
8. จุด R'' , P'' และ Q'' มีพิกัดเป็น $(a - d, b)$, $(-2d, 0)$ และ $(0, 0)$ และเขียนกราฟได้ดังนี้



9. จุด M_2'' ได้จากการหมุนจุด R'' รอบจุดกำเนิดเป็นมุม 90 องศา ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา
10. จำนวนเชิงซ้อน M_2'' ได้จากการคูณจำนวนเชิงซ้อน R'' ด้วย $-i$
 นั่นคือ $M_2'' = (a + d + bi)(-i) = -b + (d - a)i$
 ดังนั้น พิกัดของจุด M_2'' คือ $(b, d - a)$ และพิกัดของจุด M_2 คือ $(b + d, d - a)$
11. จุดที่ปัญญมาผังหีบสมบัติไว้ คือ จุดกึ่งกลางระหว่างจุด M_1 และ M_2 มีพิกัดเป็น $\left(\frac{(-b-d) + (b+d)}{2}, \frac{(a+d) + (d-a)}{2} \right)$ ซึ่งเท่ากับ $(0, d)$ หรือเขียนแทนด้วยจำนวนเชิงซ้อน di

12. จากข้อ 11 จุดที่ป้าบุญมาฝังหีบสมบัติไว้มีพิกัดเป็น $(0, d)$ ซึ่งไม่ขึ้นกับ a และ b (หรือพิกัดของจุด R) ดังนั้น จุดที่ป้าบุญมาฝังหีบสมบัติไว้สามารถหาได้จากตำแหน่งของต้นลำไยและต้นมะม่วง โดยไม่จำเป็นต้องทราบตำแหน่งของต้นมะพร้าว



13.–

14. 1) จุดที่แทนหีบสมบัติเปลี่ยน เมื่อเลื่อนจุดที่แทนต้นลำไย
 2) จุดที่แทนหีบสมบัติเปลี่ยน เมื่อเลื่อนจุดที่แทนต้นมะม่วง
 3) จุดที่แทนหีบสมบัติไม่เปลี่ยน เมื่อเลื่อนจุดที่แทนต้นมะพร้าว
15. ตำแหน่งของหีบสมบัติของป้าบุญมาขึ้นกับตำแหน่งของต้นลำไยและต้นมะม่วง



แนวทางการจัดกิจกรรม : หีบสมบัติของป้าบุญมา

เวลาในการจัดกิจกรรม 50 นาที

กิจกรรมนี้เสนอไว้ให้นักเรียนใช้ความรู้ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน เพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ โดยกิจกรรมนี้มีสื่อ/แหล่งการเรียนรู้ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

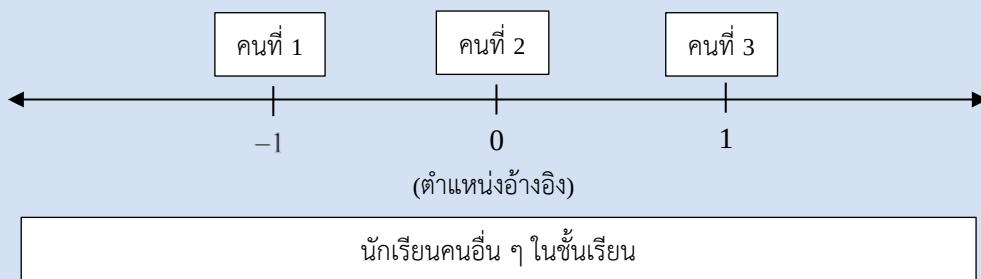
1. ใบกิจกรรม “หีบสมบัติของป้าบุญมา”
2. คอมพิวเตอร์ที่สามารถเชื่อมต่อระบบอินเทอร์เน็ตได้
3. ไฟล์กิจกรรม “หีบสมบัติของป้าบุญมา” จากเว็บไซต์ ipst.me/8452

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรมของกิจกรรม “หีบสมบัติของป้าบุญมา” แบ่งเป็น 2 ส่วน ได้แก่ การทำความเข้าใจสมบัติทางเรขาคณิตที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการของจำนวนเชิงซ้อน และการแก้ปัญหาเกี่ยวกับหีบสมบัติของป้าบุญมา

ส่วนที่ 1 การทำความเข้าใจสมบัติทางเรขาคณิตที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการของจำนวนเชิงซ้อน มีขั้นตอนการดำเนินกิจกรรมดังนี้

1. ครูชวนนักเรียนอาสาสมัคร 3 คน ออกมายืนเรียงแถวหน้ากระดานโดยให้หันหน้าไปหาเพื่อนในชั้นเรียน และกำหนดให้นักเรียนคนที่ 1, 2 และ 3 แทนจำนวน -1 , 0 และ 1 บนเส้นจำนวน ตามลำดับ โดยให้ 0 เป็นตำแหน่งอ้างอิง ดังรูป



2. ครูให้นักเรียนอาสาสมัครและนักเรียนในชั้นร่วมกันพิจารณาว่า -1 , 0 และ 1 ห่างจากตำแหน่งอ้างอิงเท่าใด

แนวคำตอบ

$-1, 0$ และ 1 ห่างจากตำแหน่งอ้างอิง $1, 0$ และ 1 หน่วย ตามลำดับ

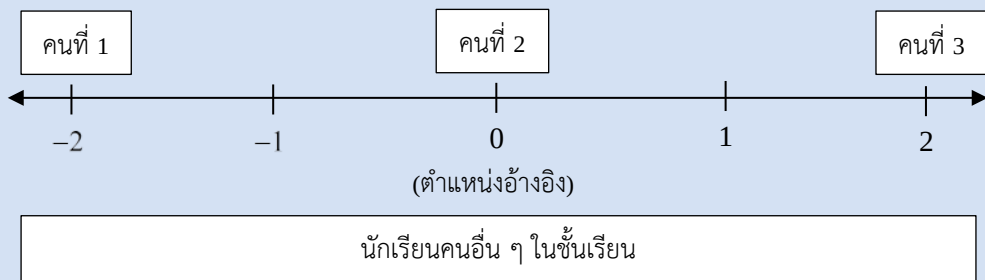
3. ครูให้นักเรียนอาสาสมัครและนักเรียนในชั้นร่วมกันพิจารณาว่าเมื่อนำ 2 ไปคูณแต่ละจำนวนบนเส้นจำนวนในข้อ 1 จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรเมื่อเทียบกับตำแหน่งอ้างอิง พร้อมทั้งให้นักเรียนอาสาสมัครเปลี่ยนตำแหน่งที่ยืนเพื่อแสดงการเปลี่ยนแปลงดังกล่าว

แนวคำตอบ

เมื่อนำ 2 ไปคูณ 0 ผลลัพธ์ที่ได้เป็น 0 เมื่อเทียบกับตำแหน่งอ้างอิง จะได้ว่า ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

แต่เมื่อนำ 2 ไปคูณ -1 และ 1 ผลลัพธ์ที่ได้เป็น -2 และ 2 ตามลำดับ เมื่อเทียบกับตำแหน่งอ้างอิง จะได้ว่า ตำแหน่งของผลลัพธ์ทั้งสองห่างจากตำแหน่งอ้างอิง 2 หน่วย ซึ่งเป็น 2 เท่าของระยะห่างเดิมในข้อ 2

การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งที่ยืนของนักเรียนอาสาสมัครเป็นดังรูป



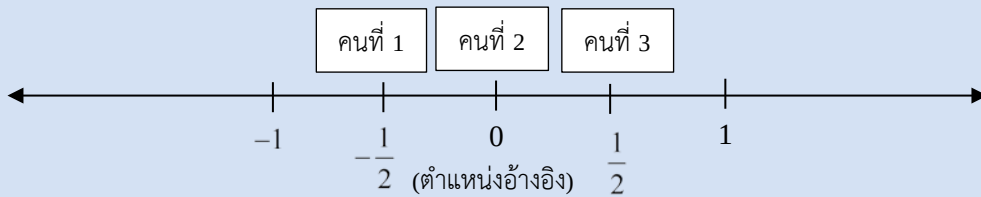
4. ครูให้นักเรียนอาสาสมัครกลับมายืนที่ตำแหน่งเดิมในข้อ 1 จากนั้นครูให้นักเรียนอาสาสมัครและนักเรียนในชั้นร่วมกันพิจารณาว่าเมื่อนำ $\frac{1}{2}$ ไปคูณแต่ละจำนวนบนเส้นจำนวนในข้อ 1 จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรเมื่อเทียบกับตำแหน่งอ้างอิง พร้อมทั้งให้นักเรียนอาสาสมัครเปลี่ยนตำแหน่งที่ยืนเพื่อแสดงการเปลี่ยนแปลงดังกล่าว

แนวคำตอบ

เมื่อนำ $\frac{1}{2}$ ไปคูณ 0 ผลลัพธ์ที่ได้เป็น 0 เมื่อเทียบกับตำแหน่งอ้างอิง จะได้ว่า ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

แต่เมื่อนำ $\frac{1}{2}$ ไปคูณ -1 และ 1 ผลลัพธ์ที่ได้เป็น $-\frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{2}$ ตามลำดับ เมื่อเทียบกับตำแหน่งอ้างอิง จะได้ว่า ตำแหน่งของผลลัพธ์ทั้งสองห่างจากตำแหน่งอ้างอิง $\frac{1}{2}$ หน่วย ซึ่งเป็นครึ่งหนึ่งของคำตอบที่ได้ในข้อ 2

การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งที่ยืนของนักเรียนอาสาสมัครเป็นดังรูป



นักเรียนคนอื่น ๆ ในชั้นเรียน

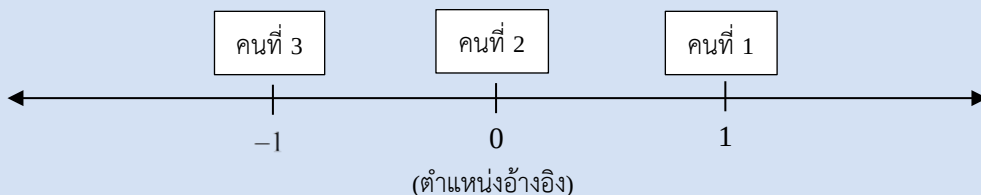
5. ครูให้นักเรียนอาสาสมัครกลับมายืนที่ตำแหน่งเดิมในข้อ 1 จากนั้นครูให้นักเรียนอาสาสมัครและนักเรียนในชั้นร่วมกันพิจารณาว่าเมื่อนำ -1 ไปคูณแต่ละจำนวนบนเส้นจำนวนในข้อ 1 จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรเมื่อเทียบกับตำแหน่งอ้างอิง พร้อมทั้งให้นักเรียนอาสาสมัครเปลี่ยนตำแหน่งที่ยืนเพื่อแสดงการเปลี่ยนแปลงดังกล่าว

แนวคำตอบ

เมื่อนำ -1 ไปคูณ 0 ผลลัพธ์ที่ได้เป็น 0 เมื่อเทียบกับตำแหน่งอ้างอิง จะได้ว่า ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

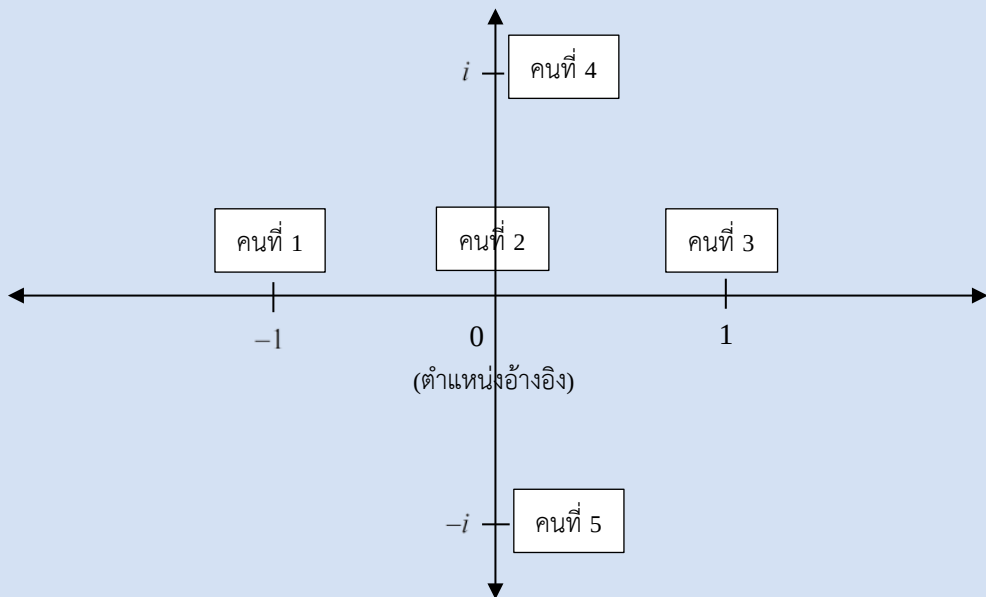
แต่เมื่อนำ -1 ไปคูณ -1 และ 1 ผลลัพธ์ที่ได้เป็น 1 และ -1 ตามลำดับ เมื่อเทียบกับตำแหน่งอ้างอิง จะได้ว่า ตำแหน่งของผลลัพธ์ดังกล่าวห่างจากตำแหน่งอ้างอิงเท่าเดิม (คือ 1 หน่วย) แต่มีการสลับตำแหน่งกัน

การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งที่ยืนของนักเรียนอาสาสมัครเป็นดังรูป



นักเรียนคนอื่น ๆ ในชั้นเรียน

6. ครูให้นักเรียนอาสาสมัครกลับมายืนที่ตำแหน่งเดิมในข้อ 1 จากนั้นครูขออนักเรียนอาสาสมัครเพิ่มอีก 2 คน โดยกำหนดให้แต่ละคนแทนจำนวน i และ $-i$ แล้วยืนที่ตำแหน่งที่แทน i และ $-i$ ดังรูป



นักเรียนคนอื่น ๆ ในชั้นเรียน

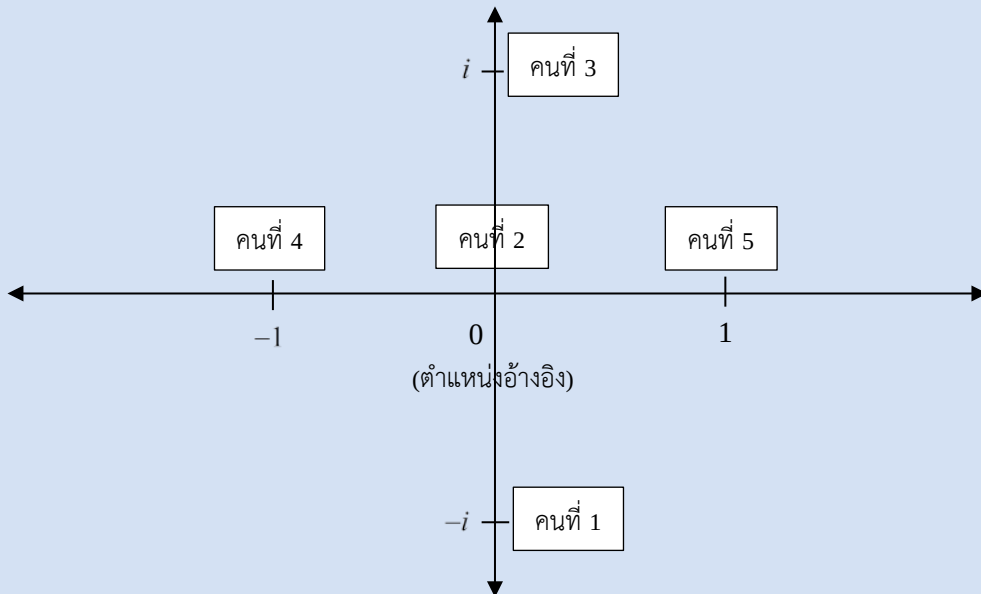
7. ครูให้นักเรียนอาสาสมัครและนักเรียนในชั้นร่วมกันพิจารณาว่าเมื่อนำ i ไปคูณแต่ละจำนวนในระนาบเชิงซ้อนในข้อ 6 จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรเมื่อเทียบกับตำแหน่งอ้างอิง พร้อมทั้งให้นักเรียนอาสาสมัครเปลี่ยนตำแหน่งที่ยืนเพื่อแสดงการเปลี่ยนแปลงดังกล่าว

แนวคำตอบ

เมื่อนำ i ไปคูณ 0 ผลลัพธ์ที่ได้เป็น 0 เมื่อเทียบกับตำแหน่งอ้างอิง จะได้ว่า ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

แต่เมื่อนำ i ไปคูณ $1, i, -1$ และ $-i$ ผลลัพธ์ที่ได้เป็น $i, -1, -i$ และ 1 ตามลำดับเมื่อเทียบกับตำแหน่งอ้างอิง จะได้ว่า ตำแหน่งของผลลัพธ์ดังกล่าวเกิดจากการหมุนตำแหน่งเดิมรอบจุดอ้างอิง ด้วยมุม 90 องศา ทวนเข็มนาฬิกา

การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งที่ยืนของนักเรียนอาสาสมัครเป็นดังรูป



นักเรียนคนอื่น ๆ ในชั้นเรียน

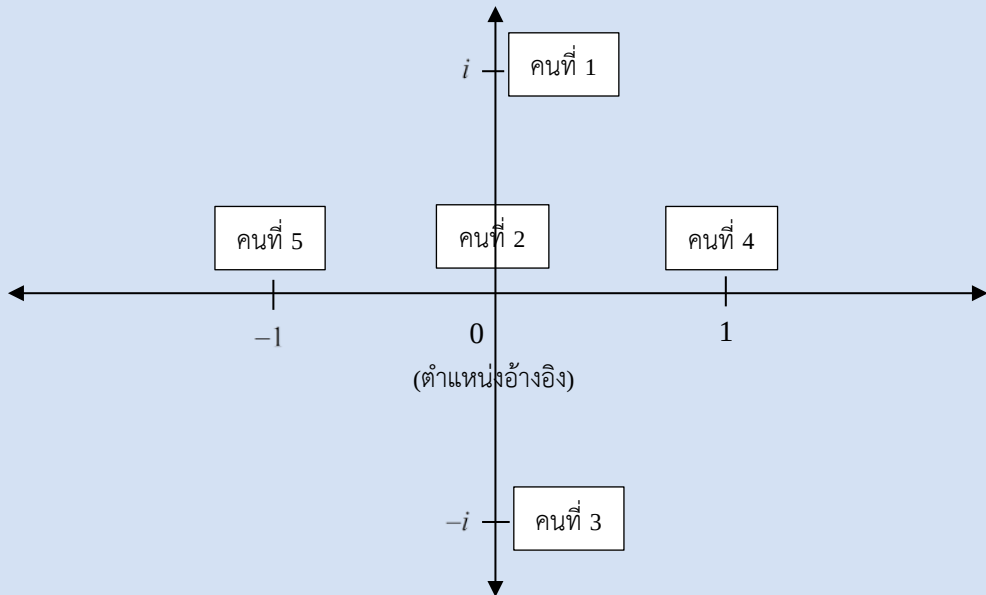
8. ครูให้นักเรียนอาสาสมัครกลับมายืนที่ตำแหน่งเดิมในข้อ 6 จากนั้นครูให้นักเรียนอาสาสมัครและนักเรียนในชั้นร่วมกันพิจารณาว่าเมื่อนำ $-i$ ไปคูณแต่ละจำนวนในระนาบเชิงซ้อนในข้อ 6 จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรเมื่อเทียบกับตำแหน่งอ้างอิง พร้อมทั้งให้นักเรียนอาสาสมัครเปลี่ยนตำแหน่งที่ยืนเพื่อแสดงการเปลี่ยนแปลงดังกล่าว

แนวคำตอบ

เมื่อนำ $-i$ ไปคูณ 0 ผลลัพธ์ที่ได้เป็น 0 เมื่อเทียบกับตำแหน่งอ้างอิง จะได้ว่า ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

แต่เมื่อนำ $-i$ ไปคูณ $1, i, -1$ และ $-i$ ผลลัพธ์ที่ได้เป็น $-i, 1, i$ และ -1 ตามลำดับเมื่อเทียบกับตำแหน่งอ้างอิง จะได้ว่า ตำแหน่งของผลลัพธ์ดังกล่าวเกิดจากการหมุนตำแหน่งเดิมรอบจุดอ้างอิง ด้วยมุม 90 องศา ตามเข็มนาฬิกา

การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งที่ยืนของนักเรียนอาสาสมัครเป็นดังรูป



นักเรียนคนอื่น ๆ ในชั้นเรียน

9. ครูแจกใบกิจกรรม “หีบสมบัติของป้าบุญมา” ให้กับนักเรียนทุกคน และให้นักเรียนตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 1 – 3 ในใบกิจกรรม ทั้งนี้ครูควรชี้แนะให้นักเรียนใช้คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือช่วยในการเขียนกราฟในข้อ 1 ในใบกิจกรรม
10. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบที่ได้ในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 1 – 3

ส่วนที่ 2 การแก้ปัญหาเกี่ยวกับหีบสมบัติของป้าบุญมา มีขั้นตอนการดำเนินกิจกรรมดังนี้

1. ครูจับคู่นักเรียนแบบความสามารถ แล้วให้นักเรียนศึกษาสถานการณ์ปัญหาในใบกิจกรรม “หีบสมบัติของป้าบุญมา” ทั้งนี้ ครูควรนำอภิปรายเกี่ยวกับสถานการณ์ปัญหาในใบกิจกรรมเพื่อให้นักเรียนทุกคนเข้าใจตรงกัน
2. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่ร่วมกันตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 4 – 10 ในใบกิจกรรม ทั้งนี้ ครูควรชี้แนะให้นักเรียนใช้คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือช่วยในการเขียนกราฟในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 4, 5 และ 8
3. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบที่ได้ในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 4 – 10

4. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่ร่วมกันตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 11 และ 12 ในใบกิจกรรม สำหรับการตอบคำถามในข้อ 12 ครูควรชี้แนะให้นักเรียนเชื่อมโยงกับคำตอบของคำถามในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 7 และ 10 ในใบกิจกรรม
5. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบที่ได้ในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 11 และ 12
6. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่ร่วมกันทำกิจกรรมและตอบคำถามในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 13 – 15
7. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบที่ได้ในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 14 และ 15

1.4 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน

การวัดผลระหว่างเรียนมีเป้าหมายเพื่อปรับปรุงการเรียนรู้และพัฒนาการเรียนการสอน และตรวจสอบนักเรียนแต่ละคนว่ามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่ครูสอนมากน้อยเพียงใด การให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเป็นแนวทางหนึ่งที่ครูอาจใช้เพื่อประเมินผลด้านความรู้ระหว่างเรียนของนักเรียน ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดที่ครอบคลุมเนื้อหาที่สำคัญของแต่ละบทไว้ สำหรับในบทที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน ครูอาจใช้แบบฝึกหัดเพื่อวัดผลประเมินผลความรู้ในแต่ละเนื้อหาได้ดังนี้

เนื้อหา	แบบฝึกหัด	
บทนิยามเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน การบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนเชิงซ้อน และสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน	1.1	ข้อ 1 – 5
	1.2	ข้อ 1 – 7
รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนและการใช้ความรู้เรื่องรากที่สองของจำนวนจริงลบในการหาคำตอบของสมการกำลังสอง	1.3	ข้อ 1 – 2
กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน	1.4	ข้อ 1 – 8
รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน	1.5	ข้อ 1 – 3
รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน	1.6	ข้อ 1 – 5
สมการพหุนามตัวแปรเดียวและการใช้ความรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนในการหาคำตอบของสมการพหุนามตัวแปรเดียว	1.7	ข้อ 1 – 7

1.5 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 มีจุดมุ่งหมายว่า เมื่อนักเรียนได้เรียนจบบทที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน แล้วนักเรียนสามารถ

1. ใช้ความรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา
2. หารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน
3. หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1
4. แก่สมการพหุนามตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสี่ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดท้ายบทที่ประกอบด้วยโจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียน ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมาย นอกจากนี้มีโจทย์ฝึกทักษะที่น่าสนใจและโจทย์ท้าทาย ครูอาจเลือกใช้แบบฝึกหัดท้ายบทวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบทเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนมีความสามารถตามจุดมุ่งหมายเมื่อเรียนจบบทเรียนหรือไม่

ทั้งนี้แบบฝึกหัดท้ายบทแต่ละข้อในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 บทที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียน ดังนี้

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
1. ใช้ความรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา	1	1) – 10)
	2	
	3	1) – 6)
	4	1) – 8)
	5	1) – 3)
	6	1) – 2)
	7	1) – 5), 6)*
	8	1) – 2)
	9	1) – 4)
	10	1) – 5)

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
1. ใช้ความรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา (ต่อ)	11	1) – 3)
	12	
	23	
	24	
	25	1) – 8)
2. ทหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน	7	6)*
3. ทหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1	13	
	14	1) – 4)
	15	1) – 4)
4. แก้วสมการพหุนามตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสี่ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา	16	1) – 4)
	17	1) – 2)
	18	1) – 2)
	19	
	20	
	21	1) – 6)
	27	
	28	
	29	
โจทย์ท้าทาย	22	
	26	

หมายเหตุ

แบบฝึกหัดท้ายบทข้อ 7. 6) สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียนมากกว่า 1 จุดมุ่งหมาย

1.6 ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู

- จากสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนจริง ซึ่งเมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

สมบัติ	การบวก	การคูณ
สมบัติปิด	1. $a + b \in \mathbb{R}$	6. $ab \in \mathbb{R}$
สมบัติการสลับที่	2. $a + b = b + a$	7. $ab = ba$
สมบัติการเปลี่ยนหมู่	3. $(a + b) + c = a + (b + c)$	8. $(ab)c = a(bc)$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	4. $a + 0 = a = 0 + a$ เรียก 0 ว่าเอกลักษณ์การบวก	9. $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ เรียก 1 ว่า เอกลักษณ์การคูณ
สมบัติการมีตัวผกผัน	5. $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ เรียก $-a$ ว่า ตัวผกผันการบวก หรืออินเวอร์สการบวกของ a	10. ถ้า $a \neq 0$ แล้ว $a \cdot a^{-1} = a = 1 \cdot a$ เรียก a^{-1} ว่า ตัวผกผันการคูณ หรืออินเวอร์สการคูณของ a
สมบัติการแจกแจง	11. $a(b + c) = ab + ac$ และ $(a + b)c = ac + bc$	

ในที่นี้จะใช้สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนจริงในการพิสูจน์สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

1. สมบัติปิดการบวก

พิสูจน์

ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z_1 = (a_1, b_1)$ และ $z_2 = (a_2, b_2)$

เมื่อ a_1, a_2, b_1 และ b_2 เป็นจำนวนจริง

$$\text{จะได้ } z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2)$$

$$= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad (\text{บทนิยาม 1})$$

เนื่องจาก $a_1 + a_2 \in \mathbb{R}$ และ $b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$ (สมบัติปิดการบวกของจำนวนจริง)

จะได้ $(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in \mathbb{C}$ (บทนิยาม 1)

นั่นคือ $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$

2. สมบัติการสลับที่การบวก

พิสูจน์

ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z_1 = (a_1, b_1)$ และ $z_2 = (a_2, b_2)$

เมื่อ a_1, a_2, b_1 และ b_2 เป็นจำนวนจริง

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } z_1 + z_2 &= (a_1, b_1) + (a_2, b_2) \\ &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) && \text{(บทนิยาม 1)} \\ &= (a_2 + a_1, b_2 + b_1) && \text{(สมบัติการสลับที่การบวกของจำนวนจริง)} \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

3. สมบัติการเปลี่ยนหมู่การบวก

พิสูจน์

ให้ z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ และ

$z_3 = (a_3, b_3)$ เมื่อ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 และ b_3 เป็นจำนวนจริง จะได้

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (a_1, b_1) + ((a_2, b_2) + (a_3, b_3)) \\ &= (a_1, b_1) + (a_2 + a_3, b_2 + b_3) && \text{(บทนิยาม 1)} \\ &= (a_1 + (a_2 + a_3), b_1 + (b_2 + b_3)) && \text{(บทนิยาม 1)} \\ &= ((a_1 + a_2) + a_3, (b_1 + b_2) + b_3) \\ &&& \text{(สมบัติการเปลี่ยนหมู่การบวกของจำนวนจริง)} \\ &= (z_1 + z_2) + z_3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

4. สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก

พิสูจน์

ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z = (a, b)$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } z + 0 &= (a, b) + (0, 0) \\ &= (a + 0, b + 0) && \text{(บทนิยาม 1)} \\ &= (a, b) && \text{(สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก)} \\ &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{และ} \quad 0 + z &= (0, 0) + (a, b) \\
 &= (0 + a, 0 + b) && \text{(บทนิยาม 1)} \\
 &= (a, b) && \text{(สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก)} \\
 &= z
 \end{aligned}$$

นั่นคือ $z + 0 = z = 0 + z$

ดังนั้น 0 เป็นเอกลักษณ์การบวกของ z

5. สมบัติการมีตัวผกผันการบวก

พิสูจน์

ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z = (a, b)$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

นั่นคือ $-z = -(a, b) = (-a, -b)$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad z + (-z) &= (a, b) + (-a, -b) \\
 &= (a + (-a), b + (-b)) && \text{(บทนิยาม 1)} \\
 &= (0, 0) && \text{(สมบัติการมีตัวผกผันการบวก)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{และ} \quad (-z) + z &= (-a, -b) + (a, b) \\
 &= (-a + a, -b + b) && \text{(บทนิยาม 1)} \\
 &= (0, 0) && \text{(สมบัติการมีตัวผกผันการบวก)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

นั่นคือ $z + (-z) = 0 = (-z) + z$

ดังนั้น $-z = -(a + bi)$ เป็นตัวผกผันการบวกของ z

6. สมบัติปิดการคูณ

พิสูจน์

ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z_1 = (a_1, b_1)$ และ $z_2 = (a_2, b_2)$

เมื่อ a_1, a_2, b_1 และ b_2 เป็นจำนวนจริง

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad z_1 z_2 &= (a_1, b_1)(a_2, b_2) \\
 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) && \text{(บทนิยาม 1)}
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $a_1 a_2 - b_1 b_2 \in \mathbb{R}$ และ $a_1 b_2 + a_2 b_1 \in \mathbb{R}$

(สมบัติปิดการบวกและการคูณของจำนวนจริง)

จะได้ $(a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1) \in \mathbb{C}$ (บทนิยาม 1)

นั่นคือ $z_1z_2 \in \mathbb{C}$

7. สมบัติการสลับที่การคูณ

พิสูจน์

ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z_1 = (a_1, b_1)$ และ $z_2 = (a_2, b_2)$

เมื่อ a_1, a_2, b_1 และ b_2 เป็นจำนวนจริง

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } z_1z_2 &= (a_1, b_1)(a_2, b_2) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) \quad (\text{บทนิยาม 1}) \\ &= (a_2a_1 - b_2b_1, b_2a_1 + a_2b_1) \end{aligned}$$

(สมบัติการสลับที่การคูณของจำนวนจริง)

$$= z_2z_1$$

ดังนั้น $z_1z_2 = z_2z_1$

8. สมบัติการเปลี่ยนหมู่การคูณ

พิสูจน์

ให้ z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ และ

$z_3 = (a_3, b_3)$ เมื่อ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 และ b_3 เป็นจำนวนจริง จะได้

$$\begin{aligned} z_1(z_2z_3) &= (a_1, b_1)[(a_2, b_2)(a_3, b_3)] \\ &= (a_1, b_1)(a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3) \quad (\text{บทนิยาม 1}) \\ &= (a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(a_2b_3 + b_2a_3), a_1(a_2b_3 + b_2a_3) + b_1(a_2a_3 - b_2b_3)) \\ &\quad (\text{บทนิยาม 1}) \\ &= (a_1a_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3 - b_1b_2a_3, a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3 - b_1b_2b_3) \\ &\quad (\text{สมบัติการแจกแจงของจำนวนจริง}) \\ &= (a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3, a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3 + a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3) \\ &\quad (\text{สมบัติการสลับที่การบวกของจำนวนจริง}) \\ &= ((a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3) - (a_1b_2b_3 + b_1a_2b_3), (a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3) + (a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3)) \\ &\quad (\text{สมบัติการเปลี่ยนหมู่การคูณของจำนวนจริง}) \\ &= (a_3(a_1a_2 - b_1b_2) - b_3(a_1b_2 + b_1a_2), a_3(a_1b_2 + b_1a_2) + b_3(a_1a_2 - b_1b_2)) \\ &\quad (\text{สมบัติการแจกแจงของจำนวนจริง}) \end{aligned}$$

$$= (a_3, b_3)[(a_1, b_1)(a_2, b_2)] \quad (\text{บทนิยาม 1})$$

$$= [(a_1, b_1)(a_2, b_2)](a_3, b_3)$$

(สมบัติการสลับที่การคูณของจำนวนเชิงซ้อน)

$$= (z_1 z_2) z_3$$

ดังนั้น $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

9. สมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณ

พิสูจน์

ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z = (a, b)$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

จะได้ $z \cdot 1 = (a, b)(1, 0)$

$$= (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) \quad (\text{บทนิยาม 1})$$

$$= (a - 0, 0 + b) \quad (\text{สมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณของจำนวนจริง})$$

$$= (a, b) \quad (\text{สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวกของจำนวนจริง})$$

$$= z$$

และ $1 \cdot z = (1, 0)(a, b)$

$$= (1 \cdot a - 0 \cdot b, 0 \cdot a + 1 \cdot b) \quad (\text{บทนิยาม 1})$$

$$= (a - 0, 0 + b) \quad (\text{สมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณของจำนวนจริง})$$

$$= (a, b) \quad (\text{สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวกของจำนวนจริง})$$

$$= z$$

นั่นคือ $z \cdot 1 = z = 1 \cdot z$

ดังนั้น 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณของ z

10. สมบัติการมีตัวผกผันการคูณ

พิสูจน์

ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z = (a, b)$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $(a, b) \neq 0$

$$\text{ให้ } z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

จะได้ $z \cdot z^{-1} = (a, b) \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$

$$= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab}{a^2 + b^2} - \frac{ba}{a^2 + b^2} \right) \quad (\text{บทนิยาม 1})$$

$$\begin{aligned}
 &= (1, 0) && \text{(สมบัติการมีตัวผกผันการบวกของจำนวนจริง)} \\
 &= 1 \\
 \text{และ } z^{-1} \cdot z &= \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2} \right) (a, b) \\
 &= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{ab}{a^2+b^2} - \frac{ba}{a^2+b^2} \right) && \text{(บทนิยาม 1)} \\
 &= (1, 0) && \text{(สมบัติการมีตัวผกผันการบวกของจำนวนจริง)} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

นั่นคือ $z \cdot z^{-1} = 1 = z^{-1} \cdot z$

ดังนั้น $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2} \right)$ เป็นตัวผกผันการคูณของ z

11. สมบัติการแจกแจง

พิสูจน์

ให้ z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ และ

$z_3 = (a_3, b_3)$ เมื่อ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 และ b_3 เป็นจำนวนจริง จะได้

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 + z_1 z_3 &= (a_1, b_1)(a_2, b_2) + (a_1, b_1)(a_3, b_3) \\
 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 - b_1 a_2) + (a_1 a_3 - b_1 b_3, a_1 b_3 - b_1 a_3) && \text{(บทนิยาม 1)} \\
 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 + a_1 a_3 - b_1 b_3, a_1 b_2 - b_1 a_2 + a_1 b_3 - b_1 a_3) && \text{(บทนิยาม 1)} \\
 &= (a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3, a_1 b_2 + a_1 b_3 - b_1 a_2 - b_1 a_3) \\
 &\quad \text{(สมบัติการสลับที่การบวกของจำนวนจริง)} \\
 &= ((a_1 a_2 + a_1 a_3) - (b_1 b_2 + b_1 b_3), (a_1 b_2 + a_1 b_3) - (b_1 a_2 + b_1 a_3)) \\
 &\quad \text{(สมบัติการเปลี่ยนหมู่การบวกของจำนวนจริง)} \\
 &= (a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3), a_1(b_2 + b_3) - b_1(a_2 + a_3)) \\
 &\quad \text{(สมบัติการแจกแจงของจำนวนจริง)} \\
 &= (a_1, b_1)(a_2 + a_3, b_2 + b_3) && \text{(บทนิยาม 1)} \\
 &= (a_1, b_1)[(a_2, b_2) + (a_3, b_3)] && \text{(บทนิยาม 1)} \\
 &= z_1(z_2 + z_3)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

- ตามที่หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ระบุไว้ว่า
“ถ้า w เป็นรากที่สองของ z แล้ว $-w$ จะเป็นรากที่สองของ z ด้วย และรากที่สอง
ของจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่ศูนย์จะมีเพียงสองจำนวนเท่านั้น”

สามารถพิสูจน์ได้โดยต้องแสดงว่า

1. ถ้า w เป็นรากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน z แล้ว $-w$ จะเป็นรากที่สองของ z ด้วย
2. รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่ศูนย์จะมีเพียงสองจำนวนเท่านั้น

แสดงการพิสูจน์ได้ดังนี้

1. จะแสดงว่า “ถ้า w เป็นรากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน z แล้ว $-w$ จะเป็นรากที่สอง
ของ z ด้วย”

พิสูจน์

ให้ w เป็นรากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน z

นั่นคือ $w^2 = z$ (จากบทนิยาม 6)

เนื่องจาก $(-w)^2 = (-1 \cdot w)^2 = (-1)^2 w^2 = w^2$

นั่นคือ $(-w)^2 = z$

จากบทนิยาม 6 จะได้ $-w$ จะเป็นรากที่สองของ z ด้วย

ดังนั้น ถ้า w เป็นรากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน z แล้ว $-w$ จะเป็นรากที่สองของ z ด้วย

2. จะแสดงว่า “รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่ศูนย์จะมีเพียงสองจำนวนเท่านั้น”
มีขั้นตอนการพิสูจน์ดังนี้

- 1) แสดงว่า “ทุกจำนวนเชิงซ้อนมีรากที่สองเสมอ”
- 2) แสดงว่า “ถ้า w เป็นรากที่สองของ z แล้ว $-w$ เป็นรากที่สองของ z ด้วย”
- 3) แสดงว่า “รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่ศูนย์จะมีเพียงสองรากเท่านั้น”

พิสูจน์

- 1) จะแสดงว่า “ทุกจำนวนเชิงซ้อนมีรากที่สองเสมอ”

ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

เมื่อ r เป็นจำนวนจริงบวก และ θ เป็นจำนวนจริง

จาก $r \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า $\sqrt{r} \in \mathbb{R}^+$

จาก $\theta \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $\frac{\theta}{2} \in \mathbb{R}$

ให้ $w = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$ จะได้ว่า w เป็นจำนวนเชิงซ้อน

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา } w^2 &= \left[\sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \right]^2 \\
 &= r \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \\
 &= r \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) \\
 &= r (\cos \theta + i \sin \theta) \\
 &= z
 \end{aligned}$$

นั่นคือ w เป็นรากที่สองของ z

- 2) จะแสดงว่า “ถ้า w เป็นรากที่สองของ z แล้ว $-w$ เป็นรากที่สองของ z ด้วย”
ให้ w เป็นรากที่สองของ z

จากข้อ 1 จะได้ว่า $-w$ เป็นรากที่สองของ z ด้วย

- 3) จะแสดงว่า “รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่ศูนย์จะมีเพียงสองรากเท่านั้น”
ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่ศูนย์

จากขั้นตอนที่ 1 จะได้ว่า มี w เป็นรากที่สองของ z

จากขั้นตอนที่ 2 จะได้ว่า $-w$ ก็เป็นรากที่สองของ z

ให้ w_0 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นรากที่สองของ z ซึ่ง $w_0 \neq w$ และ $w_0 \neq -w$

จากบทนิยาม 6 จะได้ว่า $(w_0)^2 = z$ ----- (1)

เนื่องจาก w และ $-w$ เป็นรากที่สองของ z

จะได้ว่า $w^2 = z$ และ $(-w)^2 = z$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 (w_0)^2 &= w^2 \\
 (w_0)^2 - w^2 &= 0 \\
 (w_0 - w)(w_0 + w) &= 0
 \end{aligned}$$

นั่นคือ $w_0 - w = 0$ หรือ $w_0 + w = 0$

จะได้ $w_0 = w$ หรือ $w_0 = -w$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $w_0 \neq w$ และ $w_0 \neq -w$

นั่นคือ มี w และ $-w$ เท่านั้น ที่เป็นรากที่สองของ z

ดังนั้น รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่ศูนย์จะมีเพียงสองรากเท่านั้น

- จากคำกล่าวที่ว่าเซตของจำนวนจริงเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อน แต่เมื่อพิจารณาจำนวนจริง เช่น 2 จะได้ว่า $2 \in \mathbb{R}$ แต่ $2 \notin \mathbb{C}$ เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อนนิยามในรูปคู่อันดับ การอธิบายว่าเซตของจำนวนจริงเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อน จะใช้ความรู้เรื่อง ฟังก์ชันสมสัณฐาน (Isomorphic function) โดยจะกำหนดให้ $f: \mathbb{R} \longrightarrow V$ ซึ่งนิยามโดย $f(x) = (x, 0)$ เมื่อ $V \subseteq \mathbb{C}$ และ $V = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 0\}$ การแสดงว่า f สมสัณฐานกับ V จะต้องแสดงว่า
 - f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
 - f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง V
 - $\mathbb{C}$ คงสภาพ (preserve) ภายใต้การบวกและการคูณ โดยแสดงได้ดังนี้
 - ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$\begin{aligned} \text{สมมติ} \quad & f(x_1) = f(x_2) \\ \text{จะได้} \quad & (x_1, 0) = (x_2, 0) \\ \text{ดังนั้น} \quad & x_1 = x_2 \end{aligned}$$
 นั่นคือ ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$
 ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ----- (1)
 - ให้ $y \in V$
 ดังนั้น จะมี $x \in \mathbb{R}$ ที่ $y = (x, 0) = f(x)$
 นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง V ----- (2)
 - ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ
 จะแสดงว่า $f(a+b) = f(a) + f(b)$ และ $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$
 เนื่องจาก

$$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b, 0) \\ &= (a, 0) + (b, 0) \\ &= f(a) + f(b) \end{aligned}$$
 และ

$$\begin{aligned} f(a \cdot b) &= (a \cdot b, 0) \\ &= (a, 0) \cdot (b, 0) \\ &= f(a) \cdot f(b) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(a+b) = f(a) + f(b)$ และ $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$

นั่นคือ $\mathbb{C}$ คงสภาพ (preserve) ภายใต้การบวกและการคูณ ----- (3)

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ว่า f สมสัณฐานกับ V

หรืออาจกล่าวว่า $\mathbb{R}$ สมสัณฐานกับ V

เนื่องจาก $\mathbb{R}$ สมสัณฐานกับ V และ $V \subseteq \mathbb{C}$

จะได้ $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

ดังนั้น จะมีสับเซตของจำนวนเชิงซ้อนที่เหมือนกับเซตของจำนวนจริง แต่สมาชิกในเซตทั้งสองเขียนแสดงต่างกัน

- หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 นำเสนอสัญลักษณ์ i โดยแนะนำว่า $i^2 = -1$ เนื่องจาก
 - การกำหนดให้ $i = \sqrt{-1}$ ดังที่นำเสนอขึ้นโดยทั่วไปนั้น ขัดแย้งกับการเขียนจำนวนจริงในรูปกรณฑ์ ที่นักเรียนได้ศึกษามาแล้วในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ซึ่งจำนวนจริงที่อยู่ภายใต้เครื่องหมายกรณฑ์ที่สองต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์
 - ไม่มีจำนวนจริงใดที่ยกกำลังสองแล้วได้ -1 แต่มีจำนวนเชิงซ้อน $(0, 1)$ และ $(0, -1)$ ซึ่ง $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$ และ $(0, -1)(0, -1) = (-1, 0)$ จึงกล่าวได้ว่า $(0, 1)$ และ $(0, -1)$ เป็นรากที่สองของ -1 โดย -1 เขียนในรูปคู่อันดับได้เป็น $(-1, 0)$ เมื่อเขียนแทนจำนวนเชิงซ้อน $(0, 1)$ ในรูป $a+bi$ จะได้ $0+1i=i$ ในทำนองเดียวกัน เมื่อเขียนแทนจำนวนเชิงซ้อน $(0, -1)$ ในรูป $a+bi$ จะได้ $0+(-1)i=-i$
- นิยามของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน มีความหมายเช่นเดียวกับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง นั่นคือ ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ คือ ระยะทางระหว่างจุด $(0, 0)$ และ (a, b) ในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งเหมือนกับการหาระยะทางระหว่างจุด $(0, 0)$ และ จุด (a, b) ในระนาบ XY ทั้งนี้ สมบัติเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนและสมบัติเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงเป็นดังนี้

สมบัติเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ของ จำนวนเชิงซ้อน	สมบัติเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ของ จำนวนจริง
ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า	ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า
1. $ z ^2 = z\bar{z}$	1. $ x ^2 = x^2$
2. $ z = -z = \bar{z} $	2. $ x = -x $
3. $\left \frac{1}{z}\right = \frac{1}{ z }$ เมื่อ $z \neq 0$	3. $\left \frac{1}{x}\right = \frac{1}{ x }$ เมื่อ $x \neq 0$
4. $ z_1 z_2 = z_1 z_2 $	4. $ xy = x y $
5. $ z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2 $	5. $ x + y \leq x + y $
6. $ z_1 - z_2 \geq z_1 - z_2 $	6. $ x - y \geq x - y $

- ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเรื่องจำนวนเชิงซ้อน ที่ไม่ได้แสดงการพิสูจน์ไว้ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 บทที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน สามารถแสดงการพิสูจน์ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 4

ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

- 1) $|z|^2 = z\bar{z}$
- 2) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- 3) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ เมื่อ $z \neq 0$
- 4) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- 5) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- 6) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

พิสูจน์

3) ให้ $z = a + bi$ และ $z \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad \frac{1}{z} &= \frac{1}{a+bi} \\
 &= \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} \\
 &= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2} \\
 \left| \frac{1}{z} \right| &= \left| \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2} \right| \\
 &= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
 &= \frac{1}{|z|}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ เมื่อ $z \neq 0$

$$\begin{aligned}
 6) \text{ พิจารณา } |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\
 &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\
 &= z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\
 &= |z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1z_2} + |z_2|^2 \\
 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1z_2}) \\
 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})
 \end{aligned}$$

เนื่องจากสำหรับจำนวนเชิงซ้อน w ใด ๆ จะได้ว่า

$$\operatorname{Re}(w) \leq \sqrt{(\operatorname{Re}(w))^2 + (\operatorname{Im}(w))^2} \quad \text{นั่นคือ } \operatorname{Re}(w) \leq |w|$$

$$\text{ดังนั้น } 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq 2|z_1\overline{z_2}| \text{ และ } 2|z_1\overline{z_2}| = 2|z_1||\overline{z_2}| = 2|z_1||z_2|$$

$$\text{จะได้ } 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq 2|z_1||z_2|$$

$$\text{นั่นคือ } |z_1 - z_2|^2 \geq |z_1|^2 - 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$

$$\text{และเนื่องจาก } |z_1|^2 - 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| - |z_2|)^2$$

$$\text{ดังนั้น } |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

ทฤษฎีบท 8

ถ้า $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ แล้วรากที่ n ของ w มีทั้งหมด n รากที่แตกต่างกัน คือ

$$z = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right) \text{ เมื่อ } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

พิสูจน์

สำหรับ $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} z^n &= \left[\sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right) \right]^n \\ &= r (\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)) \\ &= r (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= w \end{aligned}$$

ดังนั้น z เป็นรากที่ n ของ w สำหรับ $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

ต่อไปจะแสดงว่า รากที่ n ของ w ต้องอยู่ในรูป z เท่านั้น

$$\text{จาก } w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

สมมติให้ $t = s(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ เป็นรากที่ n ของ w ดังนั้น $t^n = w$

โดยทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้

$$s^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)) = r (\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{---- (1)}$$

เนื่องจาก $t^n = w$ จะได้ $|t|^n = |w|$

$$s^n = r \quad \text{---- (2)}$$

แทน (2) ใน (1) จะได้

$$\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) = \cos \theta + i \sin \theta$$

ดังนั้น $n\alpha = \theta + 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

นั่นคือ $\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

จาก (2) และ $s \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ จะได้ $s = \sqrt[n]{r}$

และ $t = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เนื่องจาก เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$ ค่าของ $\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ และ $\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ มีเพียง n ค่า

นั่นคือ เมื่อ $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

ดังนั้น $t = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right)$ เมื่อ $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

นั่นคือ สรุปได้ว่า รากที่ n ของ w มีทั้งหมด n รากที่แตกต่างกัน คือ

$$z = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right) \text{ เมื่อ } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

1.7 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทและเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

ในส่วนนี้จะนำเสนอตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน สำหรับรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ซึ่งครูสามารถเลือกนำไปใช้ได้ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดผลประเมินผล

ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

- กำหนดให้ $(3-4x, 6) = (7, 5y+11)$ จงหา $x^y - 1$
- จงหา
 - $(5-3i) + (-9+7i) - (-8-i)$
 - $(2-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}i)i$
 - $\frac{-4-3i}{(1+2i)^2}$
 - $(3-\sqrt{25}i^2+6i)^2 [(-i)^5]^9$
- กำหนดให้ $z^{-1}(4-9i)=i$ จงหา $\bar{z}$
- กำหนดให้ $z=a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a \geq 0$ และ $z^2-3+4i=0$ จงหา z^{-1}
- กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นคำตอบของสมการ $z^2-2z+4=0$ จงหา $|-z_1| \cdot |\overline{-z_2}|$
- กำหนดให้ $z_1=(\sqrt{7}, -\sqrt{21})$ และ $z_2=(\sqrt{21}, 0)$ ซึ่งมี θ_1 และ θ_2 เป็นอาร์กิวเมนต์ที่น้อยที่สุดของ z_1 และ z_2 ตามลำดับ โดยที่ $\theta_1 \geq 0$ และ $\theta_2 \geq 0$ จงหา $\theta_1 - \theta_2$
- กำหนดให้ $z_1=(-1, -1)$ และ $z_2=\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, 4\right)$ จงเขียน $\frac{(z_1)^6}{(z_2)^2}$ ให้อยู่ในรูป $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง
- จงเขียนเวกเตอร์แสดง z ทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับสมการ $z^6 = -i$
- จงหาสมการพหุนามดีกรี 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง มี -2 เป็นสัมประสิทธิ์นำ และมี $1+i$ เป็นคำตอบของสมการ นอกจากนี้ยังมีคำตอบของสมการอีก 2 คำตอบที่เหมือนกับคำตอบของสมการ $x^2 = -1$

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. จาก $(3-4x, 6) = (7, 5y+11)$

จะได้ $3-4x = 7$ และ $6 = 5y+11$

นั่นคือ $x = -1$ และ $y = -1$

ดังนั้น $x^y - 1 = (-1)^{-1} - 1 = -1 - 1 = -2$

2. 1) $(5-3i) + (-9+7i) - (-8-i) = [5+(-9)-(-8)] + [(-3)+7-(-1)]i$
 $= 4+5i$

2) $(2-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}i)i = (4+2\sqrt{2}i-2\sqrt{2}i+2)i$
 $= 6i$

3) วิธีที่ 1 $\frac{-4-3i}{(1+2i)^2} = \frac{-4-3i}{(1+2i)(1+2i)}$
 $= \frac{-4-3i}{1+2i+2i-4}$
 $= \frac{-4-3i}{-3+4i}$
 $= \frac{-4-3i}{-3+4i} \cdot \frac{-3-4i}{-3-4i}$
 $= \frac{(-4-3i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}$
 $= \frac{12+16i+9i-12}{9+16}$
 $= \frac{25i}{25}$
 $= i$

วิธีที่ 2 $\frac{-4-3i}{(1+2i)^2} = \frac{-4-3i}{(1+2i)^2} \cdot \frac{(1-2i)^2}{(1-2i)^2}$
 $= \frac{(-4-3i)(1-4i-4)}{[(1+2i)(1-2i)]^2}$
 $= \frac{(-4-3i)(-3-4i)}{(1^2+2^2)^2}$

$$= \frac{12 + 16i + 9i - 12}{25}$$

$$= \frac{25i}{25}$$

$$= i$$

$$\begin{aligned} 4) \quad (3 - \sqrt{25i^2} + 6i)^2 [(-i)^5]^{-9} &= (3 + 5 + 6i)^2 (-i)^{45} \\ &= (8 + 6i)^2 (-i) \\ &= (64 + 96i - 36)(-i) \\ &= 96 - 28i \end{aligned}$$

$$3. \text{ จาก } z^{-1}(4 - 9i) = i$$

$$\text{จะได้ } \frac{4 - 9i}{z} = i$$

$$z = \frac{4 - 9i}{i}$$

$$z = \frac{4 - 9i}{i} \cdot \frac{-i}{-i}$$

$$z = -9 - 4i$$

$$\text{ดังนั้น } \bar{z} = -9 + 4i$$

$$4. \text{ จาก } z^2 - 3 + 4i = 0$$

$$\text{จะได้ } z^2 = 3 - 4i$$

เมื่อเทียบกับ $a + bi$ ในทฤษฎีบท 2 จะได้ $a = 3, b = -4$ และ $r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

เนื่องจาก $b < 0$ จะได้ว่ารากที่สองของ $3 - 4i$ คือ $\pm \left(\sqrt{\frac{5+3}{2}} - \sqrt{\frac{5-3}{2}}i \right) = \pm(2 - i)$

เนื่องจาก $a \geq 0$ จะได้ว่า $z = 2 - i$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } z^{-1} &= \frac{1}{2 - i} \\ &= \frac{1}{2 - i} \cdot \frac{2 + i}{2 + i} \\ &= \frac{2 + i}{2^2 + 1^2} \\ &= \frac{2 + i}{5} \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \end{aligned}$$

5. จาก $z^2 - 2z + 4 = 0$

เนื่องจาก $(-2)^2 - 4(1)(4) = -12$ ซึ่ง $-12 < 0$

จะได้ว่า คำตอบของสมการพหุนามนี้ คือ $\frac{2 \pm \sqrt{-12}i}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$

เนื่องจาก z_1 และ z_2 เป็นคำตอบของสมการ

จะได้ว่า $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ และ $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ หรือ $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ และ $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

วิธีที่ 1 จะได้ $|z_1| = |z_2| = 2$

เนื่องจาก $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

จะได้ $|-z_1| = |z_1| = 2$

และ $|\bar{z}_2| = |z_2| = 2$

ดังนั้น $|-z_1||\bar{z}_2| = 2 \times 2 = 4$

วิธีที่ 2 เนื่องจาก $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

จะได้ $|-z_1||\bar{z}_2| = |z_1||z_2|$

เมื่อ $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ และ $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

จะได้ $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

และ $|z_2| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

ดังนั้น $|-z_1||\bar{z}_2| = 2 \times 2 = 4$ ----- (1)

เมื่อ $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ และ $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

จะได้ $|z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

และ $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

ดังนั้น $|-z_1||\bar{z}_2| = 2 \times 2 = 4$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $|-z_1||\bar{z}_2| = 4$

6. จาก $z_1 = (\sqrt{7}, -\sqrt{21})$ ซึ่งมี θ_1 เป็นอาร์กิวเมนต์ที่น้อยที่สุดของ z_1 โดยที่ $\theta_1 \geq 0$

ให้ $r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ z_1 จะได้ $\tan \theta_1 = \frac{-\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = -\sqrt{3}$

เนื่องจาก $(\sqrt{7}, -\sqrt{21})$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 4

จะได้ว่า θ_1 ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $\tan \theta_1 = -\sqrt{3}$ คือ $\frac{5\pi}{3}$

$$\text{ดังนั้น } \theta_1 = \frac{5\pi}{3}$$

จาก $z_2 = (\sqrt{21}, 0)$ ซึ่งมี θ_2 เป็นอาร์กิวเมนต์ที่น้อยที่สุดของ z_2 โดยที่ $\theta_2 \geq 0$

ให้ $r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ z_2 จะได้ $\tan \theta_2 = \frac{0}{\sqrt{21}} = 0$

เนื่องจาก $(\sqrt{21}, 0)$ เป็นจุดที่อยู่บนแกนจริง

จะได้ว่า θ_2 ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $\tan \theta_2 = 0$ คือ 0

$$\text{ดังนั้น } \theta_1 - \theta_2 = \frac{5\pi}{3} - 0 = \frac{5\pi}{3}$$

7. ให้ $r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $z_1 = (-1, -1)$

$$\text{จะได้ } r_1 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

เนื่องจาก $\tan \theta_1 = \frac{-1}{-1} = 1$ และ $(-1, -1)$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 3

จะได้ว่า θ_1 ค่าหนึ่งที่ทำให้ $\tan \theta_1 = 1$ คือ $\frac{5\pi}{4}$

$$\text{ดังนั้น รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ } z_1 \text{ คือ } z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (z_1)^6 &= (\sqrt{2})^6 \left(\cos \frac{30\pi}{4} + i \sin \frac{30\pi}{4} \right) \\ &= 8 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

ให้ $r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $z_2 = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}, 4\right)$

$$\text{จะได้ } r_2 = \sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4^2} = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

เนื่องจาก $\tan \theta_2 = \frac{4}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$ และ $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, 4\right)$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 1

จะได้ว่า θ_2 ค่าหนึ่งที่ทำให้ $\tan \theta_2 = \sqrt{3}$ คือ $\frac{\pi}{3}$

ดังนั้น รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ z_2 คือ $z_2 = \frac{8}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (z_2)^2 &= \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \frac{64}{3} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \frac{(z_1)^6}{(z_2)^2} &= \frac{8}{\frac{64}{3}} \left[\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ &= \frac{3}{8} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \\ &= \frac{3}{8} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{3}{16}i \end{aligned}$$

8. ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่ 6 ของ $-i$

$$\text{จะได้ } z^6 = -i$$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ $z^6 = r^6(\cos 6\theta + i \sin 6\theta)$

$$\text{และเนื่องจาก } -i = 1 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\text{ดังนั้น } r^6(\cos 6\theta + i \sin 6\theta) = 1 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

จะได้ว่า $r^6 = 1$ และ $6\theta - \frac{3\pi}{2} = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

นั่นคือ $r = 1$ และ $\theta = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $z = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}\right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เมื่อแทน k ด้วย 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 จะแทน z ด้วย z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 และ z_6 ตามลำดับ ดังนี้

เมื่อ $k=0$ จะได้ $z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

เมื่อ $k=1$ จะได้ $z_2 = \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}$

เมื่อ $k=2$ จะได้ $z_3 = \cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}$

เมื่อ $k=3$ จะได้ $z_4 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}$

เมื่อ $k=4$ จะได้ $z_5 = \cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}$

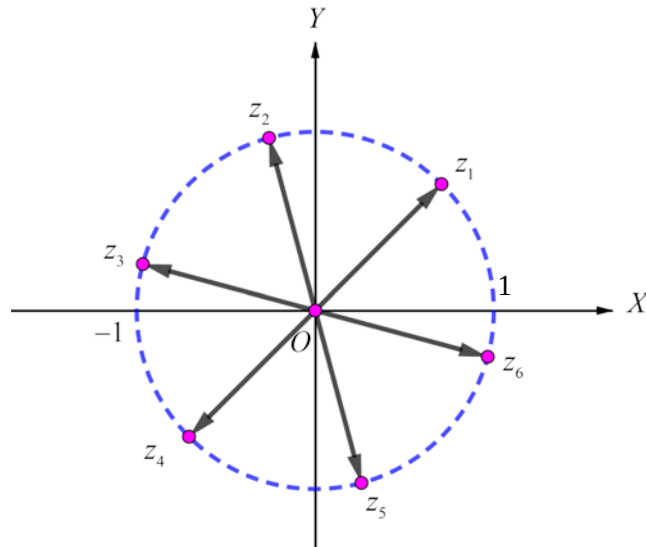
เมื่อ $k=5$ จะได้ $z_6 = \cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}$

เมื่อแทน k ด้วยจำนวนเต็มอื่น ๆ จะได้ จำนวนเชิงซ้อนที่ซ้ำกับ z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 หรือ z_6

แสดงว่ารากที่ 6 ของ $-i$ ที่แตกต่างกันมี 6 จำนวนเท่านั้น คือ z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 และ z_6

เวกเตอร์ที่แสดงรากที่ 6 ของ $-i$ มีขนาด 1 หน่วย และเวกเตอร์แต่ละคู่ที่อยู่ในลำดับที่ติดกัน

ทำมุมขนาด $\frac{\pi}{3}$ หรือ 60° เท่ากันทุกคู่ ซึ่งเขียนแสดงได้ดังนี้



9. เนื่องจาก $1+i$ เป็นคำตอบของสมการ และจากทฤษฎีบท 13 จะได้ว่า $1-i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย

เนื่องจาก สมการนี้มีคำตอบของสมการอีก 2 คำตอบที่เหมือนกับคำตอบของสมการ $x^2 = -1$ ซึ่งคำตอบของสมการ $x^2 = -1$ คือ $-i$ และ i

จะได้ว่า $-i$ และ i เป็นคำตอบของสมการนี้ด้วย

นั่นคือ สมการพหุนามดีกรี 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง มี -2 เป็นสัมประสิทธิ์นำ และมี $1+i, 1-i, i$ และ $-i$ เป็นคำตอบของสมการ คือ

$$-2[x-(1+i)][x-(1-i)](x+i)(x-i) = 0$$

$$-2[(x-1)-i][(x-1)+i](x^2+1) = 0$$

$$-2[(x-1)^2+1](x^2+1) = 0$$

$$-2(x^2-2x+2)(x^2+1) = 0$$

$$-2(x^4-2x^3+3x^2-2x+2) = 0$$

$$-2x^4+4x^3-6x^2+4x-4 = 0$$

ดังนั้น $-2x^4+4x^3-6x^2+4x-4=0$ เป็นสมการพหุนามดีกรี 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง มี -2 เป็นสัมประสิทธิ์นำ และมี $1+i$ เป็นคำตอบของสมการ นอกจากนี้ยังมีคำตอบของสมการอีก 2 คำตอบที่เหมือนกับคำตอบของสมการ $x^2 = -1$

บทที่ 2

หลักการนับเบื้องต้น

การศึกษาเรื่องหลักการนับเบื้องต้นมีความสำคัญต่อการแก้ปัญหาในชีวิตจริง ซึ่งจะพบปัญหาที่ใช้ความรู้เกี่ยวกับการนับอยู่เสมอ เช่น การวางแผนการจัดการแข่งขันกีฬา การกำหนดป้ายทะเบียนรถยนต์นั่งส่วนบุคคล การบริหารจัดการเกี่ยวกับการออกตั๋วชมการแสดง ความรู้เกี่ยวกับหลักการนับ เช่น หลักการบวก หลักการคูณ การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่ จะช่วยให้สามารถนับจำนวนสิ่งต่าง ๆ ได้สะดวกขึ้น โดยเฉพาะเมื่อสิ่งที่ต้องการนับมีจำนวนมาก และมีเงื่อนไขซับซ้อน นอกจากนี้ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบททวินามซึ่งเป็นการใช้ความรู้เกี่ยวกับหลักการนับ เพื่อช่วยให้การกระจาย $(x + y)^n$ เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้รวดเร็วขึ้น โดยในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 บทที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น จะนำเสนอหลักการบวกและหลักการคูณ การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด การจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด และทฤษฎีบททวินาม

ในบทเรียนนี้มุ่งให้นักเรียนบรรลุตัวชี้วัดตามสาระการเรียนรู้แกนกลาง บรรลุผลการเรียนรู้ตามสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม และบรรลุจุดมุ่งหมายดังต่อไปนี้



ตัวชี้วัด ผลการเรียนรู้ สาระการเรียนรู้แกนกลาง และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

ตัวชี้วัด

- เข้าใจและใช้หลักการบวกและการคูณ การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่ในการแก้ปัญหา

สาระการเรียนรู้แกนกลาง

- หลักการบวกและการคูณ
- การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นกรณีที่สิ่งของแตกต่างกันทั้งหมด
- การจัดหมู่กรณีที่สิ่งของแตกต่างกันทั้งหมด

ผลการเรียนรู้

- เข้าใจและใช้หลักการบวกและการคูณ การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่ในการแก้ปัญหา

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

- หลักการบวกและการคูณ
- การเรียงสับเปลี่ยน
 - การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น
 - การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม
 กรณีที่สิ่งของแตกต่างกันทั้งหมด
- การจัดหมู่กรณีที่มีสิ่งของแตกต่างกันทั้งหมด
- ทฤษฎีบททวินาม



จุดมุ่งหมาย

1. ใช้หลักการนับเบื้องต้นในการแก้ปัญหา
2. ใช้วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นกรณีที่มีสิ่งของแตกต่างกันทั้งหมดในการแก้ปัญหา
3. ใช้วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นกรณีที่มีสิ่งของไม่แตกต่างกันทั้งหมดในการแก้ปัญหา
4. ใช้วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมกรณีที่มีสิ่งของแตกต่างกันทั้งหมดในการแก้ปัญหา
5. ใช้วิธีจัดหมู่กรณีที่มีสิ่งของแตกต่างกันทั้งหมดในการแก้ปัญหา
6. ใช้ทฤษฎีบททวินามในการแก้ปัญหา



ความรู้ก่อนหน้า

ความรู้เกี่ยวกับจำนวนและหลักการนับเบื้องต้นในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น



ipst.me/8449

2.1 เนื้อหาสาระ

1. หลักการบวก (กรณีทั่วไป)

ในการทำงานอย่างหนึ่ง ถ้าสามารถแบ่งวิธีทำงานออกเป็น k กรณี โดยที่

กรณีที่ 1 สามารถทำได้ n_1 วิธี

กรณีที่ 2 สามารถทำได้ n_2 วิธี

⋮

กรณีที่ k สามารถทำได้ n_k วิธี

ซึ่งวิธีการทำงานในทั้ง k กรณีไม่ซ้ำซ้อนกัน และการทำงานในแต่ละกรณีทำให้งานเสร็จสมบูรณ์ แล้วจะสามารถทำงานนี้ได้ทั้งหมด $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ วิธี

2. หลักการคูณ (กรณีทั่วไป)

ในการทำงานอย่างหนึ่ง ถ้าสามารถแบ่งขั้นตอนการทำงานออกเป็น k ขั้นตอน ซึ่งต้องทำต่อเนื่องกัน โดยที่

ขั้นตอนที่ 1 สามารถทำได้ n_1 วิธี

ในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่ 1 สามารถทำขั้นตอนที่ 2 ต่อไปได้ n_2 วิธี

ในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่ 1 และขั้นตอนที่ 2 สามารถทำขั้นตอนที่ 3 ต่อไปได้ n_3 วิธี

⋮

ในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่ 1 ถึงขั้นตอนที่ $k-1$ สามารถทำขั้นตอนที่ k ต่อไปได้ n_k วิธี
แล้วจะสามารถทำงานนี้ได้ทั้งหมด $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ วิธี

3. บทนิยาม 1

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

แฟกทอเรียล n คือ การคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n!$ (อ่านว่า “เอ็น แฟกทอเรียล”)

นั่นคือ $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$

หรือ $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$

และให้ $0! = 1$

4. ให้ $P_{n,r}$ แทนจำนวนวิธีในการนำสิ่งของ r ชิ้น จากสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น โดยที่

$0 \leq r \leq n$ มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น จะได้ว่า $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

5. ถ้ามีสิ่งของ n ชิ้น ในจำนวนนี้มี n_1 ชิ้นที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่หนึ่ง มี n_2 ชิ้นที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่สอง ... และมี n_k ชิ้นที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ k โดยที่ $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ แล้วจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n ชิ้น ดังเงื่อนไขข้างต้น เป็น $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$ วิธี
6. จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น เท่ากับ $(n-1)!$ วิธี
7. ให้ $C_{n,r}$ หรือ $\binom{n}{r}$ แทนจำนวนวิธีเลือกสิ่งของ r ชิ้น จากสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น เมื่อ $0 \leq r \leq n$ มาจัดหมู่ จะได้ว่า $C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ วิธี
8. จำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น โดยเลือกคราวละ r ชิ้น จะเท่ากับจำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น โดยเลือกคราวละ $n-r$ ชิ้น
9. **ทฤษฎีบททวินาม**
ให้ x, y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{r}x^{n-r}y^r + \dots + \binom{n}{n}y^n$$
เรียก $\binom{n}{r}$ โดยที่ $r \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ว่า สัมประสิทธิ์ทวินาม

2.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน



กิจกรรม : เลขหมายโทรศัพท์

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่องหลักการนับเบื้องต้น เพื่อให้นักเรียนเห็นความสำคัญของหลักการนับเบื้องต้น

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูสุ่มถามเลขหมายโทรศัพท์เคลื่อนที่ของนักเรียนในชั้นเรียน 4–5 คน และบันทึกคำตอบที่ได้ลงบนกระดาน แล้วชี้แนะให้นักเรียนสังเกตเห็นว่าเลขหมายโทรศัพท์เคลื่อนที่ที่จะขึ้นต้นด้วยตัวเลขต่าง ๆ กัน จากนั้นให้นักเรียนอ่านสถานการณ์ต่อไปนี้

ในปัจจุบันเลขหมายโทรศัพท์เคลื่อนที่ที่จะขึ้นต้นด้วย 08, 09 หรือ 01 และตามด้วยเลขโดดอีก 8 ตัว หรือขึ้นต้นด้วย 061, 062, 063, 064 หรือ 065 และตามด้วยเลขโดดอีก 7 ตัว

2. ครูให้นักเรียนอภิปรายร่วมกันว่า ถ้าต้องการทราบจำนวนเลขหมายโทรศัพท์เคลื่อนที่ที่เป็นไปได้ในรูปแบบข้างต้น จะมีได้ทั้งหมดกี่เลขหมายและมีวิธีการนับอย่างไร

หมายเหตุ

คำถามนี้ต้องการให้นักเรียนเห็นภาพว่า การนับจำนวนเลขหมายโทรศัพท์เคลื่อนที่ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขในข้อ 1 อาจไม่สะดวกที่จะนับโดยตรงเหมือนกับการนับจำนวนสิ่งของที่มีไม่มากและมีเงื่อนไขไม่ซับซ้อน เช่น การนับจำนวนนักเรียนในห้อง จำนวนไม้ยืนต้นในบริเวณโรงเรียน หรือจำนวนหนังสือในกระเป๋านักเรียน ดังนั้น การใช้ความรู้เกี่ยวกับหลักการนับเบื้องต้นจะช่วยให้สามารถนับจำนวนสิ่งของต่าง ๆ ได้สะดวกขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อสิ่งของที่นับมีจำนวนมากและมีเงื่อนไขที่ซับซ้อน

หลักการบวกและหลักการคูณ



กิจกรรม : รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

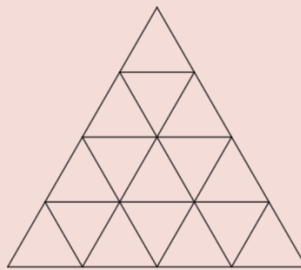
จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง หลักการบวก

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูจับคู่ให้นักเรียนแบบละความสามารถ แล้วให้นักเรียนแต่ละคู่ร่วมกันพิจารณาสถานการณ์ต่อไปนี้

นำกระเบื้องรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่แต่ละด้านยาว 1 หน่วย จำนวน 16 แผ่น มาเรียงดังรูป



จงหาว่าในการจัดเรียงกระเบื้องนี้ มีรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้านแตกต่างกันกี่ขนาด และแต่ละขนาดประกอบด้วยรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ากี่รูป

แนวคำตอบ

มีรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 4 ขนาด ได้แก่

ขนาดที่ 1 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่แต่ละด้านยาว 1 หน่วย มี 16 รูป

ขนาดที่ 2 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่แต่ละด้านยาว 2 หน่วย มี 7 รูป

ขนาดที่ 3 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่แต่ละด้านยาว 3 หน่วย มี 3 รูป

ขนาดที่ 4 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่แต่ละด้านยาว 4 หน่วย มี 1 รูป

หมายเหตุ

ในกรณีที่นักเรียนแก้ปัญหาโดยใช้การเรียงกระเบื้อง ครูควรเตรียมรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าในข้อ 1 ไว้หลาย ๆ รูป

2. จากข้อ 1 ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายว่า จากการจัดเรียงกระเบื้องดังกล่าว มีจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมดกี่รูป และหาได้อย่างไร

แนวคำตอบ

มีรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมด 27 รูป หาได้โดยนำจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าในแต่ละด้านยาว 1, 2, 3 และ 4 หน่วย มารวมกัน

3. ครูสรุปการแก้ปัญหาข้างต้นโดยใช้การนับ โดยมีกรณีที่เป็นไปได้ 4 กรณี ตามขนาดของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าในแต่ละกรณีไม่ซ้ำซ้อนกัน จากนั้นจึงนำจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าในแต่ละกรณีมาบวกกันเพื่อหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมด

หมายเหตุ

ครูอาจเปลี่ยนสถานการณ์ที่กำหนดให้เป็นสถานการณ์อื่นได้ เช่น การเลือกบริษัทผู้ให้บริการสำหรับเดินทางกลับเชียงใหม่ของบัวตองในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2



กิจกรรม : การเดินทางของปิติ

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง หลักการคูณ

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูจับคู่ให้นักเรียนแบบละความสามารถ แล้วให้นักเรียนแต่ละคู่ร่วมกันพิจารณาสถานการณ์ต่อไปนี้

ปิติต้องการเดินทางจากบ้านไปโรงเรียน ซึ่งสามารถไปทางถนนได้ 3 เส้นทาง หรือไปทางลำคลองได้ 2 เส้นทาง ถ้าปิติต้องการเดินทางจากบ้านไปยังโรงเรียนโดยใช้เส้นทางตามถนนหรือลำคลองเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง แล้วปิติจะเดินทางได้ทั้งหมดกี่เส้นทาง

2. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่หาคำตอบของสถานการณ์ในข้อ 1 พร้อมทั้งอธิบายแนวทางการหาคำตอบ

แนวคำตอบ

นักเรียนอาจหาคำตอบโดยใช้หลักการบวก ซึ่งจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า การเดินทางจากบ้านไปยังโรงเรียนสามารถไปทางถนนได้ 3 เส้นทาง และไปทางลำคลองได้ 2 เส้นทาง เนื่องจากเส้นทางถนนและเส้นทางลำคลองไม่ซ้ำซ้อนกัน ดังนั้น ปิติจะเดินทางได้ทั้งหมด $3+2=5$ เส้นทาง

3. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่พิจารณาอีกสถานการณ์หนึ่ง ดังนี้

ถ้าปิติต้องการแวะตลาดซึ่งอยู่ระหว่างทางจากบ้านไปโรงเรียน โดยเส้นทางจากบ้านไปตลาดมี 2 เส้นทาง และเส้นทางจากตลาดไปโรงเรียนมี 3 เส้นทาง แล้วปิติจะเดินทางได้ทั้งหมดกี่เส้นทาง

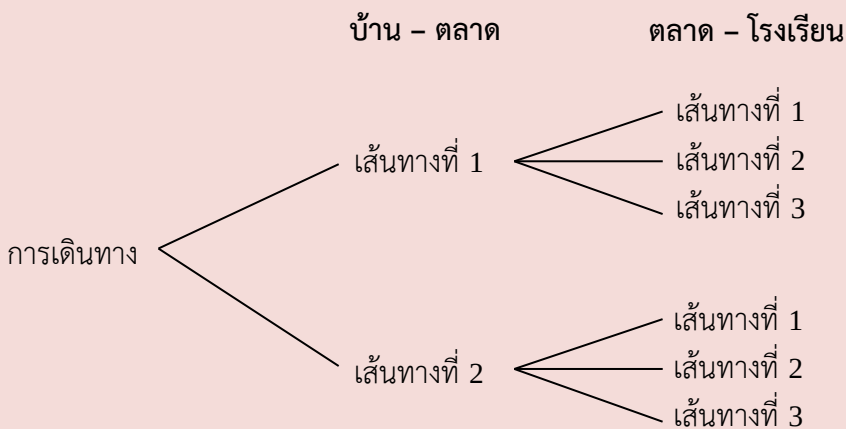
4. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่หาคำตอบของสถานการณ์ในข้อ 3 พร้อมทั้งอธิบายแนวทางการหาคำตอบ

แนวคำตอบ

นักเรียนอาจเขียนแผนภาพแทนสถานการณ์ ดังนี้



จากแผนภาพดังกล่าว นักเรียนอาจแสดงโดยใช้แผนภาพต้นไม้ ดังนี้



จากแผนภาพจะได้ว่าปิติจะเดินทางได้ทั้งหมด 6 เส้นทาง

5. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบที่ได้ในข้อ 4 และวิธีการหาคำตอบ โดยครูอาจถามนักเรียนในประเด็นต่อไปนี้

- การเดินทางจากบ้านไปโรงเรียนโดยแวะตลาดของปิติมีกี่ขั้นตอนย่อย เป็นขั้นตอนย่อยใดบ้าง และแต่ละขั้นตอนย่อยต่อเนื่องกันหรือไม่
- ในแต่ละขั้นตอนย่อยมีเส้นทางให้เลือกเดินทางกี่เส้นทาง

แนวคำตอบ

มี 2 ขั้นตอนย่อยที่ต่อเนื่องกัน ได้แก่ ขั้นตอนย่อยที่ 1 เดินทางจากบ้านไปตลาดมีได้ 2 เส้นทาง และขั้นตอนย่อยที่ 2 เดินทางจากตลาดไปโรงเรียน มีได้ 3 เส้นทาง

6. จากคำตอบในข้อ 4 และ 5 ครูควรอธิบายเพิ่มเติมว่าในการเดินทางจากบ้านไปโรงเรียนของปิติโดยต้องแวะที่ตลาด ประกอบด้วยการเดินทาง 2 ขั้นตอนย่อย คือ การเดินทางจากบ้านไปตลาด และการเดินทางจากตลาดไปโรงเรียน ซึ่งการเดินทางทั้งสองขั้นตอนนี้ต่อเนื่องกัน สำหรับแต่ละเส้นทางที่ปิติเลือกใช้ในการเดินทางจากบ้านไปตลาดจะสามารถเลือกเส้นทางสำหรับเดินทางจากตลาดไปโรงเรียนได้อีก 3 เส้นทาง ดังนั้น ปิติจะเดินทางได้ทั้งหมด $2 \times 3 = 6$ เส้นทาง

7. ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับความแตกต่างของการหาจำนวนเส้นทางการเดินทางของปิติตามสถานการณ์ในข้อ 1 และ 3

แนวคำตอบ

จากสถานการณ์ในข้อ 1 การเดินทางแต่ละวิธี ไม่ว่าจะไปทางถนนหรือไปทางลำคลองสามารถทำให้การเดินทางนั้นถึงจุดหมายได้ ดังนั้น การหาจำนวนเส้นทางการเดินทางทั้งหมดของปิติในสถานการณ์นี้จึงใช้หลักการบวก

แต่สำหรับสถานการณ์ในข้อ 3 ปิติจะต้องเดินทางจากบ้านไปตลาดก่อน แล้วจึงเดินทางต่อไปโรงเรียน นั่นคือ การเดินทางจากบ้านไปโรงเรียนของปิติต้องประกอบด้วย 2 ขั้นตอนย่อยเสมอ จะได้ว่า การหาจำนวนเส้นทางการเดินทางทั้งหมดของปิติในสถานการณ์นี้จึงใช้หลักการคูณจึงจะทำให้งานเสร็จสมบูรณ์

หมายเหตุ

ครูอาจเปลี่ยนสถานการณ์ที่กำหนดให้เป็นสถานการณ์อื่นได้ เช่น ปัญหาการเดินทางจากกรุงเทพฯ ไปเชียงใหม่ของบัวตองที่ระหว่างทางจะต้องแวะเยี่ยมญาติที่นครสวรรค์ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ในการสอนเนื้อหานี้ ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนวิเคราะห์โจทย์เอง โดยครูอาจแนะนำให้นักเรียนพิจารณาว่าโจทย์กำหนดสิ่งใด ต้องการให้หาสิ่งใด ต้องทราบสิ่งใดบ้างจึงจะหาคำตอบที่ต้องการได้ การแก้ปัญหาจำเป็นต้องมีขั้นตอนย่อยใดบ้าง ขั้นตอนเหล่านั้นต่อเนื่องกันหรือไม่ และในการแก้ปัญหานั้นต้องใช้หลักการบวกหรือหลักการคูณ โดยในขั้นต้นครูควรยกตัวอย่างให้นักเรียนเห็นชัดเจนว่าเป็นตัวอย่างที่ใช้หลักการบวกในการแก้ปัญหา (เช่น ตัวอย่างที่ 1 – 4) หรือตัวอย่างที่ใช้หลักการคูณในการแก้ปัญหา (เช่น ตัวอย่างที่ 5 – 12)
 - การแก้ปัญหาเกี่ยวกับหลักการนับเบื้องต้นบางปัญหาอาจต้องใช้ทั้งหลักการบวกและหลักการคูณ เช่น ในตัวอย่างที่ 13 ซึ่งเป็นการสร้างจำนวนเต็มบวกห้าหลักที่เป็นจำนวนคู่ จะต้องแยกพิจารณาเป็น 2 กรณี จะใช้หลักการคูณเพื่อหาจำนวนตามเงื่อนไขที่กำหนดในแต่ละกรณี และใช้หลักการบวกเพื่อหาจำนวนเต็มบวกห้าหลักที่เป็นจำนวนคู่ทั้งหมดจากทั้ง 2 กรณี
- ทั้งนี้ สำหรับกรณีที่ 2 ขั้นตอนที่ 2 จะมีการพิจารณาแตกต่างจากข้ออื่น เนื่องจากต้องการสร้างจำนวนเต็มบวกห้าหลัก ดังนั้น หลังจากเลือกเลขโดดเป็นหลักหน่วยแล้ว จึงเลือกเลขโดด 1 ตัว เป็นหลักหมื่นก่อน ซึ่งจะไม่สามารถเลือกเลขโดด 0 และเลขโดดที่ซ้ำกับหลักหน่วยที่เลือกในขั้นตอนที่ 1 ได้
- ปัญหาเกี่ยวกับหลักการนับเบื้องต้นบางปัญหามีวิธีหาคำตอบมากกว่า 1 วิธี เช่น ตัวอย่างที่ 3 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 แสดงการหาคำตอบโดยใช้การแจงนับและหลักการบวกนั้น สามารถหาคำตอบอีกวิธีหนึ่งได้ดังนี้

กรณีที่ 1 เลขโดดทั้งสองหลักเป็นจำนวนคู่

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว เป็นหลักหน่วยได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว เป็นหลักสิบได้ 4 วิธี

จากหลักการคูณ จะได้ว่า จำนวนเต็มบวกสองหลักที่ผลบวกของเลขโดดทั้งสองหลักเป็นจำนวนคู่โดยเลขโดดทั้งสองหลักเป็นจำนวนคู่

มี $5 \times 4 = 20$ จำนวน

กรณีที่ 2 เลขโดดทั้งสองหลักเป็นจำนวนคู่

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว เป็นหลักหน่วยได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว เป็นหลักสิบได้ 5 วิธี

จากหลักการคูณ จะได้ว่า จำนวนเต็มบวกสองหลักที่ผลบวกของเลขโดดทั้งสองหลักเป็นจำนวนคู่โดยเลขโดดทั้งสองหลักเป็นจำนวนคู่

มี $5 \times 5 = 25$ จำนวน

จากหลักการบวก จึงได้ว่า จำนวนเต็มบวกสองหลักที่ผลบวกของเลขโดดทั้งสองหลักเป็นจำนวนคู่ มีทั้งหมด $20 + 25 = 45$ จำนวน

- ในการแก้ปัญหาบางปัญหา สามารถสลับขั้นตอนการทำงานได้ แต่ต้องพิจารณาให้ครบทุกขั้นตอน เช่น ตัวอย่างที่ 5 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 แสดงการหาคำตอบโดยการเลือกอาหารคาวก่อนเลือกขนมนั้น สามารถหาคำตอบโดยการเลือกขนมก่อนเลือกอาหารคาวก็ได้ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

สมมติให้อาหารคาว 4 อย่าง ได้แก่ ค1, ค2, ค3 และ ค4

และขนม 3 อย่าง ได้แก่ ข1, ข2 และ ข3

ในการเลือกสั่งอาหารประกอบด้วย 2 ขั้นตอนที่ต่อเนื่องกัน คือ

ขั้นตอนที่ 1 เลือกขนม ซึ่งเลือกได้ 3 แบบ

ขั้นตอนที่ 2 เลือกอาหารคาว ซึ่งเลือกได้ 4 แบบ

จากหลักการคูณ จึงได้ว่า ลูกค้าสามารถเลือกสั่งอาหารได้ทั้งหมด $3 \times 4 = 12$ แบบ

ทั้งนี้ บางปัญหาไม่สามารถสลับขั้นตอนการทำงานได้ เช่น ตัวอย่างที่ 13

- ในการหาคำตอบของปัญหาในตัวอย่างที่ 7 นั้น งานจะเสร็จสมบูรณ์เมื่อนักเรียนทั้งสามคนเข้าและออกห้องประชุม ดังนั้น ควรเริ่มจากหาจำนวนวิธีการเข้าและออกห้องประชุมของนักเรียนแต่ละคน จากนั้นให้นำจำนวนวิธีการเข้าและออกของนักเรียนแต่ละคนมาคูณกันเพื่อให้งานเสร็จสมบูรณ์



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

- การแก้ปัญหาเกี่ยวกับการสร้างรูปสามเหลี่ยมจากจุดที่กำหนดในแบบฝึกหัด 2.1 ข้อ 4 นั้น นักเรียนควรพิจารณาเป็นรายกรณี ซึ่งจะได้ดังนี้

กรณีที่ 1 รูปสามเหลี่ยมมีจุดยอดอยู่บนด้าน AB , BC และ AC

กรณีที่ 2 รูปสามเหลี่ยมมีจุดยอด 2 จุด อยู่บนด้าน AB

กรณีที่ 3 รูปสามเหลี่ยมมีจุดยอด 2 จุด อยู่บนด้าน AC

กรณีที่ 4 รูปสามเหลี่ยมมีจุดยอด 2 จุด อยู่บนด้าน BC

จะเห็นว่า กรณีที่ 2 – 4 เป็นกรณีที่จุดยอดสองจุดอยู่บนด้านเดียวกัน และจุดยอดจุดที่สามอยู่บนด้านอื่น ๆ

นอกจากนี้ นักเรียนที่ได้เรียนเกี่ยวกับการจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดมาแล้ว อาจใช้ความรู้เรื่องการจัดหมู่ในการแก้ปัญหาได้ดังนี้

กรณีที่ 1 รูปสามเหลี่ยมมีจุดยอดอยู่บนด้าน AB , BC และ AC มีได้

$$\binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{3}{1} = 18 \text{ รูป}$$

กรณีที่ 2 รูปสามเหลี่ยมมีจุดยอด 2 จุด อยู่บนด้าน AB มีได้ $\binom{3}{2} \times \binom{5}{1} = 15$ รูป

กรณีที่ 3 รูปสามเหลี่ยมมีจุดยอด 2 จุด อยู่บนด้าน AC มีได้ $\binom{3}{2} \times \binom{5}{1} = 15$ รูป

กรณีที่ 4 รูปสามเหลี่ยมมีจุดยอด 2 จุด อยู่บนด้าน BC มีได้ $\binom{2}{2} \times \binom{6}{1} = 6$ รูป

ดังนั้น สร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดที่กำหนดให้เป็นจุดยอดได้ $18 + 15 + 15 + 6 = 54$ รูป

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด



กิจกรรม : เรียงแถวถ่ายรูป (1)

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด เพื่อให้นักเรียนเข้าใจแนวคิดของจำนวนวิธีในการนำสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูขอนักเรียนเป็นอาสาสมัครจำนวน 3 คน ออกมาหน้าชั้นเรียนและให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดาน โดยกำหนดตำแหน่งที่ 1, 2 และ 3 เพื่อถ่ายรูป

ตำแหน่งที่ 1

ตำแหน่งที่ 2

ตำแหน่งที่ 3

2. ครูกำหนดให้นักเรียนที่ยืนในตำแหน่งที่ 1, 2 และ 3 คือ A, B และ C ตามลำดับ ซึ่งจะเขียนแสดงการยืนเรียงแถวหน้ากระดานเพื่อถ่ายรูปของอาสาสมัครทั้งสามคนได้เป็น

A	B	C
3. ครูให้นักเรียนในห้องร่วมกันบอกวิธีการยืนเรียงแถวหน้ากระดานเพื่อถ่ายรูปของอาสาสมัครทั้งสามคนที่แตกต่างจากการยืนในข้อ 2 โดยอาสาสมัครทั้งสามคนสลับตำแหน่งในการยืนตามที่นักเรียนในห้องบอก และครูช่วยบันทึกผลไว้บนกระดานเพื่อตรวจสอบ ให้นักเรียนทำซ้ำไปเรื่อย ๆ จนไม่สามารถหาวิธีการยืนที่แตกต่างจากผลที่บันทึกไว้แล้ว

แนวคำตอบ

ถ้าให้วิธีการยืนเรียงแถวหน้ากระดานเพื่อถ่ายรูปของอาสาสมัครทั้งสามคนในข้อ 1 เป็นวิธีที่ 1 แล้วจะได้วิธีการยืนของอาสาสมัครทั้งสามคนที่แตกต่างจากวิธีที่ 1 ดังนี้

วิธีที่ 2	A	C	B
วิธีที่ 3	B	A	C
วิธีที่ 4	B	C	A
วิธีที่ 5	C	A	B
วิธีที่ 6	C	B	A

4. ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายวิธีการหาจำนวนวิธีการยืนของอาสาสมัครทั้งสามคนในข้อ 3 ว่าใช้วิธีการใดและมีจำนวนวิธีการยืนที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี และนักเรียนมีวิธีอื่นในการหาจำนวนวิธีการยืนของอาสาสมัครทั้งสามคนที่แตกต่างจากวิธีดังกล่าวหรือไม่ อย่างไร

แนวคำตอบ

ในข้อ 3 ใช้การแจกแจงในการหาจำนวนวิธีการยืนของอาสาสมัครทั้งสามคน และมีจำนวนวิธีจัดนักเรียนทั้งสามคนให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดานที่แตกต่างกันเพื่อถ่ายรูปได้ทั้งหมด 6 วิธี นอกจากนี้ยังสามารถหาจำนวนวิธีการยืนเป็นแถวหน้ากระดานเพื่อถ่ายรูปของทั้งสามคนได้โดยใช้หลักการคูณ โดยมี 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ตำแหน่งที่ 1 เลือกนักเรียนมายืนได้ 3 วิธี จากนักเรียน 3 คน

ขั้นตอนที่ 2 ตำแหน่งที่ 2 เลือกนักเรียนมายืนได้ 2 วิธี จากนักเรียน 2 คนที่เหลือ

ขั้นตอนที่ 3 ตำแหน่งที่ 3 เลือกนักเรียนมายืนได้ 1 วิธี จากนักเรียนคนสุดท้าย

จากหลักการคูณ จะได้ว่า มีวิธีจัดนักเรียนทั้งสามคนให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดานที่แตกต่างกันเพื่อถ่ายรูปได้ทั้งหมด $3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี

5. ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายว่าถ้านักเรียนทั้งหมด n คน จะมีวิธีจัดนักเรียนทั้ง n คนให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดานที่แตกต่างกันเพื่อถ่ายรูปได้ทั้งหมดกี่วิธี พร้อมทั้งอธิบายแนวทางการหาคำตอบ

แนวคำตอบ

ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนหาจำนวนวิธีจัดนักเรียนทั้ง n คน ให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดานที่แตกต่างกันเพื่อถ่ายรูป โดยเชื่อมโยงกับหลักการคูณ ดังนี้

ตำแหน่งที่ 1

ตำแหน่งที่ 2

...

ตำแหน่งที่ n

พิจารณาดำเน่งการยืนของนักเรียนจากตำแหน่งที่ 1 ถึงตำแหน่งที่ n ได้ n ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ตำแหน่งที่ 1 เลือกคนมายืนได้ n วิธี จากนักเรียน n คน

ขั้นตอนที่ 2 ตำแหน่งที่ 2 แต่ละวิธีที่เลือกคนมายืนในตำแหน่งที่ 1 มีวิธีเลือกคนมายืนในตำแหน่งที่ 2 ได้ $n-1$ วิธี

⋮

⋮

⋮

ขั้นตอนที่ n ตำแหน่งที่ n แต่ละวิธีที่เลือกคนมายืนในตำแหน่งที่ 1 ถึงตำแหน่งที่ $n-1$ มีวิธีเลือกคนมายืนในตำแหน่งที่ n ได้ 1 วิธี

จากหลักการคูณ จะได้ว่า มีวิธีจัดนักเรียน n คน ให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดานที่แตกต่างกันเพื่อถ่ายรูปได้ทั้งหมด $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ วิธี

6. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปราย เพื่อสรุปในประเด็นต่อไปนี้

- การจัดแถวเพื่อถ่ายรูป เป็นตัวอย่างของการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น ซึ่งเป็นการนำสิ่งของมาจัดเรียงในแนวเส้นตรง โดยไม่นำสิ่งของที่ใช้จัดเรียงไปแล้วในตำแหน่งหนึ่ง มาจัดเรียงในตำแหน่งอื่นอีก
- การเรียงสับเปลี่ยนที่มีสิ่งของเรียงลำดับแตกต่างกัน จะถือว่าเป็นการเรียงสับเปลี่ยนที่ไม่เหมือนกัน
- จำนวนวิธีในการนำสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n ชิ้น มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นได้ $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$ วิธี

หมายเหตุ

ก่อนนำเข้าสู่ขั้นตอนการจัดนักเรียน n คน ให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดาน ครูอาจให้นักเรียนพิจารณาการจัดนักเรียน 4 หรือ 5 คน ให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดานก่อน โดยใช้หลักการคูณในการแก้ปัญหา



กิจกรรม : เรียงแถวถ่ายรูป (2)

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง จำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูกำหนดสถานการณ์ ดังนี้ ถ้ามีนักเรียนจำนวน 5 คน ต้องการนำนักเรียน 3 คนมายืนเรียงแถวหน้ากระดานเพื่อถ่ายรูป แล้วจะมีจำนวนวิธีจัดนักเรียนที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี โดยกำหนดตำแหน่งที่ 1, 2 และ 3 เพื่อถ่ายรูป ดังนี้

ตำแหน่งที่ 1

ตำแหน่งที่ 2

ตำแหน่งที่ 3

2. ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายแนวทางการหาคำตอบของสถานการณ์ในข้อ 1 โดยใช้หลักการคูณในการแก้ปัญหา จะได้ทั้งหมดกี่วิธี พร้อมทั้งอธิบายแนวทางการหาคำตอบ

แนวคำตอบ

การจัดนักเรียน 3 คน จากนักเรียนทั้งหมด 5 คน ให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดานเพื่อถ่ายรูปอาจพิจารณาได้โดยใช้หลักการคูณหรือการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด ดังนี้

ใช้หลักการคูณ

การจัดนักเรียน 3 คน จากนักเรียนทั้งหมด 5 คน ให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดานเพื่อถ่ายรูป มี 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ตำแหน่งที่ 1 เลือกนักเรียนมายืนได้ 5 วิธี จากนักเรียน 5 คน

ขั้นตอนที่ 2 ตำแหน่งที่ 2 เลือกนักเรียนมายืนได้ 4 วิธี จากนักเรียน 4 คนที่เหลือ

ขั้นตอนที่ 3 ตำแหน่งที่ 3 เลือกนักเรียนมายืนได้ 3 วิธี จากนักเรียน 3 คนที่เหลือ

จากหลักการคูณ จะได้ว่า มีวิธีจัดนักเรียน 3 คน จากนักเรียนทั้งหมด 5 คน ให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดานที่แตกต่างกันเพื่อถ่ายรูปได้ทั้งหมด $5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี

ใช้การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

การจัดนักเรียน 3 คน จากนักเรียนทั้งหมด 5 คน ให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดานเพื่อถ่ายรูปทำได้ $P_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 30$ วิธี

3. ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายว่า ถ้าต้องการจัดนักเรียน r คน จากนักเรียนทั้งหมด n คน ให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดานที่แตกต่างกันเพื่อถ่ายรูป โดยใช้หลักการคูณในการแก้ปัญหา จะทำได้ทั้งหมดกี่วิธี พร้อมทั้งอธิบายแนวทางการหาคำตอบ

แนวคำตอบ

การจัดนักเรียน r คน จากนักเรียนทั้งหมด n คน ให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดานที่แตกต่างกัน โดยกำหนดตำแหน่งที่ 1, 2, ..., r เพื่อถ่ายรูป เป็นดังนี้

ตำแหน่งที่ 1

ตำแหน่งที่ 2

...

ตำแหน่งที่ r

พิจารณาดำเน่่งการยืนของนักเรียนจากตำแหน่งที่ 1 ถึงตำแหน่งที่ r ได้ r ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ตำแหน่งที่ 1 เลือกคนมายืนได้ n วิธี จากนักเรียน n คน

ขั้นตอนที่ 2 ตำแหน่งที่ 2 แต่ละวิธีที่เลือกคนมายืนในตำแหน่งที่ 1 มีวิธีเลือกคนมายืนในตำแหน่งที่ 2 ได้ $n-1$ วิธี

⋮

ขั้นตอนที่ r ตำแหน่งที่ r แต่ละวิธีที่เลือกคนมายืนในตำแหน่งที่ 1 ถึงตำแหน่งที่ $r-1$ มีวิธีเลือกคนมายืนในตำแหน่งที่ r ได้ $n-(r-1)=n-r+1$ วิธี

จากหลักการคูณ จะได้ว่า มีวิธีจัดนักเรียน r คน จากนักเรียนทั้งหมด n คน ให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดานที่แตกต่างกันเพื่อถ่ายรูปได้ทั้งหมด

$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$ วิธี

4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปราย เพื่อสรุปว่าจำนวนวิธีในการนำสิ่งของ r ชิ้น จากสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น เท่ากับ $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$ วิธี หรือเท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

หมายเหตุ

- ก่อนนำเข้าสู่ขั้นตอนการจัดนักเรียน r คน จากนักเรียนทั้งหมด n คน ให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดาน ครูอาจให้พิจารณาการจัดนักเรียน 4 คน จากนักเรียนทั้งหมด 5 คน หรือจัดนักเรียน 3 คน จากนักเรียนทั้งหมด 6 คน ให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดานก่อน
- ครูอาจแนะนำสัญลักษณ์ $P_{n,r}$ แทนจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ r ชิ้น จากสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น สามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการจัดเรียงสิ่งของโดยที่สามารถกำหนดตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสิ้นสุดได้ เช่น การจัดเรียงกระถางต้นไม้ 9 กระถาง ให้เป็นรูปตัวอักษร W ดังรูป สามารถทำได้ทั้งหมด $9!$ วิธีที่แตกต่างกัน

ตำแหน่งเริ่มต้น • • • ตำแหน่งสิ้นสุด



- ในการสอนเกี่ยวกับการเรียงสับเปลี่ยน มีข้อตกลงว่า ถ้าไม่ได้ระบุสิ่งที่กำหนดให้เป็นสิ่งของที่เหมือนกัน ให้ถือว่าสิ่งของทั้งหมดที่กำหนดให้แตกต่างกัน



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

การหาคำตอบของปัญหาในแบบฝึกหัด 2.2 บางข้อสามารถนำเสนอการหาคำตอบได้หลายแบบ เช่น ข้อ 6 อาจนำเสนอการหาคำตอบได้ 2 แบบ ดังนี้

แบบที่ 1 ในที่นี้ $n = 4$ และ $r = 3$

$$\text{จะได้ } P_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4! = 24$$

ดังนั้น สร้างจำนวน 3 หลัก จากเลขโดด 2, 3, 5 และ 9 โดยที่แต่ละหลักมีเลขโดดไม่ซ้ำกัน ได้ทั้งหมด 24 จำนวน

แบบที่ 2 การสร้างจำนวน 3 หลัก จากเลขโดด 2, 3, 5 และ 9 โดยที่แต่ละหลักมีเลขโดดไม่ซ้ำกัน มี 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว เป็นหลักร้อย ได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว เป็นหลักสิบ ได้ 3 วิธี จากเลขโดดที่ไม่ซ้ำกับเลขโดดที่เลือกในขั้นตอนที่ 1

ขั้นตอนที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว เป็นหลักหน่วย ได้ 2 วิธี จากเลขโดดที่ไม่ซ้ำกับเลขโดดที่เลือกในขั้นตอนที่ 1 และ 2

โดยหลักการคูณ จะได้ว่า สร้างจำนวน 3 หลัก จากเลขโดด 2, 3, 5 และ 9 โดยที่แต่ละหลักมีเลขโดดไม่ซ้ำกัน ได้ทั้งหมด $4 \times 3 \times 2 = 24$ จำนวน

จะเห็นว่าการนำเสนอการหาคำตอบของข้อที่ 6 ทั้งสองแบบนี้มาจากวิธีเดียวกัน ทั้งนี้ ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนนำเสนอการหาคำตอบด้วยตนเอง และให้นักเรียนพิจารณาความเหมาะสมของแต่ละวิธี และครูอาจให้นักเรียนตอบในรูปแฟกทอเรียลได้โดยไม่ต้องคำนวณหาคำตอบ

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด



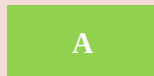
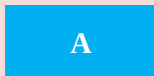
กิจกรรม : การจัดบัตรตัวอักษร

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

- ครูแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3–4 คน แบบละความสามารถ แล้วแจกบัตรกระดาษซึ่งมีสีที่แตกต่างกันให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม กลุ่มละ 3 แผ่น จากนั้นครูให้นักเรียนทุกกลุ่มเขียนตัวอักษร A ลงบนบัตรกระดาษ 2 แผ่น และเขียนตัวอักษร B ลงบนบัตรกระดาษอีก 1 แผ่นที่เหลือ ตัวอย่างบัตรกระดาษที่นักเรียนแต่ละกลุ่มมีเป็นดังรูป



- ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันจัดเรียงบัตรทั้ง 3 ใบ ในแนวเส้นตรงที่เป็นไปได้ทั้งหมดโดยพิจารณาจากสี และบันทึกผลที่ได้จากการจัดเรียงทั้งสีและตัวอักษรลงในตารางที่มีลักษณะต่อไปนี้

แบบที่	ผลที่ได้จากการจัดเรียง	
	สี	ตัวอักษร

แนวคำตอบ

ผลที่ได้จากการจัดเรียงตัวอย่างบัตรในข้อ 1 เป็นดังนี้

แบบที่	ผลที่ได้จากการจัดเรียง	
	สี	ตัวอักษร
1	ฟขม	AAB
2	ขฟม	AAB
3	ฟมข	ABA
4	ขมฟ	ABA
5	มฟข	BAA
6	มขฟ	BAA

หมายเหตุ

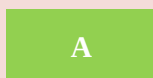
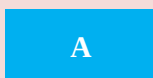
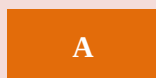
แนวคำตอบในตารางแทนสีฟ้า สีเขียว และสีม่วง ด้วยตัวอักษร ฟ, ข และ ม ตามลำดับ

3. จากคำตอบที่ได้ในข้อ 2 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันพิจารณาว่าจำนวนวิธีการจัดเรียงที่เป็นไปได้ทั้งหมดเมื่อพิจารณาตามสีและพิจารณาตามตัวอักษรเท่ากันหรือไม่ อย่างไร

แนวคำตอบ

จำนวนวิธีการจัดเรียงที่เป็นไปได้ทั้งหมดเมื่อพิจารณาตามสีมีทั้งหมด 6 แบบ และจำนวนวิธีการจัดเรียงที่เป็นไปได้ทั้งหมดเมื่อพิจารณาตามตัวอักษรมีทั้งหมด 3 แบบ นั่นคือ จำนวนวิธีการจัดเรียงที่เป็นไปได้ทั้งหมดเมื่อพิจารณาตามสีมากกว่าการพิจารณาตามตัวอักษร

4. ครูให้นักเรียนคาดการณ์ว่าหากเพิ่มกระดาษสีอีก 1 สี แล้วจำนวนวิธีการจัดเรียงที่เป็นไปได้ทั้งหมดเมื่อพิจารณาตามสีและพิจารณาตามตัวอักษรจะเป็นอย่างไร จากนั้นครูแจกบัตรกระดาษอีก 1 แผ่น ซึ่งมีสีแตกต่างกับ 3 แผ่นแรก ให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม และให้นักเรียนเขียนตัวอักษร A ลงบนบัตรกระดาษแผ่นใหม่ ตัวอย่างบัตรกระดาษที่นักเรียนมีเป็นดังรูป



5. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันจัดเรียงบัตรทั้ง 4 ใบ ในแนวเส้นตรงที่เป็นไปได้ทั้งหมดโดยพิจารณาจากสี และบันทึกผลที่ได้จากการจัดเรียงทั้งสีและตัวอักษรลงในตารางต่อไปนี้

แบบที่	ผลที่ได้จากการจัดเรียง	
	สี	ตัวอักษร

แนวคำตอบ

ผลที่ได้จากการจัดเรียงตัวอย่างบัตรในข้อ 4 เป็นดังนี้

แบบที่	ผลที่ได้จากการจัดเรียง	
	สี	ตัวอักษร
1	สฟขม	AAAB
2	สขฟม	AAAB
3	ฟสขม	AAAB
4	ฟขสม	AAAB
5	ขสฟม	AAAB
6	ขฟสม	AAAB
7	สฟมข	AABA
8	สขมฟ	AABA
9	ฟสมข	AABA
10	ฟขมส	AABA
11	ขสมฟ	AABA
12	ขฟมส	AABA
13	สมฟข	ABAA
14	สมขฟ	ABAA
15	ฟมสข	ABAA

แบบที่	ผลที่ได้จากการจัดเรียง	
	สี่	ตัวอักษร
16	ฟมขส	ABAA
17	ขมสฟ	ABAA
18	ขมฟส	ABAA
19	มสฟข	BAAA
20	มสขฟ	BAAA
21	มฟขส	BAAA
22	มฟสข	BAAA
23	มขฟส	BAAA
24	มขสฟ	BAAA

6. จากคำตอบที่ได้ในข้อ 5 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันพิจารณาว่าจำนวนวิธีการจัดเรียงที่เป็นไปได้ทั้งหมดเมื่อพิจารณาตามสี่และพิจารณาตามตัวอักษรเท่ากันหรือไม่ อย่างไร

แนวคำตอบ

จำนวนวิธีการจัดเรียงที่เป็นไปได้ทั้งหมดเมื่อพิจารณาตามสี่มีทั้งหมด 24 แบบ และจำนวนวิธีการจัดเรียงที่เป็นไปได้ทั้งหมดเมื่อพิจารณาตามตัวอักษรมีทั้งหมด 4 แบบ นั่นคือจำนวนวิธีการจัดเรียงที่เป็นไปได้ทั้งหมดเมื่อพิจารณาตามสี่มากกว่าการพิจารณาตามตัวอักษร

7. จากคำตอบที่ได้ในข้อ 3 และ 6 ครูให้นักเรียนร่วมกันสรุปจำนวนวิธีการจัดเรียงที่เป็นไปได้ทั้งหมดเมื่อพิจารณาตามสี่และพิจารณาตามตัวอักษร แล้วหาผลลัพธ์ที่ได้จากการหารจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมดเมื่อพิจารณาตามสี่ด้วยจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมดเมื่อพิจารณาตามตัวอักษร จากนั้นบันทึกลงในตารางต่อไปนี้

การพิจารณา	กระดาษสี่ 3 แผ่น (ตัวอักษรซ้ำกัน 2 ตัว)	กระดาษสี่ 4 แผ่น (ตัวอักษรซ้ำกัน 3 ตัว)
ตามสี่		
ตามตัวอักษร		
ผลหาร		

แนวคำตอบ

ผลการบันทึกที่ได้เป็นดังนี้

การพิจารณา	กระดาสี 3 แผ่น (ตัวอักษรซ้ำกัน 2 ตัว)	กระดาสี 4 แผ่น (ตัวอักษรซ้ำกัน 3 ตัว)
ตามสี	6	24
ตามตัวอักษร	3	4
ผลหาร	2	6

8. จากคำตอบที่ได้ในข้อ 7 ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายว่าผลหารที่ได้สัมพันธ์กับจำนวนตัวอักษรที่ซ้ำกันอย่างไร

แนวคำตอบ

ผลหารที่ได้เท่ากับแฟกทอเรียลของจำนวนตัวอักษรที่ซ้ำกัน นั่นคือ

- กรณีที่มีกระดาสี 3 แผ่น ซึ่งมีตัวอักษรซ้ำกัน 2 ตัว นั้น ผลลัพธ์ที่ได้จากการหารจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมดเมื่อพิจารณาตามสีด้วยจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมดเมื่อพิจารณาตามตัวอักษร คือ 2 ซึ่ง $2 = 2!$
 - กรณีที่มีกระดาสี 4 แผ่น ซึ่งมีตัวอักษรซ้ำกัน 3 ตัว นั้น ผลลัพธ์ที่ได้จากการหารจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมดเมื่อพิจารณาตามสีด้วยจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมดเมื่อพิจารณาตามตัวอักษร คือ 6 ซึ่ง $6 = 3!$
9. จากแนวคิดข้างต้น ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปวิธีการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 3 ชั้น ซึ่งมีสิ่งของ 2 ชั้นที่เหมือนกัน และจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 4 ชั้น ซึ่งมีสิ่งของ 3 ชั้นที่เหมือนกัน

แนวคำตอบ

- การหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร A, A และ B ซึ่งเป็นการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 3 ชิ้น ที่มีสิ่งของ 2 ชิ้นที่เหมือนกันนั้น ทำได้โดยสมมติให้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษรดังกล่าวเป็น x วิธี ในแต่ละวิธีของ x วิธีนี้ ถ้าพิจารณาว่าตัวอักษร A ทั้งสองตัวต่างกัน จะมีจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร A ทั้งสองตัวคือ 2! จึงได้ว่า จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของตัวอักษร A, A และ B เมื่อตัวอักษร A ทั้งสองตัวต่างกัน คือ $x \times 2!$ วิธี ซึ่งเท่ากับจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร 3 ตัวที่แตกต่างกัน คือ 3! วิธี ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}x \times 2! &= 3! \\x &= \frac{3!}{2!}\end{aligned}$$

นั่นคือ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร A, A และ B คือ $\frac{3!}{2!}$ หรือ 3 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 3 ชิ้น ซึ่งมีสิ่งของ 2 ชิ้นที่เหมือนกัน คือ $\frac{3!}{2!}$

หรือ 3 วิธี

- การหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร A, A, A และ B ซึ่งเป็นการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 4 ชิ้น ที่มีสิ่งของ 3 ชิ้นที่เหมือนกันนั้น ทำได้โดยสมมติให้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษรดังกล่าวเป็น x วิธี ในแต่ละวิธีของ x วิธีนี้ ถ้าพิจารณาว่าตัวอักษร A ทั้งสามตัวต่างกัน จะมีจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร A ทั้งสามตัวคือ 3! จึงได้ว่า จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของตัวอักษร A, A, A และ B เมื่อตัวอักษร A ทั้งสามตัวต่างกัน คือ $x \times 3!$ วิธี ซึ่งเท่ากับจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร 4 ตัวที่แตกต่างกัน คือ 4! วิธี ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}x \times 3! &= 4! \\x &= \frac{4!}{3!}\end{aligned}$$

นั่นคือ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร A, A, A และ B คือ $\frac{4!}{3!}$ หรือ 4 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 4 ชิ้น ซึ่งมีสิ่งของ 3 ชิ้นที่เหมือนกัน คือ $\frac{4!}{3!}$

หรือ 4 วิธี

10. ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n ชิ้น ซึ่งในจำนวนนี้มี n_0 ชิ้นที่เหมือนกัน

แนวคำตอบ

ให้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่กำหนดเป็น x วิธี ถ้าพิจารณาว่าสิ่งของ n_0 ชิ้นนี้แตกต่างกัน จะมีจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n_0 ชิ้น คือ $n_0!$ จึงได้ว่า จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่กำหนด คือ $x \times n_0!$ วิธี ซึ่งเท่ากับจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n ชิ้นที่แตกต่างกัน คือ $n!$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} x \times n_0! &= n! \\ x &= \frac{n!}{n_0!} \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n ชิ้น ซึ่งมีสิ่งของ n_0 ชิ้นที่เหมือนกัน คือ $\frac{n!}{n_0!}$ วิธี

11. ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n ชิ้น ซึ่งในจำนวนนี้มี n_1 ชิ้นที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 1 มี n_2 ชิ้นที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 2 ... และมี n_k ชิ้นที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ k โดยที่ $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

แนวคำตอบ

ให้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่กำหนดเป็น x วิธี
ถ้าสิ่งของ n_1 ชิ้นในกลุ่มที่ 1 แตกต่างกัน แล้วมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของในกลุ่มนี้เป็น $n_1!$ วิธี
ถ้าสิ่งของ n_2 ชิ้นในกลุ่มที่ 2 แตกต่างกัน แล้วมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของในกลุ่มนี้เป็น $n_2!$ วิธี
:

ถ้าสิ่งของ n_k ชิ้นในกลุ่มที่ k แตกต่างกัน แล้วมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของในกลุ่มนี้เป็น $n_k!$ วิธี
จึงได้ว่า จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่กำหนด คือ $x \times n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!$ วิธี
แต่จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n ชิ้นที่แตกต่างกัน คือ $n!$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} x \times n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k! &= n! \\ x &= \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!} \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n ชิ้น ซึ่งในจำนวนนี้มี n_1 ชิ้นที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 1 มี n_2 ชิ้นที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 2 ... และมี n_k ชิ้นที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ k คือ $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$ วิธี โดยที่ $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- การหาคำตอบของปัญหาในตัวอย่างที่ 21 ซึ่งได้ว่า จำนวนวิธีเรียงตัวอักษรทั้งหมดในคำว่า “MATHEMATICS” โดยไม่คำนึงถึงความหมาย คือ $\frac{11!}{2!2!2!1!1!1!1!}$ วิธีนั้น เนื่องจาก $1!=1$ จึงอาจไม่จำเป็นต้องเขียน $1!$ ไว้ ทำให้เขียนแสดงคำตอบได้เป็น $\frac{11!}{2!2!2!}$

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด



กิจกรรม : จัดวงกลม

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูให้นักเรียนจัดเรียงตัวอักษร 3 ตัว คือ A, B และ C ในแนวเส้นตรง จากนั้นครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายผลการจัดเรียงที่ได้ โดยครูบันทึกผลที่ได้ลงบนกระดาน

แนวคำตอบ

จัดเรียงตัวอักษร A, B และ C ในแนวเส้นตรง ได้ดังนี้

ABC

BCA

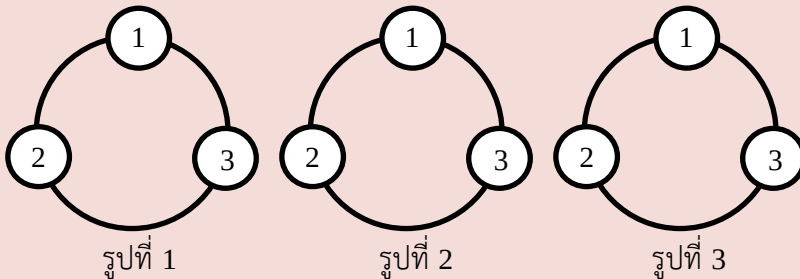
CAB

ACB

CBA

BAC

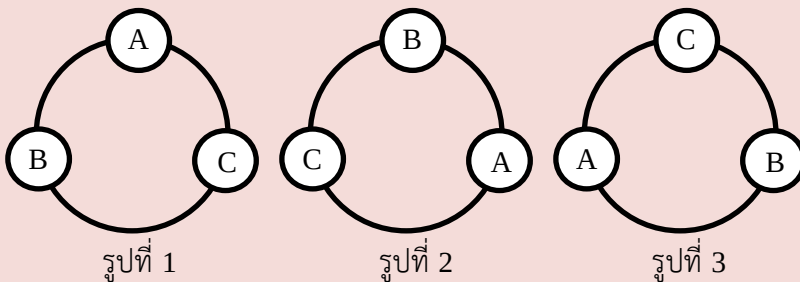
2. ครูเขียนวงกลมบนกระดาน และกำหนดตำแหน่งที่ 1, 2 และ 3 ในวงกลมแต่ละรูป ดังนี้



3. ครูขอนักเรียนเป็นอาสาสมัครจำนวน 3 คน จากนั้นให้นักเรียนอาสาสมัครเขียนตัวอักษร A, B และ C ลงในช่องของรูปที่ครูเขียนบนกระดาน โดยที่

- คนที่ 1 เขียนตัวอักษร A, B และ C ลงในช่องหมายเลข 1, 2 และ 3 ตามลำดับ ในรูปที่ 1
- คนที่ 2 เขียนตัวอักษร B, C และ A ลงในช่องหมายเลข 1, 2 และ 3 ตามลำดับ ในรูปที่ 2
- คนที่ 3 เขียนตัวอักษร C, A และ B ลงในช่องหมายเลข 1, 2 และ 3 ตามลำดับ ในรูปที่ 3

ซึ่งจะได้เป็นดังนี้

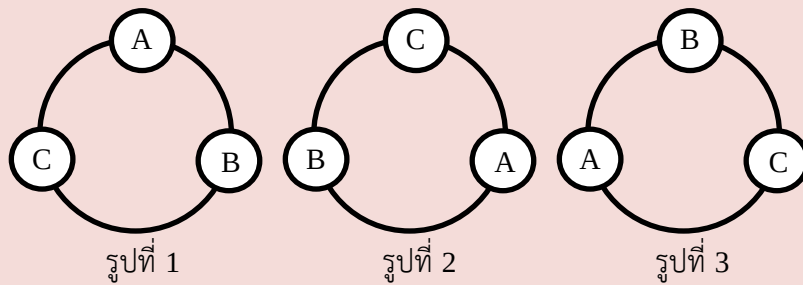


4. จากรูปที่ได้ในข้อ 3 ครูให้นักเรียนลองจินตนาการการหมุนของวงกลมรูปที่ 2 และ 3 แล้วเปรียบเทียบกับวงกลมรูปที่ 1 ซึ่งจะได้ว่าสามารถหมุนวงกลมรูปที่ 2 และ 3 ให้เหมือนกับวงกลมรูปที่ 1 ได้ นั่นคือ การนำตัวอักษรที่จัดเรียงในแนวเส้นตรง 3 วิธี คือ ABC, BCA และ CAB มาจัดเรียงเป็นวงกลม จะได้เป็นการจัดเรียงเป็นวงกลมที่เหมือนกัน

5. ครูและนักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 3 และ 4 ซ้ำอีกครั้ง โดยที่

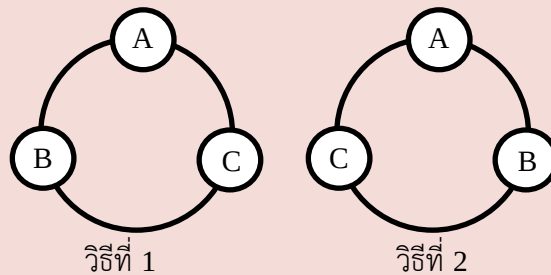
- คนที่ 1 เขียนตัวอักษร A, C และ B ลงในช่องหมายเลข 1, 2 และ 3 ตามลำดับ ในรูปที่ 1
- คนที่ 2 เขียนตัวอักษร C, B และ A ลงในช่องหมายเลข 1, 2 และ 3 ตามลำดับ ในรูปที่ 2
- คนที่ 3 เขียนตัวอักษร B, A และ C ลงในช่องหมายเลข 1, 2 และ 3 ตามลำดับ ในรูปที่ 3

ซึ่งจะได้เป็นดังนี้



จะได้ว่า การนำตัวอักษรที่จัดเรียงในแนวเส้นตรง 3 วิธี คือ ACB, CBA และ BAC มาจัดเรียงเป็นวงกลม จะได้เป็นการจัดเรียงเป็นวงกลมที่เหมือนกัน

6. จากรูปที่ได้ในข้อ 3 และ 5 ครูให้นักเรียนสังเกตว่าการจัดเรียงตัวอักษร 3 ตัว เป็นวงกลม ทำได้โดยให้ตัวอักษร A อยู่คงที่ แล้วจัดเรียงสับเปลี่ยน B และ C ดังรูป



7. จากข้อ 6 ครูให้นักเรียนพิจารณาว่า ในการจัดเรียงตัวอักษรที่แตกต่างกัน 3 ตัว เป็นวงกลม จะทำได้กี่วิธี และหาได้อย่างไร

แนวคำตอบ

ในการจัดเรียงตัวอักษรที่แตกต่างกัน 3 ตัว เป็นวงกลม ทำได้ 2 วิธี ซึ่งหาได้โดยกำหนดให้ตัวอักษร 1 ตัว จากตัวอักษรทั้งหมด 3 ตัว อยู่กับที่ ทำให้เหลือตัวอักษรที่ต้องสลับที่กัน 2 ตัว ซึ่งจัดเรียงได้ $(3-1)! = 2! = 2$ วิธี

8. จากข้อ 7 ครูให้นักเรียนพิจารณาว่า ในการจัดเรียงสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น เป็นวงกลม จะทำได้กี่วิธี และหาได้อย่างไร

แนวคำตอบ

ในการจัดเรียงสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น เป็นวงกลม ทำได้โดยกำหนดให้สิ่งของ 1 ชิ้น อยู่กับที่ ทำให้เหลือสิ่งของที่ต้องสลับที่กัน $n-1$ ชิ้น ซึ่งจัดเรียงได้ $(n-1)!$ วิธี

9. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปราย เพื่อให้ได้ข้อสรุปเกี่ยวกับการจัดเรียงสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น เป็นวงกลม ว่าเป็นการจัดเรียงที่ไม่ได้มีการกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของการจัดเรียง แต่เป็นการจัดเรียงที่ให้สิ่งใดสิ่งหนึ่งอยู่คงที่ ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง แล้วเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่เหลืออยู่

หมายเหตุ

- ครูสามารถกำหนดให้ตัวอักษรที่เขียนเป็นตัวอักษรอื่นที่แตกต่างจากตัวอย่างในกิจกรรมนี้ได้
- ก่อนปฏิบัติตามแนวทางการดำเนินกิจกรรมข้อ 6 ครูอาจให้นักเรียนพิจารณาว่ามีการจัดเรียงอื่นที่แตกต่างจากการจัดเรียงในข้อ 3 และ 5 หรือไม่
- ก่อนการพิจารณาการจัดเรียงสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น เป็นวงกลม ครูอาจให้นักเรียนพิจารณาการจัดเรียงสิ่งของที่แตกต่างกัน 4 หรือ 5 ชิ้น ให้เป็นวงกลมก่อน

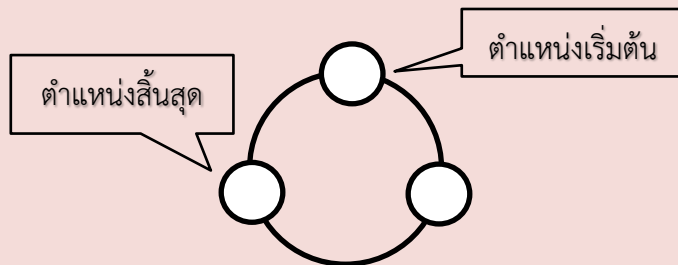


ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

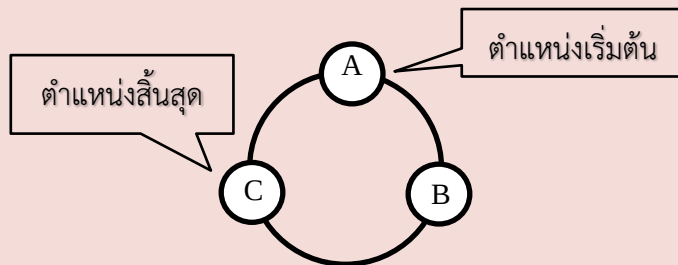
- การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมที่สิ่งของแตกต่างกันทั้งหมด สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับปัญหาการจัดสิ่งของเป็นรูปวงรี การจัดคนนั่งรอบโต๊ะรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
- การจัดเรียงตัวอักษร A, B และ C ตามที่นำเสนอในตอนต้นของหัวข้อนี้ แสดงให้เห็นว่าการจัดเรียงตัวอักษรดังกล่าวในแนวเส้นตรงแตกต่างกัน แต่เมื่อนำตัวอักษรดังกล่าวมาจัดเรียงเป็นวงกลม อาจจะได้วงกลมแบบเดียวกัน เช่น ตัวอักษรที่จัดเรียงในแนวเส้นตรงได้เป็น ABC, BCA และ CAB นั้น เมื่อนำมาจัดเป็นวงกลม จะได้เป็นวงกลมแบบเดียวกัน เนื่องจาก เมื่อนำมาจัดเป็นวงกลมแล้ว จะได้ว่า ตัวอักษร A มาก่อนตัวอักษร B ตัวอักษร B มาก่อนตัวอักษร C และตัวอักษร C มาก่อนตัวอักษร A เสมอ

- การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม เป็นการจัดเรียงสิ่งของโดยที่ไม่สามารถกำหนดตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสิ้นสุดได้ เช่น

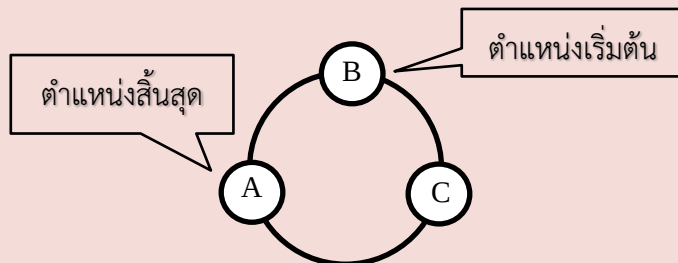
ถ้ากำหนดตำแหน่งเริ่มต้น และตำแหน่งสิ้นสุด ดังรูป



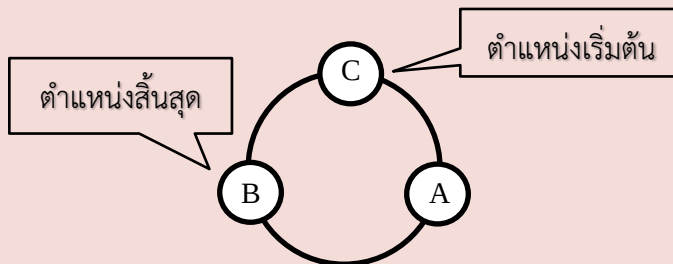
ถ้าให้ A อยู่ตำแหน่งเริ่มต้น และ C อยู่ในตำแหน่งสิ้นสุด ดังรูป



ให้ B อยู่ตำแหน่งเริ่มต้น และ A อยู่ในตำแหน่งสิ้นสุด ดังรูป



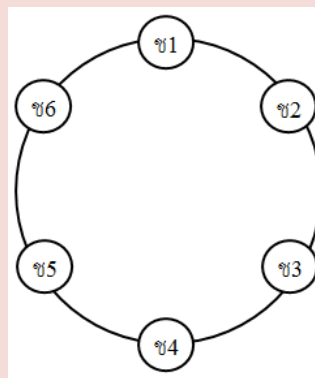
ให้ C อยู่ตำแหน่งเริ่มต้น และ B อยู่ในตำแหน่งสิ้นสุด ดังรูป



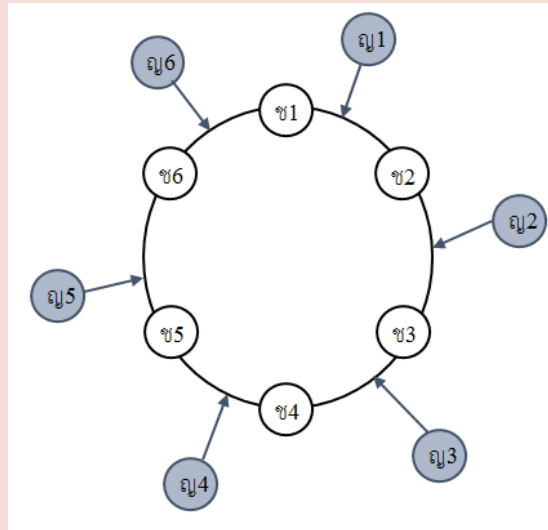
จะเห็นว่า ถ้าเรากำหนดตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสิ้นสุด ตัวอักษรที่จัดเรียงในแนวเส้นตรงได้เป็น ABC, BCA และ CAB นั้น เมื่อนำมาจัดเป็นวงกลม จะได้เป็นวงกลมแบบเดียวกัน เนื่องจาก เมื่อนำมาจัดเป็นวงกลมแล้ว จะได้ว่า ตัวอักษร A มาก่อนตัวอักษร B ตัวอักษร B มาก่อนตัวอักษร C และตัวอักษร C มาก่อนตัวอักษร A เสมอ นั่นคือการจัดเรียงทั้งสามแบบถือเป็นการจัดเรียงเป็นวงกลมเพียง 1 วิธี เท่านั้น ในทำนองเดียวกันวิธีการจัดเรียง ACB, BAC และ CBA เป็นการจัดเรียงเป็นวงกลมเพียง 1 วิธี เช่นกัน ดังนั้น การจัดเรียงตัวอักษร 3 ตัว เป็นวงกลม จะจัดได้ 2 วิธี

- ในตัวอย่างที่ 25 จะเห็นว่า การจัดเรียงนักเรียนชายนั่งรอบโต๊ะกลมเป็นการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม เนื่องจาก การจัดเรียงนักเรียนชายไม่สามารถกำหนดตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสิ้นสุดได้

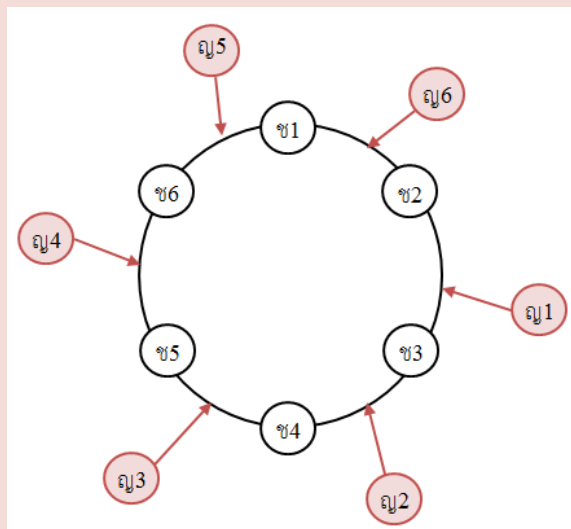
สำหรับการจัดนักเรียนหญิงให้นั่งแทรกระหว่างนักเรียนชายจะไม่ใช้การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม แต่ใช้การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น เนื่องจากตำแหน่งที่นั่งของนักเรียนหญิงมีตำแหน่งของนักเรียนชายอ้างอิงเสมอ เช่น ถ้าจัดนักเรียนชายนั่งรอบโต๊ะกลม ได้ดังรูป



ต่อมาจัดนักเรียนหญิงให้นั่งแทรกระหว่างนักเรียนชาย ซึ่งอาจจัดได้เป็นดังรูปที่ 1 หรือรูปที่ 2 ดังนี้



รูปที่ 1



รูปที่ 2

จากรูปที่ 1 และ 2 จะเห็นว่าการจัดเรียงของนักเรียนหญิงในทั้งสองรูปแตกต่างกัน เช่น หญิง 1 ในรูปที่ 1 นั่งอยู่ระหว่าง ช1 และ ช2 แต่ หญิง 1 ในรูปที่ 2 นั่งอยู่ระหว่าง ช2 และ ช3 จึงไม่สามารถใช้แนวคิดการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมในการหาจำนวนวิธีการจัดที่นั่งของนักเรียนหญิงได้ แต่จะพิจารณาดังนี้

นักเรียนหญิงคนที่ 1 จะเลือกนั่งแทรกระหว่างนักเรียนชายได้ 6 ตำแหน่ง

นักเรียนหญิงคนที่ 2 จะเลือกนั่งแทรกระหว่างนักเรียนชายได้ 5 ตำแหน่ง

นักเรียนหญิงคนที่ 3 จะเลือกนั่งแทรกระหว่างนักเรียนชายได้ 4 ตำแหน่ง

นักเรียนหญิงคนที่ 4 จะเลือกนั่งแทรกระหว่างนักเรียนชายได้ 3 ตำแหน่ง

นักเรียนหญิงคนที่ 5 จะเลือกนั่งแทรกระหว่างนักเรียนชายได้ 2 ตำแหน่ง

นักเรียนหญิงคนที่ 6 จะเลือกนั่งแทรกระหว่างนักเรียนชายได้ 1 ตำแหน่ง

ดังนั้น จะจัดนักเรียนหญิงนั่งแทรกระหว่างนักเรียนชายได้ $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6!$ วิธีจัดที่นั่งนี้เป็นวิธีเดียวกับการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกัน 6 ชิ้น ซึ่งเท่ากับ $P_{6,6}$

- หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ไม่ได้นำเสนอการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด และการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมที่พลักได้ เช่น การร้อยมาลัย การร้อยลูกปัด การร้อยพวงกุญแจ

การจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด



กิจกรรม : เลือกตัวแทนนักเรียน

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง การจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

- ครูจับคู่นักเรียนแบบคละความสามารถ จากนั้นให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ต่อไปนี้
ครูต้องการเลือกตัวแทนนักเรียน 1 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน ได้แก่ A, B, C และ D จะเลือกได้กี่วิธี และทำได้อย่างไรบ้าง

2. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่หาคำตอบของสถานการณ์ในข้อ 1

แนวคำตอบ

ทำได้ 4 วิธี นั่นคือ เลือก A, B, C หรือ D คนใดคนหนึ่ง

3. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่พิจารณาสถานการณ์เพิ่มเติม ดังนี้

ครูต้องการเลือกตัวแทนนักเรียน 2 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน ได้แก่ A, B, C และ D จะเลือกได้กี่วิธี และทำได้อย่างไรบ้าง

4. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่หาคำตอบของสถานการณ์ในข้อ 3 โดยให้นักเรียนพิจารณา ดังนี้

- 4.1 การนำนักเรียน 2 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น จะทำได้กี่วิธี และเรียงสับเปลี่ยนได้อย่างไรบ้าง

แนวคำตอบ

จำนวนวิธีในการนำนักเรียน 2 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น คือ $P_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$ วิธี ซึ่งเรียงสับเปลี่ยนได้ดังนี้

AB	AC	AD	BC	BD	CD
BA	CA	DA	CB	DB	DC

- 4.2 จากคำตอบในข้อ 4.1 ผลที่ได้จากการเรียงสับเปลี่ยนใดบ้างที่ประกอบด้วยสมาชิกชุดเดียวกัน

แนวคำตอบ

ผลที่ได้จากการเรียงสับเปลี่ยนที่ประกอบด้วยสมาชิกชุดเดียวกัน ได้แก่

AB กับ BA	AC กับ CA	AD กับ DA
BC กับ CB	BD กับ DB	CD กับ DC

- 4.3 เมื่อกำหนดให้คำตอบในข้อ 4.1 เป็นการเลือกนักเรียน 2 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน โดยสนใจลำดับ มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น และให้คำตอบในข้อ 4.2 เป็นการเลือกนักเรียน 2 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน โดยไม่สนใจลำดับ มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น จงหาว่าจำนวนวิธีที่ได้โดยสนใจลำดับและไม่สนใจลำดับเป็นเท่าไร

แนวคำตอบ

จำนวนวิธีการเลือกนักเรียน 2 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นแบบสนใจลำดับและไม่สนใจลำดับเป็น 12 และ 6 วิธี ตามลำดับ

5. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่พิจารณาอีกสถานการณ์หนึ่ง ดังนี้

ครูต้องการเลือกตัวแทนนักเรียน 3 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน ได้แก่ A, B, C และ D จะเลือกได้กี่วิธี และทำได้อย่างไรบ้าง

6. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่หาคำตอบของสถานการณ์ในข้อ 5 โดยให้นักเรียนพิจารณา ดังนี้

6.1 การนำนักเรียน 3 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น จะทำได้กี่วิธี และเรียงสับเปลี่ยนได้อย่างไรบ้าง

แนวคำตอบ

จำนวนวิธีในการนำนักเรียน 3 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น คือ $P_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$ วิธี ซึ่งเรียงสับเปลี่ยนได้ดังนี้

ABC	ABD	ACB	ACD	ADB	ADC
BAC	BAD	BCA	BCD	BDA	BDC
CAB	CAD	CBA	CBD	CDA	CDB
DAB	DAC	DBA	DBC	DCA	DCB

6.2 จากคำตอบในข้อ 6.1 ผลที่ได้จากการเรียงสับเปลี่ยนใดบ้างที่ประกอบด้วยสมาชิกชุดเดียวกัน

แนวคำตอบ

ชุดที่ 1 ได้แก่ ABC, ACB, BAC, BCA, CAB และ CBA
 ชุดที่ 2 ได้แก่ ABD, ADB, BAD, BDA, DAB และ DBA
 ชุดที่ 3 ได้แก่ ACD, ADC, CAD, CDA, DAC และ DCA
 ชุดที่ 4 ได้แก่ BCD, BDC, CBD, CDB, DBC และ DCB

6.3 เมื่อกำหนดให้คำตอบในข้อ 6.1 เป็นการเลือกนักเรียน 3 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน โดยสนใจลำดับ มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น และให้คำตอบในข้อ 6.2 เป็นการเลือกนักเรียน 3 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน โดยไม่สนใจลำดับ มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น จงหาว่าจำนวนวิธีที่ได้โดยสนใจลำดับและไม่สนใจลำดับเป็นเท่าไร

แนวคำตอบ

จำนวนวิธีการเลือกนักเรียน 3 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นแบบสนใจลำดับและไม่สนใจลำดับเป็น 24 และ 4 วิธี ตามลำดับ

7. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่พิจารณาอีกสถานการณ์หนึ่ง ดังนี้

ครูต้องการเลือกตัวแทนนักเรียน 4 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน ได้แก่ A, B, C และ D จะเลือกได้กี่วิธี และทำได้อย่างไรบ้าง

8. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่หาคำตอบของสถานการณ์ในข้อ 7 โดยให้นักเรียนพิจารณา ดังนี้

8.1 การนำนักเรียน 4 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น จะทำได้กี่วิธี และเรียงสับเปลี่ยนได้อย่างไรบ้าง

แนวคำตอบ

จำนวนวิธีในการนำนักเรียน 4 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น คือ $P_{4,4} = \frac{4!}{(4-4)!} = 24$ วิธี ซึ่งเรียงสับเปลี่ยนได้ดังนี้

ABCD	ABDC	ACBD	ACDB	ADBC	ADCB
BACD	BADC	BCAD	BCDA	BDAC	BDCA
CABD	CADB	CBAD	CBDA	CDAB	CDBA
DABC	DACB	DBAC	DBCA	DCAB	DCBA

8.2 จากคำตอบในข้อ 8.1 ผลที่ได้จากการเรียงสับเปลี่ยนใดบ้างที่ประกอบด้วยสมาชิกชุดเดียวกัน

แนวคำตอบ

ผลที่ได้จากการเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดประกอบด้วยสมาชิกชุดเดียวกัน

8.3 เมื่อกำหนดให้คำตอบในข้อ 8.1 เป็นการเลือกนักเรียน 4 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน โดยสนใจลำดับ มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น และให้คำตอบในข้อ 8.2 เป็นการเลือกนักเรียน 4 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน โดยไม่สนใจลำดับ มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น จงหาว่าจำนวนวิธีที่ได้โดยสนใจลำดับและไม่สนใจลำดับเป็นเท่าไร

แนวคำตอบ

จำนวนวิธีการเลือกนักเรียน 4 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นแบบสนใจลำดับและไม่สนใจลำดับเป็น 24 และ 1 วิธี ตามลำดับ

9. จากคำตอบที่ได้ในข้อ 2, 4, 6 และ 8 ครูให้นักเรียนร่วมกันสรุปประเด็นต่อไปนี้

- สรุปจำนวนวิธีเลือกนักเรียนมาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นโดยสนใจลำดับการเลือก
- สรุปจำนวนวิธีเลือกนักเรียนมาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นโดยไม่สนใจลำดับการเลือก
- ผลหารที่ได้จากการหารจำนวนวิธีเลือกนักเรียนมาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นโดยสนใจลำดับการเลือกด้วยจำนวนวิธีเลือกนักเรียนมาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นโดยไม่สนใจลำดับการเลือก

จากนั้นบันทึกลงในตารางต่อไปนี้

การพิจารณา	จำนวนนักเรียนที่เลือก (คน)		
	2	3	4
สนใจลำดับการเลือก			
ไม่สนใจลำดับการเลือก			
ผลหาร			

แนวคำตอบ

การพิจารณา	จำนวนนักเรียนที่เลือก (คน)		
	2	3	4
สนใจลำดับการเลือก	12	24	24
ไม่สนใจลำดับการเลือก	6	4	1
ผลหาร	2	6	24

10. จากคำตอบที่ได้ในข้อ 9 ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายว่าผลหารที่ได้สัมพันธ์กับจำนวนนักเรียนที่เลือกอย่างไร

แนวคำตอบ

ผลหารที่ได้เท่ากับแฟกทอเรียลของจำนวนนักเรียนที่เลือก นั่นคือ

- กรณีที่เลือกนักเรียน 2 คน ผลลัพธ์ที่ได้จากการหารจำนวนวิธีเลือกนักเรียนที่สนใจลำดับการเลือกด้วยจำนวนวิธีเลือกนักเรียนที่ไม่สนใจลำดับการเลือก คือ 2 ซึ่ง $2 = 2!$
- กรณีที่เลือกนักเรียน 3 คน ผลลัพธ์ที่ได้จากการหารจำนวนวิธีเลือกนักเรียนที่สนใจลำดับการเลือกด้วยจำนวนวิธีเลือกนักเรียนที่ไม่สนใจลำดับการเลือก คือ 6 ซึ่ง $6 = 3!$
- กรณีที่เลือกนักเรียน 4 คน ผลลัพธ์ที่ได้จากการหารจำนวนวิธีเลือกนักเรียนที่สนใจลำดับการเลือกด้วยจำนวนวิธีเลือกนักเรียนที่ไม่สนใจลำดับการเลือก คือ 4 ซึ่ง $24 = 4!$

11. จากแนวคิดข้างต้น ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปการหาจำนวนวิธีเลือกนักเรียน 2, 3 และ 4 คนตามลำดับ จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน โดยไม่สนใจลำดับการเลือก

แนวคำตอบ

- การหาจำนวนวิธีเลือกนักเรียน 2 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน โดยไม่สนใจลำดับการเลือก ทำได้โดยเรียงสับเปลี่ยนนักเรียน 2 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน ซึ่งทำได้ $P_{4,2} = 12$ วิธี เนื่องจากการสลับลำดับการเลือกของนักเรียน 2 คนที่เลือก ทำได้ 2! วิธี แต่ในการเลือกแบบไม่สนใจลำดับการเลือกนั้น การสลับลำดับการเลือกของนักเรียน 2 คนที่เลือก ถือเป็นการเลือกแบบเดียวกัน ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกนักเรียน 2 คน จากนักเรียน 4 คน โดยไม่สนใจลำดับการเลือกจึงเป็น $\frac{P_{4,2}}{2!} = \frac{12}{2} = 6$ วิธี
- การหาจำนวนวิธีเลือกนักเรียน 3 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน โดยไม่สนใจลำดับการเลือก ทำได้โดยเรียงสับเปลี่ยนนักเรียน 3 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน ซึ่งทำได้ $P_{4,3} = 24$ วิธี เนื่องจากการสลับลำดับการเลือกของนักเรียน 3 คนที่เลือก ทำได้ 3! วิธี แต่ในการเลือกแบบไม่สนใจลำดับการเลือกนั้น การสลับลำดับการเลือกของนักเรียน 3 คนที่เลือก ถือเป็นการเลือกแบบเดียวกัน ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกนักเรียน 3 คน จากนักเรียน 4 คน โดยไม่สนใจลำดับการเลือกจึงเป็น $\frac{P_{4,3}}{3!} = \frac{24}{6} = 4$ วิธี
- การหาจำนวนวิธีเลือกนักเรียน 4 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน โดยไม่สนใจลำดับการเลือก ทำได้โดยเรียงสับเปลี่ยนนักเรียน 4 คน จากนักเรียนทั้งหมด 4 คน ซึ่งทำได้ $P_{4,4} = 24$ วิธี เนื่องจากการสลับลำดับการเลือกของนักเรียน 4 คนที่เลือก ทำได้ 4! วิธี แต่ในการเลือกแบบไม่สนใจลำดับการเลือกนั้น การสลับลำดับการเลือกของนักเรียน 4 คนที่เลือก ถือเป็นการเลือกแบบเดียวกัน ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกนักเรียน 4 คน จากนักเรียน 4 คน โดยไม่สนใจลำดับการเลือกจึงเป็น $\frac{P_{4,4}}{4!} = \frac{24}{24} = 1$ วิธี

12. จากคำตอบในข้อ 11 ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการหาจำนวนวิธีเลือกสิ่งของ r ชิ้น จากสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n ชิ้น

แนวคำตอบ

การเลือกสิ่งของ r ชิ้น จากสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n ชิ้น ทำได้โดยเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ r ชิ้น จากสิ่งของทั้งหมด n ชิ้น ซึ่งทำได้ $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี แต่ในการเลือกแบบไม่สนใจลำดับการเลือกนั้น การสลับลำดับการเลือกของสิ่งของ r ชิ้นที่เลือกถือเป็นการเลือกแบบเดียวกัน ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกสิ่งของ r ชิ้น จากสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n ชิ้น โดยไม่สนใจลำดับการเลือกจึงเป็น $\frac{P_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ วิธี

หมายเหตุ

- ครูอาจแนะนำสัญลักษณ์ $C_{n,r} = \binom{n}{r}$ แทนจำนวนวิธีเลือกสิ่งของ r ชิ้น จากสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น ซึ่งคือจำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น โดยเลือกคราวละ r ชิ้น
- เมื่อนักเรียนทราบกรณีทั่วไปของจำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น โดยเลือกคราวละ r ชิ้นแล้ว ครูอาจอธิบายเพิ่มเติมเกี่ยวกับกรณีที่ไมเลือกสิ่งของ ซึ่งหมายถึงเลือกของ 0 ชิ้น จากของทั้งหมด n ชิ้น จะได้ $C_{n,0} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n! \times 1} = 1$ วิธี



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- สิ่งของที่กล่าวถึงในการจัดหมู่จะต้องแตกต่างกันทั้งหมด
- ในการสอน $C_{n,r} = C_{n,n-r}$ นั้น ครูควรยกตัวอย่างประกอบ เช่น กล่องใบหนึ่งมีลูกแก้วที่แตกต่างกัน 3 ลูก เป็นลูกแก้วสีเขียว สีแดง และสีฟ้า จะได้ว่า จำนวนวิธีในการหยิบลูกแก้ว 1 ลูก จากลูกแก้วทั้งหมด 3 ลูก เท่ากับ $C_{3,1} = \frac{3!}{(3-1)!1!} = 3$ วิธี



จำนวนวิธีในการหยิบลูกแก้ว 2 ลูก จากลูกแก้วทั้งหมด 3 ลูก เท่ากับ $C_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$ วิธี



จะเห็นว่า $C_{3,1} = C_{3,2}$

ทฤษฎีบททวินาม



กิจกรรม : การกระจายพหุนาม

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง ทฤษฎีบททวินาม

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. ครูแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 – 4 คน แบบคณะกรรมการ จากนั้นครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันเขียนการกระจาย $(x+y)^2$, $(x+y)^3$ และ $(x+y)^4$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ

แนวคำตอบ

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

2. จากแต่ละคำตอบที่ได้ในข้อ 1 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มระบุเลขชี้กำลังของ x เลขชี้กำลังของ y และสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์

แนวคำตอบ

จากการกระจาย $(x+y)^2$ ในข้อ 1 จะได้

- เลขชี้กำลังของ x ของการกระจาย $(x+y)^2$ ในข้อ 1 คือ 2, 1 และ 0 ตามลำดับ
- เลขชี้กำลังของ y ของการกระจาย $(x+y)^2$ ในข้อ 1 คือ 0, 1 และ 2 ตามลำดับ
- สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ของการกระจาย $(x+y)^2$ ในข้อ 1 คือ 1, 2 และ 1 ตามลำดับ

จากการกระจาย $(x+y)^3$ ในข้อ 1 จะได้

- เลขชี้กำลังของ x ของการกระจาย $(x+y)^3$ ในข้อ 1 คือ 3, 2, 1 และ 0 ตามลำดับ
- เลขชี้กำลังของ y ของการกระจาย $(x+y)^3$ ในข้อ 1 คือ 0, 1, 2 และ 3 ตามลำดับ
- สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ของการกระจาย $(x+y)^3$ ในข้อ 1 คือ 1, 3, 3 และ 1 ตามลำดับ

จากการกระจาย $(x+y)^4$ ในข้อ 1 จะได้

- เลขชี้กำลังของ x ของการกระจาย $(x+y)^4$ ในข้อ 1 คือ 4, 3, 2, 1 และ 0 ตามลำดับ
- เลขชี้กำลังของ y ของการกระจาย $(x+y)^4$ ในข้อ 1 คือ 0, 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ
- สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ของการกระจาย $(x+y)^4$ ในข้อ 1 คือ 1, 4, 6, 4 และ 1 ตามลำดับ

3. จากคำตอบที่ได้ในข้อ 2 ครูและนักเรียนร่วมกันสังเกต และคาดการณ์ในประเด็นต่อไปนี้

3.1 เลขชี้กำลังของ x และเลขชี้กำลังของ y ของแต่ละพจน์ที่ได้จากการกระจาย $(x+y)^n$ เป็นอย่างไร

แนวคำตอบ

- เลขชี้กำลังของ x ของพจน์ 1 คือ n และลดลงเรื่อย ๆ ทีละ 1 จนกระทั่งเลขชี้กำลังเป็น 0 ที่พจน์ n
- เลขชี้กำลังของ y ของพจน์ 1 คือ 0 และเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ทีละ 1 จนกระทั่งเลขชี้กำลังเป็น n ที่พจน์ n
- ผลรวมของเลขชี้กำลังของ x และ y ของแต่ละพจน์ เท่ากับ n

3.2 สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ที่ได้จากการกระจาย $(x+y)^n$ เป็นอย่างไร

แนวคำตอบ

- สัมประสิทธิ์ของพจน์ 1 และพจน์ n เป็น 1 เสมอ
- สัมประสิทธิ์ของพจน์ $x^{n-r}y^r$ เมื่อ $r \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ เท่ากับสัมประสิทธิ์ของพจน์ $x^r y^{n-r}$

4. ครูให้นักเรียนพิจารณาสัมประสิทธิ์ของพจน์ $x^{n-r}y^r$ ที่ได้จากการกระจาย $(x+y)^4$ เมื่อ $r=3$ จะได้ว่า สัมประสิทธิ์ของพจน์ xy^3 คือ 4 ซึ่งเท่ากับการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของ x จำนวน 1 ตัว และ y จำนวน 3 ตัว คือ $xyyy, yxyy, yyxy$ และ $yyyx$ จำนวนวิธีเรียง

สับเปลี่ยน เท่ากับ $\frac{4!}{1!3!} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \binom{4}{3}$ วิธี

5. ครูให้นักเรียนหาสัมประสิทธิ์พจน์ $x^{n-r}y^r$ ของการกระจาย $(x+y)^4$ ในกรณี $r=0, 1, 2$ และ 4

แนวคำตอบ

- เมื่อ $r=0$ สัมประสิทธิ์ของพจน์ x^4 คือ 1 ซึ่งเท่ากับการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของ x จำนวน 4 ตัว จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน เท่ากับ $\frac{4!}{4!0!} = \frac{4!}{(4-0)!0!} = \binom{4}{0}$ วิธี
- ถ้า $r=1$ สัมประสิทธิ์พจน์ x^3y คือ 4 ซึ่งเท่ากับการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของ x จำนวน 3 ตัว และ y จำนวน 1 ตัว คือ $yxxx, xyxx, xxyx$ และ $xxxy$ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน เท่ากับ $\frac{4!}{3!1!} = \frac{4!}{(4-1)!1!} = \binom{4}{1}$ วิธี
- ถ้า $r=2$ สัมประสิทธิ์พจน์ x^2y^2 คือ 6 ซึ่งเท่ากับการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของ x จำนวน 2 ตัว และ y จำนวน 2 ตัว คือ $xyyy, xyxy, xyxy, yyxx, yxyx$ และ $yxyx$ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน เท่ากับ $\frac{4!}{2!2!} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \binom{4}{2}$ วิธี
- ถ้า $r=4$ สัมประสิทธิ์พจน์ y^4 คือ 1 ซึ่งเท่ากับการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของ y จำนวน 4 ตัว จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน เท่ากับ $\frac{4!}{0!4!} = \frac{4!}{(4-4)!4!} = \binom{4}{4}$ วิธี

6. จากคำตอบในข้อ 5 ครูและนักเรียนสังเกตสัมประสิทธิ์ของพจน์ $x^{n-r}y^r$ ที่ได้จากการกระจาย $(x+y)^4$ ซึ่งจะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ อยู่ในรูป $\binom{4}{r}$ เมื่อ $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ และเขียนแสดงการกระจาย $(x+y)^4$ ได้ดังนี้

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$$

7. จากข้อ 6 ครูให้นักเรียนเขียนแสดงการกระจาย $(x+y)^n$ เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

แนวคำตอบ

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{r}x^{n-r}y^r + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

หมายเหตุ

เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีบททวินามแล้ว ครูอาจให้นักเรียนเขียนการกระจาย $(ax+by)^n$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ เพื่อตรวจสอบความเข้าใจ

**ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน**

- ในการกระจาย $(x+y)^n$ จะได้ว่าผลรวมของเลขชี้กำลังของ x และ y ในแต่ละพจน์เท่ากับ n เช่น พจน์ $x^{n-2}y^2$ จะเห็นว่า เลขชี้กำลังของ x คือ $n-2$ และเลขชี้กำลังของ y คือ 2 จะได้ว่า $(n-2)+2=n$

2.3 แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน



กิจกรรม : บทพากย์เอราวัณ

บทพากย์เอราวัณ จากพระราชนิพนธ์เรื่องรามเกียรติ์ ในพระบาทสมเด็จพระพุทธเลิศหล้านภาลัย เป็นกาพย์ฉบัง 16 ซึ่งบรรยายลักษณะของช้างเอราวัณ พาหนะของพระอินทร์ ซึ่งช้างในบทพากย์นี้เกิดจากการเนรมิตของอินทรชิต เพื่อหลอกล่อกองทัพของพระราม โดยส่วนหนึ่งของบทพากย์เป็นดังนี้

ช้างนิรมิตฤทธิ์แรงแข่งขัน	เผือกผ่องผิวพรรณ
สีสังข์สะอาดโอฬาร	
สามสิบสามเศียรโสภา	เศียรหนึ่งเจ็ดงา
ดั่งเพชรรัตนรูจี	
งาหนึ่งเจ็ดโบทครณี	สระหนึ่งย่อมมี
เจ็ดกออุบลบันดาล	
กอหนึ่งเจ็ดดอกดวงมัลย์	ดอกหนึ่งแบ่งบาน
มีกลีบได้เจ็ดกลีบผกา	
กลีบหนึ่งมีเทพธิดา	เจ็ดองค์โสภา
แน่นน้อยลำเพนางพาล	
นางหนึ่งย่อมมีบริวาร	อีกเจ็ดเยาวมัลย์
ล้วนรูปนิรมิตมารยา	

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ โดยใช้ข้อมูลจากบทพากย์ข้างต้น

1. ช้างเอราวัณมีกี่เศียร
2. เศียรช้างเอราวัณแต่ละเศียรมีงากี่งา และช้างเอราวัณมีงารวมทั้งหมดกี่งา
3. งาแต่ละงามีสระบัวกี่สระ และช้างเอราวัณมีสระบัวรวมทั้งหมดกี่สระ
4. สระบัวแต่ละสระมีกอบัวกี่กอ และช้างเอราวัณมีกอบัวรวมทั้งหมดกี่กอ
5. กอบัวแต่ละกอมีดอกบัวกี่ดอก และช้างเอราวัณมีดอกบัวรวมทั้งหมดกี่ดอก
6. ดอกบัวแต่ละดอกมีกี่กลีบ และช้างเอราวัณมีกลีบดอกบัวรวมทั้งหมดกี่กลีบ
7. กลีบดอกบัวแต่ละกลีบมีเทพธิดากี่องค์ และช้างเอราวัณมีเทพธิดารวมทั้งหมดกี่องค์
8. เทพธิดาแต่ละองค์มีบริวารกี่นาง และช้างเอราวัณมีบริวารรวมทั้งหมดกี่นาง
9. ช้างเอราวัณมีเทพธิดาและบริวารรวมทั้งหมดกี่นาง



เฉลยกิจกรรม : บทพากย์เอราวัณ

1. 33 เคียว
2. เคียวข้างแต่ละเคียวมีงา 7 กิ่ง และช้างเอราวัณมีงารวมทั้งหมด 33×7 กิ่ง
3. งาแต่ละกิ่งมีสรีระบัว 7 สรีระ และช้างเอราวัณมีสรีระบัวรวมทั้งหมด 33×7^2 สรีระ
4. สรีระบัวแต่ละสรีระมีกอบัว 7 กอ และช้างเอราวัณมีกอบัวรวมทั้งหมด 33×7^3 กอ
5. กอบัวแต่ละกอมีดอกบัว 7 ดอก และช้างเอราวัณมีดอกบัวรวมทั้งหมด 33×7^4 ดอก
6. ดอกบัวแต่ละดอกมี 7 กลีบ และช้างเอราวัณมีกลีบบัวรวมทั้งหมด 33×7^5 กลีบ
7. กลีบบัวแต่ละกลีบมีเทพธิดา 7 องค์ และช้างเอราวัณมีเทพธิดารวมทั้งหมด 33×7^6 องค์
8. เทพธิดาแต่ละองค์มีบริวาร 7 นาง และช้างเอราวัณมีบริวารรวมทั้งหมด 33×7^7 นาง
9. ช้างเอราวัณมีเทพธิดาและบริวารรวมทั้งหมด $(33 \times 7^6) + (33 \times 7^7) = 264 \times 7^6$ นาง



แนวทางการจัดกิจกรรม : บทพากย์เฮอร์วีน

เวลาในการจัดกิจกรรม 30 นาที

กิจกรรมนี้เสนอไว้ให้นักเรียนฝึกฝนการใช้ความรู้ เรื่อง หลักการบวกและหลักการคูณ เพื่อแก้ปัญหา โดยกิจกรรมนี้มีสื่อ/แหล่งการเรียนรู้ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรม “บทพากย์เฮอร์วีน”
2. รูปช้างเฮอร์วีนจากสารานุกรมไทยสำหรับเยาวชน

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูนำเข้าสู่กิจกรรมโดยเปิดสื่อวีดิทัศน์หรือเล่าเรื่องราวสั้น ๆ เกี่ยวกับช้างเฮอร์วีน
2. ครูแจกใบกิจกรรม “บทพากย์เฮอร์วีน” ให้กับนักเรียนทุกคนและแบ่งกลุ่มนักเรียนแบบ คละความสามารถ กลุ่มละ 3 – 4 คน
3. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาใบกิจกรรมบทพากย์เฮอร์วีน จากนั้นช่วยกันตอบคำถามข้อ 1 – 9 ในใบกิจกรรม ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนใช้แนวทางที่หลากหลายในการหาคำตอบ และอนุญาตให้นักเรียนเขียนแสดงคำตอบในรูปของเลขยกกำลังได้ โดยในระหว่างที่นักเรียนทำกิจกรรมครูควรเดินดูนักเรียนให้ทั่วถึงทุกกลุ่ม และคอยชี้แนะเมื่อนักเรียนมีปัญหา
4. ครูสุ่มเลือกกลุ่มนักเรียนเพื่อตอบคำถาม และให้นักเรียนกลุ่มอื่น ๆ ร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบ รวมทั้งกระตุ้นให้นักเรียนให้เหตุผลประกอบคำตอบ
5. ครูแสดงภาพตัวอย่างของช้างเฮอร์วีน จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อสรุปเกี่ยวกับบทพากย์เฮอร์วีนที่นักเรียนได้อ่าน ซึ่งเป็นบทประพันธ์ที่แสดงถึงจินตนาการของกวีที่พรรณนาความยิ่งใหญ่ของช้างเฮอร์วีน

2.4 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน

การวัดผลระหว่างเรียนมีเป้าหมายเพื่อปรับปรุงการเรียนรู้และพัฒนาการเรียนการสอน และตรวจสอบนักเรียนแต่ละคนว่ามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่ครูสอนมากน้อยเพียงใด การให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเป็นแนวทางหนึ่งที่ครูอาจใช้เพื่อประเมินผลด้านความรู้ระหว่างเรียนของนักเรียน ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดที่ครอบคลุมเนื้อหาที่สำคัญของแต่ละบทไว้ สำหรับในบทที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น ครูอาจใช้แบบฝึกหัดเพื่อวัดผลประเมินผลความรู้ในแต่ละเนื้อหาได้ดังนี้

เนื้อหา	แบบฝึกหัด	
หลักการบวกและหลักการคูณ	2.1	ข้อ 1 – 14
การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด	2.2	ข้อ 1 – 12
การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด	2.3	ข้อ 1 – 5
การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด	2.4	ข้อ 1 – 4
การจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด	2.5	ข้อ 1 – 10
ทฤษฎีบททวินาม	2.6	ข้อ 1 – 6

2.5 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 มีจุดมุ่งหมายว่า เมื่อนักเรียนได้เรียนจบบทที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น แล้วนักเรียนสามารถ

1. ใช้หลักการนับเบื้องต้นในการแก้ปัญหา
2. ใช้วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นกรณีที่สิ่งของแตกต่างกันทั้งหมดในการแก้ปัญหา
3. ใช้วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นกรณีที่สิ่งของไม่แตกต่างกันทั้งหมดในการแก้ปัญหา
4. ใช้วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมกรณีที่สิ่งของแตกต่างกันทั้งหมดในการแก้ปัญหา
5. ใช้วิธีจัดหมู่กรณีที่สิ่งของแตกต่างกันทั้งหมดในการแก้ปัญหา
6. ใช้ทฤษฎีบททวินามในการแก้ปัญหา

ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดท้ายบทที่ประกอบด้วยโจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียน ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมาย นอกจากนี้มีโจทย์ฝึกทักษะที่น่าสนใจและโจทย์ท้าทาย ครูอาจเลือกใช้แบบฝึกหัดท้ายบทวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบทเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนมีความสามารถตามจุดมุ่งหมายเมื่อเรียนจบบทเรียนหรือไม่

ทั้งนี้แบบฝึกหัดท้ายบทแต่ละข้อในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 บทที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียน ดังนี้

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
1. ใช้หลักการนับเบื้องต้นในการแก้ปัญหา	1	
	2	
	3	
	4	1) – 3)
	5	1) – 2)
	6	
	7	
	8	
	9	1) – 2)
	21	

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
2. ใช้วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นกรณีที่สิ่งของแตกต่างกันทั้งหมดในการแก้ปัญหา	10	
	11	
3. ใช้วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นกรณีที่สิ่งของไม่แตกต่างกันทั้งหมดในการแก้ปัญหา	12	1) – 3)
	13	1) – 3)
	15	
4. ใช้วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมกรณีที่สิ่งของแตกต่างกันทั้งหมดในการแก้ปัญหา	14	
	16	1) – 2)
	17	
	20*	
5. ใช้วิธีจัดหมู่กรณีที่สิ่งของแตกต่างกันทั้งหมดในการแก้ปัญหา	18	1) – 2)
	19	
	20*	
	22	
	24	1)
	28	1) – 3)
6. ใช้ทฤษฎีบทวินามในการแก้ปัญหา	33	
	34	
	35	
	37	
	39	
โจทย์ท้าทาย	16	3)
	23	
	24	2)

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
โจทย์ท้าทาย (ต่อ)	25	
	26	
	27	
	29	
	30	2)
	31	
	32	1) – 4)
	36	
	38	
	40	
	41	

หมายเหตุ

แบบฝึกหัดท้ายบทข้อ 20 สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียนมากกว่า 1 จุดมุ่งหมาย

2.6 ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู

- P ใน $P_{n,r}$ มาจากคำว่า Permutation ในภาษาอังกฤษ สำหรับในคณิตศาสตร์จะใช้ในความหมายของ “การเรียงสับเปลี่ยน” ในบางตำราอาจใช้สัญลักษณ์ P_r^n , ${}_nP_r$, ${}^nP_r$ หรือ $P(n, r)$
- C ใน $C_{n,r}$ มาจากคำว่า Combination ในภาษาอังกฤษ สำหรับในคณิตศาสตร์จะใช้ในความหมายของ “การจัดหมู่” ในบางตำราอาจใช้สัญลักษณ์ C_r^n , ${}_nC_r$, ${}^nC_r$, $C(n, r)$ หรือ $\binom{n}{r}$
- ให้ $P_{n,r}$ แทนจำนวนวิธีในการนำสิ่งของ r ชิ้น จากสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น จะได้ว่า
 - 1) $P_{n,n} = n!$
 - 2) $P_{n,0} = 1$
 - 3) $P_{n,1} = n$
 - 4) $P_{n,n-1} = n!$
 - 5) $P_{n-1,r} + r \cdot P_{n-1,r-1} = P_{n,r}$
 - 6) $\frac{P_{n,r}}{P_{n,r-1}} = n - r + 1$
- ให้ $C_{n,r}$ แทนจำนวนวิธีเลือกสิ่งของ r ชิ้น จากสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น จะได้ว่า
 - 1) $C_{n,0} = C_{n,n} = 1$
 - 2) $C_{n,1} = n$
 - 3) ถ้า $C_{n,r} = C_{n,n-r}$
 - 4) $C_{n,r} = \frac{P_{n,r}}{r!}$
 - 5) $C_{n,r} + C_{n,r-1} = C_{n+1,r}$
 - 6) $C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n} = 2^n$
 - 7) $C_{n,0} + C_{n,2} + C_{n,4} + \cdots = C_{n,1} + C_{n,3} + C_{n,5} + \cdots = 2^{n-1}$

- ให้ A เป็นเซตใด ๆ ซึ่งมีสมาชิก n ตัว
การแสดงว่าจำนวนสับเซตทั้งหมดของ A เท่ากับ 2^n สามารถทำได้โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับการจัดหมู่ ดังนี้

เนื่องจาก A เป็นเซตใด ๆ ซึ่งมีสมาชิก n ตัว จะพบได้ว่า

สับเซตของ A ที่มีสมาชิก 0 ตัว มีอยู่ $\binom{n}{0}$ เซต

สับเซตของ A ที่มีสมาชิก 1 ตัว มีอยู่ $\binom{n}{1}$ เซต

สับเซตของ A ที่มีสมาชิก 2 ตัว มีอยู่ $\binom{n}{2}$ เซต

$\vdots$

สับเซตของ A ที่มีสมาชิก n ตัว มีอยู่ $\binom{n}{n}$ เซต

นั่นคือ จำนวนสับเซตทั้งหมดของ A เท่ากับ $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$

จากทฤษฎีบททวินาม จะได้ว่า

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

เมื่อแทน x และ y ด้วย 1 จะได้

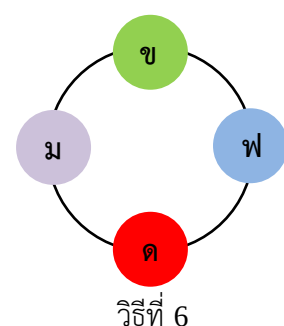
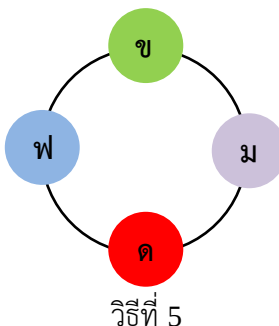
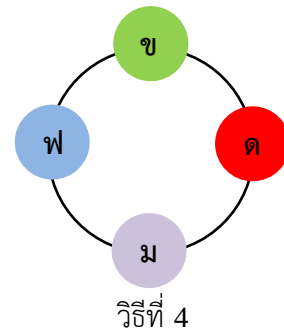
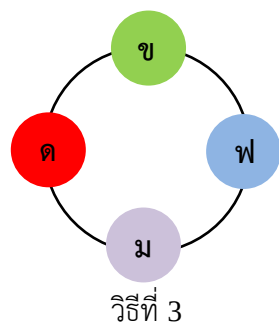
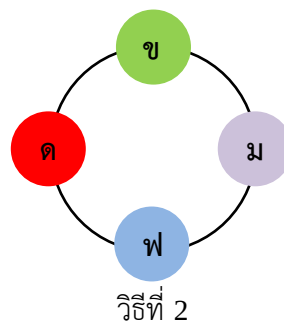
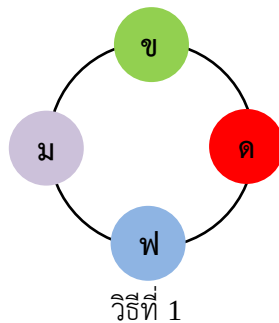
$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

$$\text{หรือ } C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n} = 2^n$$

ดังนั้น จำนวนสับเซตทั้งหมดของ A เท่ากับ 2^n

- นอกจากการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมที่นำเสนอในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 แล้ว ยังมีการเรียงสับเปลี่ยนที่แตกต่างจากที่นำเสนอไปแล้ว เช่น ปัญหาเกี่ยวกับการร้อยลูกปัดเป็นวงกลม หรือการร้อยดอกไม้เป็นวงกลม สมมุติว่ามีลูกปัด 4 ลูก ซึ่งมีสีเขียว สีแดง สีฟ้า และสีม่วง ถ้าต้องการจัดเรียงลูกปัดทั้ง 4 ลูกเป็นวงกลมบน ระบายจะจัดได้ $(4-1)! = 3! = 6$ วิธี ดังรูป



จากรูปจะเห็นว่า การร้อยลูกปัดของวิธีที่ 1 และ 2 วิธีที่ 3 และ 4 และวิธีที่ 5 และ 6 เป็นวิธีที่เกิดจากการสลับที่ของลูกปัดลูกที่สองและลูกสุดท้าย เช่น วิธีที่ 1 และ 2 เกิดจากการสลับที่กันของลูกปัดสีม่วงและลูกปัดสีแดง โดยเมื่อพลิกแบบที่ 1 จะได้แบบที่ 2 ดังนั้นจึงร้อยลูกปัดได้เพียง 3 วิธี คือ วิธีที่ 1, 3 และ 5 เพราะในการร้อยวิธีที่ 1 ทำให้เกิดวิธีที่ 2 ด้วย นั่นคือ เมื่อพลิกอีกด้านหนึ่งของวิธีที่ 1 ขึ้น ก็จะได้การจัดเรียงวิธีที่ 2 นั่นเอง ในทำนองเดียวกัน ถ้าพลิกอีกด้านหนึ่งของวิธีที่ 3 จะได้การจัดเรียงวิธีที่ 4 และพลิกอีกด้านหนึ่งของวิธีที่ 5 จะได้การจัดเรียงวิธีที่ 6

โดยทั่วไป จำนวนวิธีจัดเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมในลักษณะนี้ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนจะเป็นครึ่งหนึ่งของจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมที่กล่าวไว้ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2

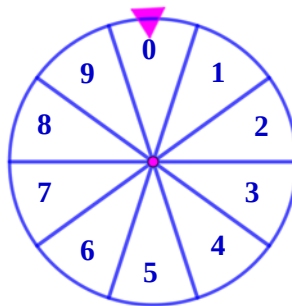
2.7 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทและเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

ในส่วนนี้จะนำเสนอตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น สำหรับรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ซึ่งครูสามารถเลือกนำไปใช้ได้ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดผลประเมินผล

ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. ก้นยามีเสื้อ 4 ตัว เป็นเสื้อสีขาว สีนํ้าเงิน สีส้ม และสีดำ มีกระโปรง 6 ตัว เป็นกระโปรงสีแดง สีดำ สีครีม สีนํ้าเงิน สีนํ้าตาล และสีขาว และมีรองเท้า 3 คู่ เป็นรองเท้าสีแดง สีดำ และสีนํ้าตาล ถ้าก้นยาต้องการเลือกชุด 1 ชุดเพื่อใส่ไปสมัครงาน ซึ่งประกอบด้วยเสื้อ 1 ตัว กระโปรง 1 ตัว และรองเท้า 1 คู่ ก้นยาจะมีวิธีเลือกชุดเพื่อใส่ไปสมัครงานได้กี่วิธี
2. ทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกสองครั้ง จงหาจำนวนวิธีที่ผลคูณของแต้มที่ได้เป็นจำนวนคี่
3. ในตะกร้ามีแอปเปิ้ล 15 ผล เป็นแอปเปิ้ลที่เน่า 3 ผล จงหาจำนวนวิธีที่หยิบแอปเปิ้ลขึ้นมาจากตะกร้า 4 ผล ได้แอปเปิ้ลที่เน่า 2 ผล
4. หน่วยงานในบริษัทแห่งหนึ่งมีพนักงาน 30 คน จัดงานเลี้ยงฉลองปีใหม่โดยมีของรางวัลให้กับพนักงานจำนวน 6 รางวัล ดังนี้
 - รางวัลที่ 1 สร้อยคอทองคำหนัก 3 บาท จำนวน 1 รางวัล
 - รางวัลที่ 2 ตัวเครื่องบินไป – กลับ 2 ที่นั่ง พร้อมที่พัก 1 คืน จำนวน 2 รางวัล
 - ที่เหมือนกัน
 - รางวัลที่ 3 เงินสด 5,000 บาท จำนวน 3 รางวัล
 จงหาจำนวนวิธีในการจับสลากของรางวัลโดยไม่มีพนักงานคนใดได้มากกว่า 1 รางวัล
5. จงหาจำนวนวิธีจัดเรียงตัวอักษรในคำว่า “TRAVELLER” โดยไม่คำนึงถึงความหมายและขึ้นต้นด้วยตัวอักษร V เสมอ
6. สมปองมีเหรียญสองบาท จำนวน 4 เหรียญ เหรียญบาท จำนวน 8 เหรียญ จงหาจำนวนวิธีในการจ่ายเงินด้วยเหรียญดังกล่าวเพื่อซื้อสินค้าราคา 10 บาท โดยร้านค้าไม่ต้องทอนเงิน (ร้านค้ารับเหรียญทุกชนิด)
7. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลที่มีขนาดเท่ากัน 6 ลูก แต่ละลูกเขียนหมายเลข 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 กำกับไว้หมายเลขละ 1 ลูก สุ่มหยิบลูกบอลสามลูกพร้อมกัน จงหาจำนวนวิธีที่ผลรวมของจำนวนที่เป็นหมายเลขของลูกบอลทั้งสามเป็นจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว

8. ห้องเรียนหนึ่งมีนักเรียน 41 คน เป็นนักเรียนชาย 25 คน และนักเรียนหญิง 16 คน ต้องการคัดเลือกตัวแทนเพื่อถือพานในวันไหว้ครูเป็นนักเรียนชาย 1 คน และนักเรียนหญิง 1 คน และตัวแทนเพื่อกล่าวคำปฏิญาณเป็นนักเรียนชายหรือนักเรียนหญิงก็ได้ 1 คน ที่ไม่ซ้ำกับตัวแทนถือพาน จงหาจำนวนวิธีในการคัดเลือกตัวแทนทั้งหมด
9. เกมวงล้อปาโซค ประกอบด้วยช่องที่เท่ากัน 10 ช่อง แต่ละช่องเขียนเลขโดดตัวใดตัวหนึ่งตั้งแต่ 0–9 ไว้โดยไม่มีช่องใดที่เขียนเลขโดดซ้ำกัน ผู้เล่นแต่ละคนจะได้หมุนวงล้อ 2 ครั้ง และจะได้รับรางวัลเมื่อแต้มของการหมุนทั้งสองครั้งรวมกันมากกว่า 14 แต้ม จงหาจำนวนวิธีที่ผู้เล่นแต่ละคนจะได้รับรางวัลในการเล่นเกมนี้อย่างน้อย



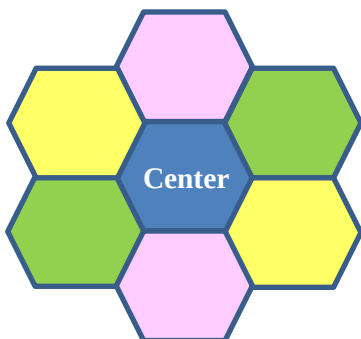
10. ฐิติเลือกซื้อแปรงสีฟัน 1 อัน และยาสีฟัน 1 หลอด จากทั้งหมด 5 ยี่ห้อ คือ A, B, C, D และ E โดยยี่ห้อ A, C และ E จะขายแปรงสีฟันและยาสีฟันแยกกัน ส่วนยี่ห้อ B และ D จะขายแปรงสีฟันและยาสีฟันรวมกันเป็นชุดเท่านั้น จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่ฐิติจะเลือกซื้อแปรงสีฟันและยาสีฟันยี่ห้อเหล่านี้

11.



สวนสนุกแห่งหนึ่งมีชิงช้าสวรรค์ซึ่งมีกระเช้าทั้งหมด 16 กระเช้าที่แตกต่างกัน เป็นกระเช้าสีเหลือง น้ำเงิน เขียว และแดง สีละ 4 กระเช้า (ดังรูป) ถ้าพ่อและแม่พาตะวันและจันทร์เจ้าไปเล่นชิงช้าสวรรค์ดังกล่าว โดยทั้งสองขึ้นกระเช้าเดียวกัน จงหาจำนวนวิธีที่ทั้งสองขึ้นชิงช้าสวรรค์ 2 รอบ โดยได้กระเช้าสีที่แตกต่างกัน

12.



กำหนดช่องสีต่าง ๆ โดยมีคำว่า Center เขียนกำกับไว้ที่ช่องสีฟ้าที่อยู่ตรงกลางดังรูป ถ้าวิรยาต้องการจัดวางเลขโดด 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 และ 8 ลงในช่อง โดยไม่มีเลขโดดใดอยู่ในช่อง Center และผลรวมของจำนวนที่อยู่ในช่องตรงกันข้ามที่มีสีเดียวกันเป็น 9 จงหาจำนวนวิธีที่วิรยาจัดวางเลขโดดดังกล่าว

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

- พิจารณาการเลือกชุดของกันยาเพื่อใส่ไปสมัครงาน (โดยจะเลือกชิ้นใดก่อนก็ได้) ดังนี้
เลือกเสื้อ 1 ตัว จากเสื้อทั้งหมด 4 ตัว ได้ 4 วิธี
เลือกกระโปรง 1 ตัว จากกระโปรงทั้งหมด 6 ตัว ได้ 6 วิธี
เลือกรองเท้า 1 คู่ จากรองเท้าทั้งหมด 3 คู่ ได้ 3 วิธี
ดังนั้น กันยาจะมีวิธีเลือกชุดเพื่อใส่ไปสมัครงานได้ $4 \times 6 \times 3 = 72$ วิธี
- เนื่องจาก ผลคูณของแต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกสองครั้ง จะเป็นจำนวนคี่เมื่อแต้มที่ได้ทั้งสองครั้งเป็นจำนวนคี่ โดยแต้มที่เป็นจำนวนคี่ ได้แก่ 1, 3 และ 5
จะได้ว่า การทอดลูกเต๋าดังกล่าวแบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้
ขั้นตอนที่ 1 ทอดลูกเต๋ารั้งแรก ได้แต้มเป็นจำนวนคี่ ทำได้ 3 วิธี
ขั้นตอนที่ 2 ทอดลูกเต๋ารั้งที่ 2 ได้แต้มเป็นจำนวนคี่ ทำได้ 3 วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีที่ผลคูณของแต้มที่ได้เป็นจำนวนคี่จากการทอดลูกเต๋าดังกล่าวหนึ่งลูกสองครั้งเป็น $3 \times 3 = 9$ วิธี
- ในตะกร้ามีแอปเปิ้ล 15 ผล เป็นแอปเปิ้ลที่เน่า 3 ผล และแอปเปิ้ลที่ดี 12 ผล
พิจารณาการหยิบแอปเปิ้ล ดังนี้
หยิบแอปเปิ้ลที่เน่า 2 ผล จากแอปเปิ้ลที่เน่าทั้งหมด 3 ผล ได้ $C_{3,2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$ วิธี
หยิบแอปเปิ้ลที่ดี 2 ผล จากแอปเปิ้ลที่ดีทั้งหมด 12 ผล ได้ $C_{12,2} = \frac{12!}{10!2!} = 66$ วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีที่หยิบแอปเปิ้ลขึ้นมาจากตะกร้า 4 ผล ได้แอปเปิ้ลที่เน่า 2 ผล เป็น $3 \times 66 = 198$ วิธี

4. วิธีที่ 1 การจับสลากเลือกพนักงานที่ได้รับรางวัลมี 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จับสลากเลือกพนักงาน 1 คน จากพนักงานทั้งหมด 30 คน เพื่อรับรางวัลที่ 1 ทำได้ $C_{30,1} = 30$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จับสลากเลือกพนักงาน 2 คน จากพนักงานที่เหลือ 29 คน เพื่อรับรางวัลที่ 2 ทำได้ $C_{29,2} = \frac{29!}{27!2!} = 29 \times 14$ วิธี

ขั้นตอนที่ 3 จับสลากเลือกพนักงาน 3 คน จากพนักงานที่เหลือ 27 คน เพื่อรับรางวัลที่ 3 ทำได้ $C_{27,3} = \frac{27!}{24!3!} = 25 \times 13 \times 9$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดในการจับสลากของรางวัลโดยไม่มีคนใดได้มากกว่า 1 รางวัล เป็น $30 \times (29 \times 14) \times (25 \times 13 \times 9) = 35,626,500$ วิธี

วิธีที่ 2 การจับสลากเลือกพนักงานที่ได้รับรางวัลมี 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกพนักงาน 6 คน จากพนักงานทั้งหมด 30 คน เพื่อรับรางวัล ทำได้ $C_{30,6} = \frac{30!}{24!6!} = 29 \times 25 \times 13 \times 9 \times 7$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกพนักงาน 1 คน จากพนักงาน 6 คนที่เลือกในขั้นตอนที่ 1 เพื่อรับรางวัลที่ 1 ทำได้ $C_{6,1} = 6$ วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกพนักงาน 2 คน จากพนักงานที่เหลือ 5 คน เพื่อรับรางวัลที่ 2 ทำได้ $C_{5,2} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ วิธี

ขั้นตอนที่ 4 เลือกพนักงาน 3 คน จากพนักงานที่เหลือ 3 คน เพื่อรับรางวัลที่ 3 ทำได้ $C_{3,3} = 1$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดในการจับสลากของรางวัลโดยไม่มีคนใดได้เกิน 1 รางวัล เป็น $29 \times 25 \times 13 \times 10 \times 9 \times 7 \times 6 = 35,626,500$ วิธี

5. ตัวอักษรที่กำหนดให้ทั้งหมด 9 ตัว คือ R, R, L, L, E, E, T, A และ V

วิธีที่ 1 การจัดเรียงตัวอักษรดังกล่าวโดยไม่คำนึงถึงความหมายและขึ้นต้นด้วยตัวอักษร V เสมอ แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จัดเรียงตัวอักษร V เป็นตัวอักษรตัวแรก ทำได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดเรียงตัวอักษรอื่น ๆ ทำได้ $\frac{8!}{2!2!2!} = 5,040$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดเรียงตัวอักษรในคำว่า “TRAVELLER” โดยไม่คำนึงถึงความหมายและขึ้นต้นด้วยตัวอักษร V เสมอ เป็น $1 \times 5,040 = 5,040$ วิธี

วิธีที่ 2 การจัดเรียงตัวอักษรดังกล่าวโดยไม่คำนึงถึงความหมายและขึ้นต้นด้วยตัวอักษร V เสมอ คือการจัดให้ตัวอักษร V อยู่ในตำแหน่งหน้าสุด และอีก 8 ตำแหน่งที่เหลือเป็นตัวอักษรที่กำหนดให้ตัวใดก็ได้

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดเรียงตัวอักษรในคำว่า “TRAVELLER” โดยไม่คำนึงถึงความหมายและขึ้นต้นด้วยตัวอักษร V เสมอ เป็น $\frac{P_{8,8}}{2!2!2!} = \frac{8!}{2!2!2!} = 5,040$ วิธี

6. **วิธีที่ 1** เนื่องจาก เหรียญที่มีมูลค่าเท่ากันถือว่าเป็นเหรียญที่เหมือนกัน
จะได้ว่า การจ่ายเงินของสมปองแบ่งเป็น 4 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 การจ่ายเงินโดยใช้เหรียญสองบาท จำนวน 4 เหรียญ
แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จ่ายเงินโดยใช้เหรียญสองบาท จำนวน 4 เหรียญ ได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จ่ายเงินโดยใช้เหรียญบาท ทำได้ 1 วิธี คือ ใช้เหรียญบาท
จำนวน 2 เหรียญ

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะจ่ายเงินซื้อสินค้าราคา 10 บาท โดยใช้เหรียญสองบาท
จำนวน 4 เหรียญ มีได้ $1 \times 1 = 1$ วิธี

กรณีที่ 2 การจ่ายเงินโดยใช้เหรียญสองบาท จำนวน 3 เหรียญ
แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จ่ายเงินโดยใช้เหรียญสองบาท จำนวน 3 เหรียญ ได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จ่ายเงินโดยใช้เหรียญบาท ทำได้ 1 วิธี คือ ใช้เหรียญบาท
จำนวน 4 เหรียญ

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะจ่ายเงินซื้อสินค้าราคา 10 บาท โดยใช้เหรียญสองบาท
จำนวน 3 เหรียญ มีได้ $1 \times 1 = 1$ วิธี

กรณีที่ 3 การจ่ายเงินโดยใช้เหรียญสองบาท จำนวน 2 เหรียญ

แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จ่ายเงินโดยใช้เหรียญสองบาท จำนวน 2 เหรียญ ได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จ่ายเงินโดยใช้เหรียญบาท ทำได้ 1 วิธี คือ ใช้เหรียญบาท
จำนวน 6 เหรียญ

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะจ่ายเงินซื้อสินค้าราคา 10 บาท โดยใช้เหรียญสองบาท
จำนวน 2 เหรียญ มีได้ $1 \times 1 = 1$ วิธี

กรณีที่ 4 การจ่ายเงินโดยใช้เหรียญสองบาท จำนวน 1 เหรียญ

แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จ่ายเงินโดยใช้เหรียญสองบาท จำนวน 1 เหรียญ ได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จ่ายเงินโดยใช้เหรียญบาท ทำได้ 1 วิธี คือ ใช้เหรียญบาท
จำนวน 8 เหรียญ

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะจ่ายเงินซื้อสินค้าราคา 10 บาท โดยใช้เหรียญสองบาท
จำนวน 1 เหรียญ มีได้ $1 \times 1 = 1$ วิธี

จะได้ว่า จำนวนวิธีที่จะจ่ายเงินซื้อสินค้าราคา 10 บาท มีทั้งหมด $1+1+1+1=4$ วิธี
วิธีที่ 2 เขียนตารางแสดงการจ่ายเงินซื้อสินค้าราคา 10 บาท เมื่อมีเหรียญสองบาท จำนวน
4 เหรียญ และเหรียญบาท จำนวน 8 เหรียญ

วิธีที่	จำนวนเหรียญ	
	เหรียญบาท	เหรียญสองบาท
1	8	1
2	6	2
3	4	3
4	2	4

จากตาราง จึงได้ว่า จำนวนวิธีที่จะจ่ายเงินซื้อสินค้าราคา 10 บาท มีทั้งหมด 4 วิธี

7. การหยิบลูกบอลสามลูกพร้อมกันให้ได้ผลรวมของจำนวนที่เป็นหมายเลขของลูกบอลทั้งสาม เป็นจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว แบ่งเป็น 4 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ผลรวมเป็น 6 มี 1 วิธี คือ (1, 2, 3)

กรณีที่ 2 ผลรวมเป็น 9 มี 3 วิธี คือ (1, 2, 6), (1, 3, 5) และ (2, 3, 4)

กรณีที่ 3 ผลรวมเป็น 12 มี 3 วิธี คือ (1, 5, 6), (2, 4, 6) และ (3, 4, 5)

กรณีที่ 4 ผลรวมเป็น 15 มี 1 วิธี คือ (4, 5, 6)

โดยหลักการบวก จึงได้ว่า จำนวนวิธีที่ผลรวมของจำนวนที่เป็นหมายเลขของลูกบอลทั้งสาม เป็นจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว เป็น $1+3+3+1=8$ วิธี

8. การคัดเลือกตัวแทน มี 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การคัดเลือกตัวแทนเพื่อถือพานไหว้ครูเป็นนักเรียนชาย 1 คน และนักเรียนหญิง 1 คน พิจารณาได้ดังนี้

คัดเลือกนักเรียนชาย 1 คน จากนักเรียนชายทั้งหมด 25 คน ทำได้ 25 วิธี

คัดเลือกนักเรียนหญิง 1 คน จากนักเรียนหญิงทั้งหมด 16 คน ทำได้ 16 วิธี

โดยหลักการคูณ จึงได้ว่า มีวิธีคัดเลือกตัวแทนเพื่อถือพานไหว้ครูทั้งหมด

$$25 \times 16 = 400 \text{ วิธี}$$

ขั้นตอนที่ 2 การคัดเลือกตัวแทนเพื่อกล่าวคำปฏิญาณ 1 คนจากนักเรียนชายหรือนักเรียนหญิงที่ไม่ได้เป็นตัวแทนถือพานไหว้ครูทั้งหมด 39 คน ทำได้ 39 วิธี

โดยหลักการคูณ จึงได้ว่า มีวิธีคัดเลือกตัวแทนทั้งหมด $400 \times 39 = 15,600$ วิธี

9. ผู้เล่นแต่ละคนจะได้รางวัลเมื่อแต้มทั้งสองครั้งรวมกันได้ตั้งแต่ 15 แต้มเป็นต้นไป ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

แต้มที่ได้จากการหมุนครั้งที่ 1	แต้มที่ได้จากการหมุนครั้งที่ 2
6	9
7	8, 9
8	7, 8, 9
9	6, 7, 8, 9

ดังนั้น จำนวนวิธีที่ผู้เล่นแต่ละคนจะได้รับรางวัลในการเล่นเกมนี้นี้มี 10 วิธี

10. การเลือกซื้อแปรงสีฟันและยาสีฟันของจิตินี้ได้ 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 การเลือกซื้อแปรงสีฟันและยาสีฟันที่จัดเป็นชุด จากชุดแปรงสีฟันและยาสีฟันยี่ห้อ B หรือ D มี 2 วิธี

กรณีที่ 2 เลือกซื้อแปรงสีฟันและยาสีฟันซึ่งขายแยกกัน พิจารณาดังนี้

เลือกซื้อแปรงสีฟัน จากแปรงสีฟันยี่ห้อ A, C หรือ E ได้ 3 วิธี

เลือกซื้อยาสีฟัน จากยาสีฟันยี่ห้อ A, C หรือ E ได้ 3 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จิตินี้จะเลือกซื้อแปรงสีฟันและยาสีฟันซึ่งขายแยกกันมี $3 \times 3 = 9$ วิธี

จะได้ว่า จำนวนวิธีทั้งหมดที่จิตินี้จะเลือกซื้อแปรงสีฟันและยาสีฟันยี่ห้อเหล่านี้มี $2 + 9 = 11$ วิธี

11. **วิธีที่ 1** การเลือกขึ้นชิงช้าสวรรค์ของครอบครัวนี้แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกขึ้นกระเช้าชิงช้าสวรรค์รอบที่ 1 จากกระเช้าทั้งหมด 16 กระเช้าได้ 16 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกขึ้นกระเช้าชิงช้าสวรรค์รอบที่ 2 ที่มีสีซ้ำกับกระเช้าที่ขึ้นรอบแรก ได้ $16 - 4 = 12$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่ครอบครัวนี้ขึ้นชิงช้าสวรรค์ 2 รอบ โดยได้กระเช้าสีที่แตกต่างกันเป็น $16 \times 12 = 192$ วิธี

วิธีที่ 2 การเลือกขึ้นชิงช้าสวรรค์ของครอบครัวนี้แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เนื่องจากกระเช้าชิงช้าสวรรค์มี 4 สี กระเช้าแต่ละสีแตกต่างกันทั้งหมดจะได้ว่า การเลือกขึ้นกระเช้าชิงช้าสวรรค์รอบที่ 1 พิจารณาได้ดังนี้
เลือกขึ้นกระเช้าสีใดสีหนึ่งจากทั้งหมด 4 สี ทำได้ 4 วิธี และเลือกขึ้นกระเช้าใดกระเช้าหนึ่งตามสีที่เลือก จากทั้งหมด 4 กระเช้า ทำได้ 4 วิธี

ดังนั้น การเลือกขึ้นกระเช้าชิงช้าสวรรค์ในรอบที่ 1 ทำได้ $4 \times 4 = 16$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เนื่องจากต้องการขึ้นชิงช้าสวรรค์รอบที่ 2 ที่มีสีแตกต่างรอบแรกจะได้ว่า การเลือกขึ้นกระเช้าชิงช้าสวรรค์รอบที่ 2 พิจารณาได้ดังนี้
เลือกขึ้นกระเช้าสีใดสีหนึ่งจากสีที่เหลือ 3 สี ทำได้ 3 วิธี และเลือกขึ้นกระเช้าใดกระเช้าหนึ่งตามสีที่เลือก จากทั้งหมด 4 กระเช้า ทำได้ 4 วิธี

ดังนั้น การเลือกขึ้นกระเช้าชิงช้าสวรรค์ในรอบที่ 2 ทำได้ $3 \times 4 = 12$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่ครอบครัวนี้ขึ้นชิงช้าสวรรค์ 2 รอบ โดยได้กระเช้าสีที่แตกต่างกันเป็น $16 \times 12 = 192$ วิธี

12. **วิธีที่ 1** เลขโดดที่รวมกันแล้วได้เป็น 9 มี 4 คู่ ได้แก่ (1, 8), (2, 7), (3, 6) และ (4, 5)
การเลือกเลขโดดเพื่อจัดวางในช่องต่าง ๆ ของwiryaจะพิจารณาวางเลขโดดในช่องสี่ใดก่อนก็ได้ แบ่งเป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

- ขั้นตอนที่ 1** การเลือกเลขโดดเพื่อจัดวางในช่องสี่ชมพู พิจารณาได้ดังนี้
เลือกเลขโดด 1 คู่ จากเลขโดดทั้งหมด 4 คู่ เพื่อจัดวางในช่องสี่ชมพู
ได้ 4 วิธี และสลับที่เลขโดดที่เลือกได้ 2 วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีที่wiryajจัดวางเลขโดดในช่องสี่ชมพูมี $4 \times 2 = 8$ วิธี
- ขั้นตอนที่ 2** การเลือกเลขโดดเพื่อจัดวางในช่องสี่เขียว พิจารณาได้ดังนี้
เลือกเลขโดด 1 คู่ จากเลขโดดที่เหลือ 3 คู่ เพื่อจัดวางในช่องสี่เขียว
ได้ 3 วิธี และสลับที่เลขโดดที่เลือกในขั้นตอนที่ 1 ได้ 2 วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีที่wiryajจัดวางเลขโดดในช่องสี่เขียวมี $3 \times 2 = 6$ วิธี
- ขั้นตอนที่ 3** การเลือกเลขโดดเพื่อจัดวางในช่องสี่เหลือง พิจารณาได้ดังนี้
เลือกเลขโดด 1 คู่ จากเลขโดดที่เหลือ 2 คู่ เพื่อจัดวางในช่องสี่เหลือง
ได้ 2 วิธี และสลับที่เลขโดดที่เลือกในขั้นตอนที่ 1 ได้ 2 วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีที่wiryajจัดวางเลขโดดในช่องสี่เหลืองมี $2 \times 2 = 4$ วิธี

จะได้ว่า จำนวนวิธีที่wiryajจัดวางเลขโดดทั้งหมดมี $8 \times 6 \times 4 = 192$ วิธี

- วิธีที่ 2** เนื่องจาก มีเลขโดดทั้งหมด 8 ตัว คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 และ 8 โดยการจัดวางเลขโดดของwiryaจะพิจารณาวางเลขโดดในช่องสี่ใดก่อนก็ได้

จะได้ว่า การจัดวางเลขโดดของwiryaแบ่งเป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

- ขั้นตอนที่ 1** การจัดวางเลขโดดในช่องสี่ชมพูพิจารณาได้ดังนี้
เลือกเลขโดด 1 ตัว เพื่อจัดวางลงในช่องสี่ชมพูช่องใดช่องหนึ่งได้ 8 วิธี
และเลือกเลขโดดอีก 1 ตัว เพื่อจัดวางลงในช่องสี่ชมพูอีกช่องหนึ่ง
ทำให้ผลรวมของจำนวนที่อยู่ในช่องสี่ชมพูทั้งสองช่องเป็น 9 ได้ 1 วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีที่wiryajจัดวางเลขโดดในช่องสี่ชมพูมี $8 \times 1 = 8$ วิธี

- ขั้นตอนที่ 2** การจัดวางเลขโดดในช่องสีเขียวยุติพิจารณาได้ดังนี้
เลือกเลขโดด 1 ตัว ที่ไม่ซ้ำกับเลขโดดที่จัดวางในช่องสีชมพู เพื่อจัดวางลงในช่องสีเขียวยุติช่องหนึ่งได้ 6 วิธี และเลือกเลขโดดอีก 1 ตัว ที่ไม่ซ้ำกับเลขโดดที่จัดวางในช่องสีชมพู เพื่อจัดวางลงในช่องสีเขียวยุติช่องหนึ่งที่ทำให้ผลรวมของจำนวนที่อยู่ในช่องสีเขียวยุติทั้งสองช่องเป็น 9 ได้ 1 วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีที่วิธียาจัดวางเลขโดดในช่องสีเขียวยุติมี $6 \times 1 = 6$ วิธี
- ขั้นตอนที่ 3** การจัดวางเลขโดดในช่องสีเหลืองพิจารณาได้ดังนี้
เลือกเลขโดด 1 ตัว ที่ไม่ซ้ำกับเลขโดดที่จัดวางในช่องสีชมพูและสีเขียวยุติ เพื่อจัดวางลงในช่องสีเหลืองช่องใดช่องหนึ่งได้ 4 วิธี และเลือกเลขโดดอีก 1 ตัว ที่ไม่ซ้ำกับเลขโดดที่จัดวางในช่องสีชมพูและสีเขียวยุติ เพื่อจัดวางลงในช่องสีเหลืองอีกช่องหนึ่งที่ทำให้ผลรวมของจำนวนที่อยู่ในช่องสีเหลืองทั้งสองช่องเป็น 9 ได้ 1 วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีที่วิธียาจัดวางเลขโดดในช่องสีเหลืองมี $4 \times 1 = 4$ วิธี
จะได้ว่า จำนวนวิธีที่วิธียาจัดวางเลขโดดทั้งหมดมี $8 \times 6 \times 4 = 192$ วิธี

บทที่ 3

ความน่าจะเป็น

การศึกษาเรื่องความน่าจะเป็นมีความสำคัญ เนื่องจากความน่าจะเป็นจะช่วยให้นักเรียนรู้จักการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการคาดการณ์ ดังนั้นการศึกษาเรื่องนี้จะเป็นเครื่องมือที่จะช่วยให้นักเรียนนำความรู้ที่ได้ไปช่วยในการวางแผนและการตัดสินใจได้อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น โดยในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 บทที่ 3 ความน่าจะเป็น จะนำเสนอการทดลองสุ่มและเหตุการณ์ ความน่าจะเป็น และกฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น

ในบทเรียนนี้มุ่งให้นักเรียนบรรลุตัวชี้วัดตามสาระการเรียนรู้แกนกลาง บรรลุผลการเรียนรู้ตามสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม และบรรลุจุดมุ่งหมายดังต่อไปนี้



ตัวชี้วัด / ผลการเรียนรู้ / สาระการเรียนรู้แกนกลางและสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

ตัวชี้วัด หาความน่าจะเป็นและนำความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นไปใช้	สาระการเรียนรู้แกนกลาง - การทดลองสุ่มและเหตุการณ์ - ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์
ผลการเรียนรู้ หาความน่าจะเป็นและนำความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นไปใช้	สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม - การทดลองสุ่มและเหตุการณ์ - ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์



จุดมุ่งหมาย

- หาปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์
- ใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการแก้ปัญหา



ความรู้ก่อนหน้า

- เซต
- หลักการนับเบื้องต้น



ipst.me/8450

3.1 เนื้อหาสาระ

1. **การทดลองสุ่ม** คือ การทดลองซึ่งทราบว่าผลลัพธ์อาจจะเป็นอะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถบอกได้อย่างแน่นอนว่า ในแต่ละครั้งที่ทดลอง ผลที่เกิดขึ้นจะเป็นอะไรในบรรดาผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้เหล่านั้น
2. **บทนิยาม 1**
ปริภูมิตัวอย่าง คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม
ปริภูมิตัวอย่าง อาจเรียกว่า แซมเปิลสเปซ
3. **บทนิยาม 2**
เหตุการณ์ คือ สับเซตของปริภูมิตัวอย่าง
4. **บทนิยาม 3**
ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างซึ่งเป็นเซตจำกัด โดยที่สมาชิกทุกตัวของ S มีโอกาสเกิดขึ้นเท่ากัน และให้ E เป็นเหตุการณ์ที่สับเซตของ S
ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E เขียนแทนด้วย $P(E)$ นิยามโดย

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

เมื่อ $n(E)$ แทนจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ E

$n(S)$ แทนจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง S

ความน่าจะเป็น คือ จำนวนที่บอกให้ทราบว่าเหตุการณ์ที่สนใจมีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด

5. ในกรณีที่ปริภูมิตัวอย่างเป็นเซตจำกัด
 - $P(E)=0$ หมายความว่า เหตุการณ์ E ไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลยหรือเป็นไปได้ที่เหตุการณ์ E จะเกิดขึ้น
 - $P(E)=1$ หมายความว่า เหตุการณ์ E เกิดขึ้นอย่างแน่นอน
 - $P(E)=\frac{1}{2}$ หมายความว่า โอกาสที่เหตุการณ์ E จะเกิดหรือไม่เกิดมีเท่ากัน
 - $P(E_1)=\frac{1}{5}$ และ $P(E_2)=\frac{2}{5}$ หมายความว่า โอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์ E_2 เป็นสองเท่าของโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์ E_1

6. สมบัติพื้นฐานของความน่าจะเป็น

ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างซึ่งเป็นเซตจำกัด

- 1) สำหรับเหตุการณ์ E ใด ๆ จะได้ว่า $0 \leq P(E) \leq 1$
- 2) ความน่าจะเป็นของปริภูมิตัวอย่าง S เท่ากับ 1 นั่นคือ $P(S) = 1$
- 3) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เป็นเซตว่างเท่ากับ 0 นั่นคือ $P(\emptyset) = 0$

7. ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มหนึ่ง และ A, B เป็นเหตุการณ์ นั่นคือ

$$A \subset S \text{ และ } B \subset S$$

จะได้ $A \cup B$ เป็นเหตุการณ์ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกของเหตุการณ์ A หรือเหตุการณ์ B หรือทั้งสองเหตุการณ์ นั่นคือ $A \cup B = \{x | x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$

$A \cap B$ เป็นเหตุการณ์ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ทั้งในเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B นั่นคือ $A \cap B = \{x | x \in A \text{ และ } x \in B\}$

ถ้า $A \cap B = \emptyset$ แล้วจะเรียกเหตุการณ์ A และ B ว่า เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

และ A' เป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในปริภูมิตัวอย่าง S แต่ไม่อยู่ในเหตุการณ์ A นั่นคือ $A' = \{x | x \in S \text{ แต่ } x \notin A\}$

8. ทฤษฎีบท 1

ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง ซึ่งเป็นเซตจำกัด และ A, B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ จะได้ว่า

- 1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- 2) ถ้า $A \cap B = \emptyset$ แล้ว $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- 3) $P(A') = 1 - P(A)$
- 4) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

3.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน

การทดลองสุ่มและเหตุการณ์



กิจกรรม : โยนเหรียญ

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง การทดลองสุ่มและปริภูมิตัวอย่าง

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูจับคู่นักเรียนแบบละละความสามารถ และให้นักเรียนแต่ละคู่พิจารณาว่าเมื่อโยนเหรียญเที่ยงตรงหนึ่งเหรียญหนึ่งครั้ง

- นักเรียนทราบหรือไม่ว่าผลลัพธ์อาจจะเป็นไปได้จากการโยนเหรียญดังกล่าวเป็นอะไรได้บ้าง

แนวคำตอบ

ทราบว่าผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ คือ เหรียญขึ้นหัวหรือเหรียญขึ้นก้อยอย่างใดอย่างหนึ่ง

- นักเรียนสามารถบอกได้แน่นอนหรือไม่ว่าในแต่ละครั้งที่โยนเหรียญดังกล่าว เหรียญจะขึ้นหน้าใด

แนวคำตอบ

ไม่สามารถบอกได้ ทราบเพียงว่าเหรียญขึ้นหัวหรือเหรียญขึ้นก้อยอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

2. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบที่ได้ในข้อ 1
3. ครูให้ความรู้เพิ่มเติมกับนักเรียนว่าการโยนเหรียญดังกล่าวซึ่งนักเรียนทราบว่าในการโยนเหรียญหนึ่งครั้ง เหรียญจะขึ้นหัวหรือก้อยเท่านั้น แต่ไม่สามารถบอกได้ว่าในการโยนเหรียญหนึ่งครั้งเหรียญจะขึ้นหัวหรือก้อย เรียกว่า การทดลองสุ่ม และเซตของหน้าของเหรียญที่เกิดจากการโยนที่เป็นไปได้ทั้งหมด เรียกว่า ปริภูมิตัวอย่างหรือแซมเปิลสเปซ ซึ่งในที่นี้ คือ $\{H, T\}$ เมื่อ H แทนเหรียญขึ้นหัว และ T แทนเหรียญขึ้นก้อย

หมายเหตุ ครูอาจเปลี่ยนการโยนเหรียญเป็นการทดลองสุ่มอื่น เช่น การทอดลูกเต๋า ซึ่งปริภูมิตัวอย่างหรือแซมเปิลสเปซ คือ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- การสอนเรื่องการทดลองสุ่มในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 นี้ ไม่ได้เน้นให้นักเรียนจำแนกสถานการณ์ที่กำหนดให้ว่าเป็นการทดลองสุ่มหรือไม่ แต่ต้องการให้นักเรียนเข้าใจความหมายของการทดลองสุ่ม
- การนำเข้าสู่บทเรียนเรื่องปริภูมิตัวอย่าง ครูควรให้นักเรียนเขียนแจกผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม
- ตัวอย่างที่ 1 – 3 เป็นตัวอย่างของการเขียนแจกสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง ครูไม่ควรยกตัวอย่างที่ซับซ้อนที่นักเรียนไม่สามารถเขียนแจกสมาชิกในปริภูมิตัวอย่างได้
- การทดลองสุ่มอาจเขียนปริภูมิตัวอย่างได้มากกว่าหนึ่งแบบ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับผลลัพธ์ที่สนใจ เช่น การโยนเหรียญหนึ่งเหรียญสองครั้ง เมื่อผลลัพธ์ที่สนใจเป็นหน้าของเหรียญที่ขึ้น จะได้ปริภูมิตัวอย่าง คือ $\{(หัว, หัว), (หัว, ก้อย), (ก้อย, หัว), (ก้อย, ก้อย)\}$ แต่เมื่อผลลัพธ์ที่สนใจเป็นจำนวนครั้งที่เหรียญขึ้นหัว จะได้ปริภูมิตัวอย่าง คือ $\{0, 1, 2\}$
- การเขียนแผนภาพแสดงผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการโยนเหรียญ 1 เหรียญ และทอดลูกเต๋า 1 ลูก พร้อมกันหนึ่งครั้งในตัวอย่างที่ 6 นักเรียนอาจเริ่มจากการแสดงผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทอดลูกเต๋า 1 ลูกก่อน แล้วจึงแสดงผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการโยนเหรียญ 1 เหรียญ ดังนี้

แต้มบนหน้าลูกเต๋า	หน้าของเหรียญ	
1	H	1H
	T	1T
2	H	2H
	T	2T
3	H	3H
	T	3T
4	H	4H
	T	4T
5	H	5H
	T	5T
6	H	6H
	T	6T

ความน่าจะเป็น



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- การนำเข้าสู่บทเรียน ครูควรทบทวนความรู้เกี่ยวกับหลักการนับเบื้องต้น ซึ่งจะเป็นพื้นฐานเกี่ยวกับการหาจำนวนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่างและจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์
- การหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ อาจพิจารณาเพียงจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่างและจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ ซึ่งไม่จำเป็นต้องเขียนแจงสมาชิกทุกตัว โดยเฉพาะเมื่อปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์เป็นเซตที่มีจำนวนสมาชิกมาก ทั้งนี้ ในการนับจำนวนสมาชิกของเซตอาจใช้ความรู้เกี่ยวกับหลักการบวก หลักการคูณ การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่
- การหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ตามบทนิยาม 3 จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อ S เป็นเซตจำกัดและสมาชิกทุกตัวของ S มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน เช่น

ในถุงใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 10 ลูก สีขาว 5 ลูก เมื่อหยิบลูกบอลออกมา 1 ลูก จงหาปริภูมิตัวอย่างเมื่อสนใจสีของลูกบอลที่หยิบได้และหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่จะหยิบได้ลูกบอลสีแดง

ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

และ E แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดง

จะได้ $S = \{\text{สีแดง, สีขาว}\}$ และ $E = \{\text{สีแดง}\}$

ถ้าหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นี้โดยไม่พิจารณาเงื่อนไขของบทนิยาม 3 จะได้ $P(E) = \frac{1}{2}$ ซึ่งไม่ถูกต้อง เนื่องจากในถุงมีลูกบอลสีแดงมากกว่าลูกบอลสีขาว นั่นคือสมาชิกทุกตัวของ S มีโอกาสเกิดขึ้นได้ไม่เท่ากัน แต่ถ้าเขียน S และ E ใหม่เป็น $S = \{x \mid x \text{ เป็นลูกบอลในถุง}\}$ นั่นคือ $n(S) = 15$ และ $E = \{x \mid x \text{ เป็นลูกบอลสีแดงในถุง}\}$ นั่นคือ $n(E) = 10$ จะได้ว่าสมาชิกทุกตัวของ S มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่ากัน ซึ่งโดยบทนิยาม 3 จะได้ว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงเป็น $P(E) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

- เมื่อนักเรียนหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับไฟ ครูอาจแนะนำนักเรียนเกี่ยวกับสาร์ปไฟ เช่น การแบ่งตามสีของไฟ ซึ่งมี 2 สีคือ สีดำและสีแดง การแบ่งตามหน้าของไฟ ซึ่งมี 4 หน้าคือ ดอกจิก ข้าวหลามตัด โพแดง และโพดำ

- ตัวอย่างที่ 13 ข้อ 1) และ 2) เป็นการทดลองสุ่มที่แตกต่างกันแต่มีความน่าจะเป็นที่เท่ากัน ซึ่งเกิดขึ้นได้ เนื่องจากความน่าจะเป็นหาได้จากอัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่สนใจกับจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง เมื่อการทดลองสุ่มแตกต่างกันอาจส่งผลให้จำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่สนใจทั้ง 2 เหตุการณ์แตกต่างกัน และส่งผลให้จำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่างทั้ง 2 เหตุการณ์แตกต่างกันด้วย ซึ่งในข้อ 1) จะได้ว่าจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่างและจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ คือ 6 และ 1 ตามลำดับ จึงได้ความน่าจะเป็นที่หมายเลขบนสลากที่ด้วงหยิบได้ทั้งสองใบเป็นจำนวนคู่เมื่อหยิบสลาก 2 ใบ พร้อมกัน คือ $\frac{1}{6}$ และในข้อ 2) จะได้ว่าจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่างและจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ คือ 12 และ 2 ตามลำดับ จึงได้ความน่าจะเป็นที่หมายเลขบนสลากที่ด้วงหยิบได้ทั้งสองใบเป็นจำนวนคู่ เมื่อหยิบสลากที่ละใบโดยไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบสลากใบที่สอง คือ $\frac{2}{12}$ ซึ่งเท่ากับ $\frac{1}{6}$ เช่นกัน



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

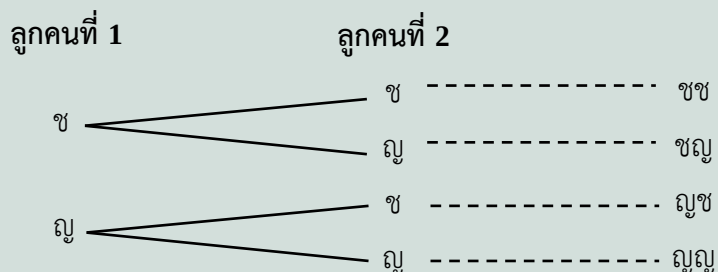
- การหาคำตอบของแบบฝึกหัด 3.2 ข้อ 6. 4) นั้น ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนเชื่อมโยงกับข้อ 6. 3) ดังนี้
จากข้อ 6. 3) จะได้ว่าเหรียญบาท 100 เหรียญ ที่มีหมายเลข 1, 2, 3, ..., 100 กำกับไว้ มี 20 เหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 5 ลงตัว
นั่นคือ มี 80 เหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 5 ไม่ลงตัว
ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้เหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 5 ไม่ลงตัว เท่ากับ $\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$
- การหาจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์และจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่างในแบบฝึกหัด 3.2 ข้อ 7 สามารถทำได้หลายแบบ เช่น การเขียนแผนภาพ การใช้ความรู้เกี่ยวกับหลักการนับเบื้องต้น ดังนี้

ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

ซ แทนลูกเป็นผู้ชาย

และ ญ แทนลูกเป็นผู้หญิง

สามารถเขียนแผนภาพแสดงผลลัพธ์ที่เป็นได้ทั้งหมด ดังนี้



จากแผนภาพ จะได้ $S = \{ซซ, ซญ, ญซ, ญญ\}$

ดังนั้น $n(S) = 4$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่สามีภรรยาคู่นี้มีลูกเป็นผู้ชายทั้งคู่หรือผู้หญิงทั้งคู่
เนื่องจาก $E_1 = \{\text{ชช, ญญ}\}$ นั่นคือ $n(E_1) = 2$

จะได้ $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่สามียกรยาคุณีจะมีลูกเป็นผู้ชายทั้งคู่หรือผู้หญิงทั้งคู่เท่ากับ $\frac{1}{2}$

- 2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่สามมีภรรยาคนนี้มีลูกเป็นผู้หญิงอย่างน้อยหนึ่งคน
เนื่องจาก $E_2 = \{\text{ชญ, ญช, ญญ}\}$ นั่นคือ $n(E_2) = 3$

จะได้ $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่สามิภรรยาคู่นี้จะมีลูกเป็นผู้หญิงอย่างน้อยหนึ่งคน เท่ากับ $\frac{3}{4}$

การใช้ความรู้เกี่ยวกับหลักการนับเบื้องต้น

ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = 2 \times 2 = 4$$

- 1) ให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่สามีภรรยาคนนี้มีลูกเป็นผู้ชายทั้งคู่หรือผู้หญิงทั้งคู่

กรณีที่ 1 สามีภรรยาคนนี้มีลูกเป็นผู้ชายทั้งคู่ มีได้ $1 \times 1 = 1$ วิธี

กรณีที่ 2 สามีภรรยาคนนี้มีลูกเป็นผู้หญิงทั้งคู่ มีได้ $1 \times 1 = 1$ วิธี

$$\text{ดังนั้น } n(E_1) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่สามีภรรยาคนนี้จะมียุทธเป็นผู้ชายทั้งคู่หรือผู้หญิงทั้งคู่ เท่ากับ $\frac{1}{2}$

- 2) ให้ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่สามีภรรยาคนนี้มีลูกเป็นหญิงอย่างน้อยหนึ่งคน

กรณีที่ 1 สามีภรรยาคนนี้มีลูกเป็นผู้หญิงหนึ่งคนและผู้ชายหนึ่งคน มีได้ 2 วิธี คือ
ชาย หรือ หญิง

กรณีที่ 2 สามีภรรยาคนนี้มีลูกเป็นผู้หญิงสองคน มีได้ 1 วิธี

$$\text{ดังนั้น } n(E_2) = 2 + 1 = 3$$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่สามีภรรยาคนนี้จะมียุทธอย่างน้อยหนึ่งคน เท่ากับ $\frac{3}{4}$

- การหาจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์และจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่างในแบบฝึกหัด 3.2 ข้อ 10 สามารถใช้การเขียนแผนภาพหรือใช้ความรู้เกี่ยวกับหลักการนับเบื้องต้นก็ได้ อย่างไรก็ตาม ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนใช้ความรู้เกี่ยวกับหลักการนับเบื้องต้น

กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์ต่างก็เป็นเซต โดยที่ปริภูมิตัวอย่างเป็นเอกภพสัมพัทธ์และเหตุการณ์เป็นสับเซตของปริภูมิตัวอย่าง ดังนั้นจึงสามารถใช้สมบัติของการดำเนินการของเซตช่วยในการหาความน่าจะเป็นได้
- กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็นจะช่วยให้การหาความน่าจะเป็นของบางเหตุการณ์ทำได้ง่ายและสะดวกขึ้น เช่น ในการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรงสามลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง ถ้าต้องการหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋ามากกว่า 3 นักเรียนอาจใช้การแจงกรณีเพื่อหาจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋ามากกว่าสาม แต่ถ้านักเรียนใช้กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็นจะทำได้ ดังนี้

ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้ จะได้ $n(S) = 6 \times 6 \times 6 = 6^3$

และ E แทนเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าคือ 3 ซึ่งมี 1 กรณี คือ แต้มบนหน้าลูกเต๋าทันทั้ง 3 ลูก เป็น 1

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าคือ 3 คือ $P(E) = \frac{1}{6^3}$

เนื่องจาก E' แทนเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋ามากกว่า 3

ดังนั้น $P(E') = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{6^3}$

- การหาคำตอบของแบบฝึกหัด 3.2 ข้อ 6. 4) นั้น ครูอาจให้นักเรียนใช้ทฤษฎีบท 1 ในการแก้ปัญหาโดยใช้ความรู้ว่า $P(A') = 1 - P(A)$ เมื่อ S เป็นปริภูมิตัวอย่างซึ่งเป็นเซตจำกัด และ A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ซึ่งทำได้ดังนี้

ให้ A แทนเหตุการณ์ที่จะได้เหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 5 ลงตัว
จะได้ A' แทนเหตุการณ์ที่จะได้เหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 5 ไม่ลงตัว

จาก $P(A') = 1 - P(A)$

จะได้ $P(A') = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้เหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 5 ไม่ลงตัว เท่ากับ $\frac{4}{5}$



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

การหาคำตอบของแบบฝึกหัดท้ายบทข้อ 38 และ 39 ในที่นี้ให้พิจารณาว่าหลอดไฟสีเดียวกัน ไม่แตกต่างกัน

3.3 แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน



กิจกรรม : Monty Hall Problem

Monty Hall Problem เป็นปัญหาคณิตศาสตร์ซึ่งมีที่มาจากเกมโชว์ทางโทรทัศน์ชื่อ Let's Make a Deal โดยออกอากาศในสหรัฐอเมริกาเมื่อ ค.ศ. 1984 – 1986 และ Monty Hall เป็นพิธีกรของรายการ กติกาของเกมโชว์นี้มีอยู่ว่า “มีประตูที่มีลักษณะเหมือนกันอยู่สามบานคือประตูหมายเลข 1, 2 และ 3 โดยด้านหลังประตูทั้งสามบานนี้จะมีประตูเพียงบานเดียวที่มีรถยนต์ซึ่งเป็นของรางวัลใหญ่อยู่ และอีกสองบานที่เหลือจะมีแพะอยู่ ผู้เข้าแข่งขันสามารถเลือกประตูบานใดก็ได้ 1 บาน เมื่อผู้เข้าแข่งขันเลือกประตูหมายเลขใดหมายเลขหนึ่งแล้วพิธีกรจะเลือกเปิดประตูที่มีแพะ 1 บาน จากประตูสองบานที่ผู้เข้าแข่งขันไม่ได้เลือก ดังนั้น ตอนนี้จะมีประตูที่ยังปิดอยู่สองบาน ประตูบานหนึ่งคือประตูที่ผู้เข้าแข่งขันเลือกและประตูอีกบานหนึ่งคือประตูที่ผู้เข้าแข่งขันไม่ได้เลือก จากนั้นพิธีกรบอกผู้เข้าแข่งขันว่า ให้โอกาสผู้เข้าแข่งขันสามารถเปลี่ยนใจมาเลือกประตูอีกบานหนึ่งได้”

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. จากสถานการณ์ที่กำหนดให้ ถ้านักเรียนเป็นผู้เข้าแข่งขัน ควรจะเลือกเปลี่ยนประตูหรือไม่ เพราะเหตุใด
2. เปิดเว็บไซต์ ipst.me/7402
3. ทดลองเล่นเกม โดยคลิกเลือกประตูหมายเลข 1, 2 หรือ 3 จากนั้นโปรแกรมจะเปิดประตูบานที่เหลือที่มีแพะอยู่ 1 บาน คลิกเลือกว่าจะเปลี่ยนหรือไม่เปลี่ยนประตูตามที่ตัดสินใจในข้อ 1





4. ทดลองเล่นเกมอย่างน้อย 30 ครั้ง โดยเลือกไม่เปลี่ยนประตู
ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในตารางตามผลลัพธ์ที่ได้จากการเปิดประตูที่นักเรียนเลือก
กรณีไม่เปลี่ยนประตู

ครั้งที่	รถ	แพะ
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

ครั้งที่	รถ	แพะ
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

ครั้งที่	รถ	แพะ
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		
29		
30		

5. จากการทดลองในข้อ 4 จงหาว่าอัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่เปิดประตูแล้วมีรถยนต์กับจำนวนการทดลองเล่นเกม 30 ครั้ง คิดเป็นเท่าใด
6. ทดลองเล่นเกมอย่างน้อย 30 ครั้ง โดยเลือกเปลี่ยนประตู
ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในตารางตามผลลัพธ์ที่ได้จากการเปิดประตูที่นักเรียนเลือก
กรณีเปลี่ยนประตู

ครั้งที่	รถ	แพะ
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

ครั้งที่	รถ	แพะ
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

ครั้งที่	รถ	แพะ
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		
29		
30		

7. จากการทดลองในข้อ 6 จงหาว่าอัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่เปิดประตูแล้วมีรถยนต์กับจำนวนการทดลองเล่นเกม 30 ครั้ง คิดเป็นเท่าใด
8. จากผลการทดลองข้างต้น นักเรียนคิดว่าการเลือกเปลี่ยนหรือไม่เปลี่ยนประตู มีผลต่อการได้รางวัลหรือไม่ เพราะเหตุใด
9. จากสถานการณ์เกมโชว์ Let's Make a Deal
- 9.1 การเลือกประตูในครั้งแรกจากประตูทั้งสามบาน
- 9.1.1 จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ด้านหลังประตูที่ผู้เข้าแข่งขันเลือกมียอดยนต์
- 9.1.2 จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ด้านหลังประตูที่ผู้เข้าแข่งขันเลือกมีแพะ

9.2 กรณีไม่เปลี่ยนประตู หลังจากพิธีกรเลือกเปิดประตูที่มีแพะ 1 บาน ถ้าผู้เข้าแข่งขันไม่เปลี่ยนใจในการเลือกประตู จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ผู้เข้าแข่งขันได้รางวัลเป็นรถยนต์

9.3 กรณีเปลี่ยนประตู หลังจากพิธีกรเลือกเปิดประตูที่มีแพะ 1 บาน ถ้าผู้เข้าแข่งขันเลือกเปลี่ยนประตู

9.3.1 กรณีที่ 1 ด้านหลังประตูที่ผู้เข้าแข่งขันเลือกในครั้งแรกมีรถยนต์

จงหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ในกรณีนี้ และเมื่อผู้เข้าแข่งขันเลือกเปลี่ยนประตู แสดงว่าเขาจะได้รางวัลเป็นอะไร

9.3.2 กรณีที่ 2 ด้านหลังประตูที่ผู้เข้าแข่งขันเลือกในครั้งแรกมีแพะ

จงหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ในกรณีนี้ และเมื่อผู้เข้าแข่งขันเลือกเปลี่ยนประตู แสดงว่าเขาจะได้รางวัลเป็นอะไร

9.3.3 จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ผู้เข้าแข่งขันได้รางวัลเป็นรถยนต์

10. จากความน่าจะเป็นที่ได้ในข้อ 9.2 และ 9.3 นักเรียนคิดว่าการเลือกเปลี่ยนหรือไม่เปลี่ยนประตู มีผลต่อการได้รางวัลหรือไม่ เพราะเหตุใด

11. คำตอบที่ได้ในข้อ 8 และ 10 สอดคล้องกันหรือไม่ นักเรียนคิดว่าคำตอบในข้อใดน่าเชื่อถือกว่า



เฉลยกิจกรรม : Monty Hall Problem

- คำตอบของนักเรียนในข้อนี้อาจเป็นเพียงการคาดเดาก็ได้ ขึ้นกับเหตุผลประกอบคำตอบของนักเรียน
-
-
- กรณีไม่เปลี่ยนประตู

ครั้งที่	รถ	แพะ
1		X
2	X	
3		X
4		X
5		X
6		X
7		X
8		X
9	X	
10	X	

ครั้งที่	รถ	แพะ
11		X
12		X
13		X
14		X
15		X
16	X	
17		X
18		X
19		X
20	X	

ครั้งที่	รถ	แพะ
21		X
22		X
23		X
24		X
25		X
26	X	
27		X
28	X	
29		X
30		X

หมายเหตุ คำตอบขึ้นอยู่กับ การทดลองของนักเรียน

- จากการทดลองในข้อ 4 จะได้ว่า อัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่เปิดประตูแล้วมีรถยนต์กับจำนวนการทดลองเล่นเกม 30 ครั้ง คิดเป็น $\frac{7}{30} \approx 0.23$

6. กรณีเปลี่ยนประตู

ครั้งที่	รถ	แพะ
1	X	
2	X	
3		X
4		X
5	X	
6		X
7	X	
8	X	
9	X	
10	X	

ครั้งที่	รถ	แพะ
11	X	
12	X	
13	X	
14		X
15		X
16	X	
17	X	
18		X
19		X
20	X	

ครั้งที่	รถ	แพะ
21		X
22		X
23		X
24	X	
25	X	
26	X	
27	X	
28	X	
29	X	
30	X	

หมายเหตุ คำตอบขึ้นอยู่กับผลการทดลองของผู้เรียน

- จากการทดลองในข้อ 6 จะได้ว่า อัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่เปิดประตูแล้วมีรถยนต์กับจำนวนการทดลองเล่นเกม 30 ครั้ง คิดเป็น $\frac{20}{30} \approx 0.67$
- การเลือกเปลี่ยนหรือไม่เปลี่ยนประตูมีผลต่อการได้รางวัล โดยจะมีโอกาสได้รางวัลมากกว่าถ้าเลือกเปลี่ยนประตู ซึ่งอาจพิจารณาจากอัตราส่วนในข้อ 5 และ 7

หมายเหตุ

- คำตอบขึ้นอยู่กับผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองของนักเรียนในข้อ 5 และ 7 โดยครูควรให้นักเรียนเปรียบเทียบคำตอบกับเพื่อน และควรส่งเสริมให้นักเรียนอภิปรายร่วมกัน เพื่อให้ได้ข้อสรุปว่า จากผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองของนักเรียนส่วนใหญ่ จะเห็นว่าการเลือกเปลี่ยนประตูทำให้มีโอกาสได้รางวัลมากกว่าการไม่เปลี่ยนประตู
- การทดลองข้างต้นเป็นตัวอย่างหนึ่งในการหาความน่าจะเป็นเชิงการทดลอง (experimental probability)

9. 9.1 9.1.1 เนื่องจากผลลัพธ์ของการเปิดประตูจากการเลือกประตูในครั้งแรกอาจเป็นแพะตัวที่หนึ่ง แพะตัวที่สอง หรือรถยนต์ ด้วยโอกาสที่เท่า ๆ กัน ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ด้านหลังประตูที่ผู้เข้าแข่งขันเลือกในครั้งแรกมีรถยนต์จึงเป็น $\frac{1}{3}$
- 9.1.2 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ด้านหลังประตูที่ผู้เข้าแข่งขันเลือกในครั้งแรกมีแพะเป็น $\frac{2}{3}$
- 9.2 สำหรับกรณีที่ผู้เข้าแข่งขันไม่เปลี่ยนใจในการเลือกประตู โอกาสที่จะได้รางวัลขึ้นอยู่กับ การเลือกประตูในครั้งแรกเท่านั้น ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ผู้เข้าแข่งขันได้รางวัลเป็นรถยนต์จึงเป็น $\frac{1}{3}$
- 9.3 9.3.1 ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ในกรณีนี้ คือความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ด้านหลังประตูที่ผู้เข้าแข่งขันเลือกในครั้งแรกมีรถยนต์ ซึ่งเป็น $\frac{1}{3}$ (จากคำตอบข้อ 9.1.1) ในกรณีนี้ เนื่องจากด้านหลังประตูที่ผู้เข้าแข่งขันเลือกในครั้งแรกมีรถยนต์ และเมื่อผู้เข้าแข่งขันเลือกเปลี่ยนประตู แสดงว่าประตูที่เหลือหลังจากที่พิธีกรเลือกเปิดประตูที่มีแพะ 1 บาน จะมีแพะ ดังนั้น ผู้เข้าแข่งขันจะได้รางวัลเป็นแพะ
- 9.3.2 ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ในกรณีนี้ คือ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ด้านหลังประตูที่ผู้เข้าแข่งขันเลือกในครั้งแรกมีแพะ ซึ่งเป็น $\frac{2}{3}$ (จากคำตอบข้อ 9.1.2) ในกรณีนี้ เนื่องจากด้านหลังประตูที่ผู้เข้าแข่งขันเลือกในครั้งแรกมีแพะ และเมื่อผู้เข้าแข่งขันเลือกเปลี่ยนประตู แสดงว่าประตูที่เหลือหลังจากที่พิธีกรเลือกเปิดประตูที่มีแพะ 1 บาน จะมีรถยนต์ ดังนั้น ผู้เข้าแข่งขันจะได้รางวัลเป็นรถยนต์
- 9.3.3 เนื่องจากผู้เข้าแข่งขันเลือกเปลี่ยนประตู แสดงว่าผู้เข้าแข่งขันจะได้รางวัลเป็นรถยนต์ ถ้าประตูที่เลือกในครั้งแรกมีแพะ ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผู้เข้าแข่งขันจะได้รางวัลเป็นรถยนต์จะเท่ากับความน่าจะเป็นที่ทำได้ในข้อ 9.3.2 ซึ่งเท่ากับ $\frac{2}{3}$

10. จากข้อ 9.2 และ 9.3 จะได้ว่า ความน่าจะเป็นที่ผู้เข้าแข่งขันจะได้รางวัลเป็นรถยนต์มีค่าประมาณ 0.33 และ 0.67 ตามลำดับ นั่นคือ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ผู้เข้าแข่งขันจะได้รางวัลเป็นรถยนต์ในกรณีที่เลือกเปลี่ยนประตูมากกว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ผู้เข้าแข่งขันจะได้รางวัลเป็นรถยนต์กรณีที่เลือกไม่เปลี่ยนประตู ดังนั้นนักเรียนจึงควรเลือกเปลี่ยนประตู เพื่อเพิ่มโอกาสที่จะได้รางวัลเป็นรถยนต์
11. คำตอบในข้อ 8 และ 10 สอดคล้องกัน โดยคำตอบในข้อ 10 น่าเชื่อถือกว่า เพราะพิจารณาจากความน่าจะเป็นเชิงทฤษฎี

หมายเหตุ

ในกรณีที่นักเรียนได้คำตอบในข้อ 8 ไม่สอดคล้องกับคำตอบในข้อ 10 ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนอภิปรายร่วมกันเพื่อให้ได้ข้อสรุปว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองอาจช่วยในการตัดสินใจว่าจะเลือกเปลี่ยนหรือไม่เปลี่ยนประตูได้ แต่ถ้าจำนวนครั้งของการทดลองน้อย อาจให้ผลลัพธ์ที่ไม่น่าเชื่อถือ



แนวทางการจัดกิจกรรม : Monty Hall Problem

เวลาในการจัดกิจกรรม 50 นาที

กิจกรรมนี้เสนอไว้ให้นักเรียนใช้ความรู้ เรื่อง ความน่าจะเป็น เพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนด ในการทำกิจกรรมนี้นักเรียนแต่ละคู่ควรมีเครื่องคอมพิวเตอร์อย่างน้อย 1 เครื่อง โดยครูอาจเลือกจัดกิจกรรมนี้ในห้องคอมพิวเตอร์ก็ได้ กิจกรรมนี้มีสื่อ/แหล่งการเรียนรู้ และ ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรม “Monty Hall Problem”
2. ไฟล์กิจกรรม “Monty Hall Problem” จากเว็บไซต์ ipst.me/7402

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูนำเข้าสู่กิจกรรมโดยเปิดสื่อวีดิทัศน์หรือเล่าเรื่องราวสั้น ๆ เกี่ยวกับ Monty Hall Problem
2. ครูแจกใบกิจกรรม “Monty Hall Problem” ให้กับนักเรียนทุกคนและให้นักเรียนทำกิจกรรมนี้เป็นคู่ โดยครูจับคู่นักเรียนแบบละความสามารถ
3. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้
4. ครูให้นักเรียนตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 1 ในใบกิจกรรม พร้อมให้เหตุผลประกอบ โดยไม่ต้องคำนึงถึงความถูกต้องของคำตอบ
5. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่เปิดไฟล์กิจกรรม “Monty Hall Problem” จากเว็บไซต์ ipst.me/7402 จากนั้นครูชี้แจงวิธีใช้ไฟล์กิจกรรมให้นักเรียนเข้าใจก่อนเริ่มทำกิจกรรมในไฟล์กิจกรรม
6. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมและตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 3 – 7 ในใบกิจกรรม ซึ่งในระหว่างที่นักเรียนทำกิจกรรมครูควรเดินดูนักเรียนให้ทั่วถึงทุกกลุ่ม และคอยชี้แนะเมื่อนักเรียนพบปัญหา
7. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบที่ได้ของคำถามในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 4 – 7 ในใบกิจกรรม จากนั้น ครูหาค่าเฉลี่ยของคำตอบในข้อ 5 และ 7 โดยใช้ข้อมูลจากนักเรียนทุกคนในชั้นเรียน แล้วให้นักเรียนแต่ละคนเปรียบเทียบผลการทดลองของตนเองกับค่าเฉลี่ยที่ได้
8. ครูให้นักเรียนตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 8 – 11 ในใบกิจกรรม โดยให้นักเรียนพิจารณาจากผลการทดลองที่ได้ โดยให้นักเรียนเปรียบเทียบผลการทดลองกับนักเรียนคู่อื่น ๆ

9. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายและสรุปคำตอบของคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติ
ข้อ 8 – 11 ในใบกิจกรรม ครูอาจเพิ่มเติมว่าการทดลองดังกล่าว เป็นตัวอย่างหนึ่งในการ
หาความน่าจะเป็นที่เรียกว่าความน่าจะเป็นเชิงการทดลอง (experimental probability)



กิจกรรม : เพื่อนร่วมชะตา

ในที่นี้ เพื่อนร่วมชะตา หมายถึง ผู้ที่เกิดวันที่และเดือนเดียวกัน แต่ไม่จำเป็นต้องเป็นปีเดียวกัน โดยจะกำหนดให้ 1 ปี มี 365 วัน นั่นคือ ไม่พิจารณาผู้ที่เกิดวันที่ 29 กุมภาพันธ์

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ถ้าต้องการให้มีคนอย่างน้อย 2 คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน นักเรียนคิดว่าจะต้องมีคนอย่างน้อยกี่คน
2. ถ้าสุ่มคนมา 2 คน ความน่าจะเป็นที่ 2 คนนี้ เป็นเพื่อนร่วมชะตากันเป็นเท่าใด
3. ถ้าสุ่มคนมา 3 คน ความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน จาก 3 คนนี้ เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน เป็นเท่าใด
4. นักเรียนคิดว่าความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน จาก 23 คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน จะมากกว่า 0.5 หรือไม่ (โดยยังไม่ต้องคำนวณ)
5. ให้นักเรียนเขียนสูตรการหาความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน จาก n คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน เมื่อ $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$
6. เปิดเว็บไซต์ ipst.me/8465
 - 6.1 เลื่อนสไลเดอร์เพื่อปรับค่า n สังเกตว่าหน้าจอจะปรากฏความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน จาก n คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน
 - 6.2 ตรวจสอบคำตอบในข้อ 4 โดยเลื่อนสไลเดอร์เพื่อหาว่า เมื่อ n มีค่าตั้งแต่เท่าใดขึ้นไป จึงจะได้ความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน จาก n คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน มากกว่า 0.5 คำตอบที่ได้ตรงกับที่นักเรียนตอบในข้อ 4 หรือไม่
 - 6.3 อธิบายกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง n และความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน จาก n คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน
 - 6.4 จะต้องสุ่มคนอย่างน้อยกี่คน ถ้าต้องการให้ได้ความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน มากกว่า 0.99



เฉลยกิจกรรม : เพื่อนร่วมชะตา

- เนื่องจาก ในกิจกรรมนี้กำหนดให้ 1 ปี มี 365 วัน
ดังนั้น ถ้าต้องการมั่นใจว่ามีความน้อย 2 คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน จะต้องมีความน้อยอย่างน้อย 366 คน
- เมื่อกล่าวถึง “วันเกิด” ในกิจกรรมนี้ จะหมายถึง วันและเดือนเกิดเท่านั้น
จากโจทย์ ปริภูมิตัวอย่าง (S) คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นคู่อันดับของวันเกิดที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ 2 คน
จะได้ $n(S) = 365^2$
ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ 2 คน มีวันเกิดตรงกัน
จะได้ $n(E) = 365$
ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ 2 คน ที่สุ่มมาจะเป็นเพื่อนร่วมชะตากัน คือ
$$P(E) = \frac{365}{365^2} = \frac{1}{365}$$
 ซึ่งมีค่าประมาณ 0.0027
- จากโจทย์ ปริภูมิตัวอย่าง (S) คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นสามสิ่งอันดับของวันเกิดที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ 3 คน
จะได้ $n(S) = 365^3$
วิธีที่ 1 ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่ทั้งสามคนมีวันเกิดตรงกัน
จะได้ $n(E_1) = 365$ และ $P(E_1) = \frac{365}{365^3}$
ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่มี 2 คน มีวันเกิดตรงกัน ส่วนอีกคนมีวันเกิดที่ต่างออกไป
จะได้ $n(E_2) = C_{3,2} \times 365 \times 1 \times 364 = 3 \times 365 \times 364$
และ $P(E_2) = \frac{3 \times 365 \times 364}{365^3}$
เนื่องจาก $E_1 \cap E_2 = \emptyset$
ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะมีอย่างน้อย 2 คน จาก 3 คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน
คือ $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{365}{365^3} + \frac{3 \times 365 \times 364}{365^3}$
ซึ่งมีค่าประมาณ 0.0082

วิธีที่ 2 ให้ E แทนเหตุการณ์ที่คน 3 คน ไม่มีวันเกิดซ้ำกันเลย

นั่นคือ เหตุการณ์ที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน จาก 3 คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากรรม คือ E'

เนื่องจาก $n(E) = 365 \times 364 \times 363$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{365 \times 364 \times 363}{365^3} \approx 0.9918$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน จาก 3 คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากรรม คือ $P(E') = 1 - P(E) \approx 0.0082$

หมายเหตุ

สามสิ่งอันดับ เขียนได้ในรูป (x_1, x_2, x_3)

4. จากข้อ 1 ความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากรรม จะเป็น 1 เมื่อมีคนตั้งแต่ 366 คน ขึ้นไป ดังนั้น อาจทำให้นักเรียนหลายคนคิดว่าความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน จาก 23 คน (ซึ่งน้อยกว่า 366 มาก) เป็นเพื่อนร่วมชะตากรรมจึงไม่น่าจะมากกว่า 0.5

5. ให้ $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$

จากโจทย์ ปริภูมิตัวอย่าง (S) คือ เซตที่มีสมาชิกเป็น n สิ่งอันดับของวันเกิดที่เป็นไปได้ทั้งหมดของคน n คน

$$\text{จะได้ } n(S) = 365^n$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่คน n คน ไม่มีวันเกิดซ้ำกันเลย

นั่นคือ เหตุการณ์ที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากรรม คือ E'

$$\text{เนื่องจาก } n(E) = P_{365, n} \text{ จะได้ } P(E) = \frac{P_{365, n}}{365^n} \text{ หรือ } \frac{365 \times 364 \times 363 \times \dots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากรรม คือ

$$P(E') = 1 - P(E) = 1 - \frac{P_{365, n}}{365^n} \text{ หรือ } 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times \dots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

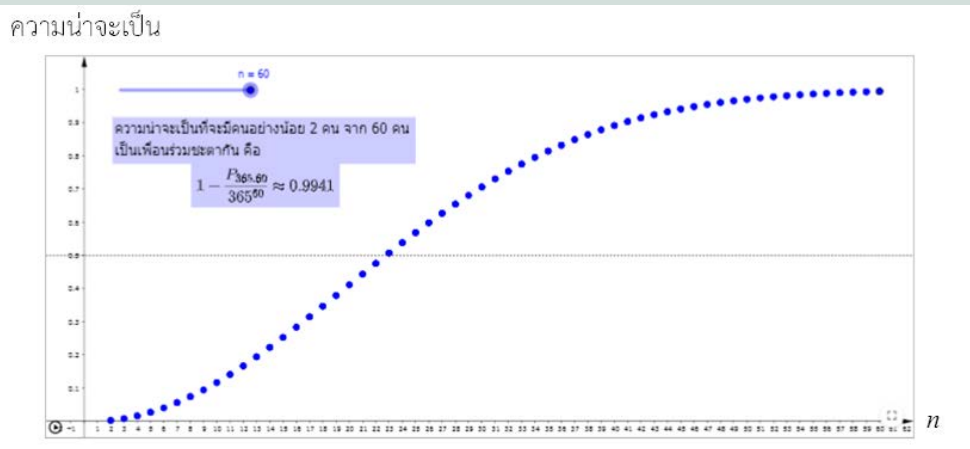
หมายเหตุ

n สิ่งอันดับ เขียนได้ในรูป $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

6. 6.1 –

6.2 เมื่อ $n \geq 23$ จะได้ความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน จาก n คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน มากกว่า 0.5

6.3 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง n และความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน เป็นดังนี้



จากกราฟ สังเกตได้ว่า ในช่วงแรก เมื่อ n เพิ่มขึ้น จะทำให้ความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว โดยจะเห็นว่าเมื่อ $n = 41$ จะได้ความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน มากกว่า 0.9 จากนั้นเมื่อ n เพิ่มขึ้น ความน่าจะเป็นจะค่อย ๆ เพิ่มขึ้นที่ละน้อยจนเข้าใกล้ 1

6.4 เมื่อ $n \geq 57$ จะได้ความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน มากกว่าหรือเท่ากับ 0.99

ดังนั้น จะต้องสุ่มคนจำนวนอย่างน้อย 57 คน ถ้าต้องการให้ความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน มากกว่า 0.99



แนวทางการจัดกิจกรรม : เพื่อนร่วมชะตา

เวลาในการจัดกิจกรรม 30 นาที

กิจกรรมนี้เสนอไว้ให้นักเรียนเชื่อมโยงและใช้ความรู้ เรื่อง ความน่าจะเป็น เพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนด โดยกิจกรรมนี้มีสื่อ/แหล่งการเรียนรู้ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรม “เพื่อนร่วมชะตา”
2. ไฟล์กิจกรรม “เพื่อนร่วมชะตา” จากเว็บไซต์ ipst.me/8465
3. เครื่องคำนวณ

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูนำเข้าสู่กิจกรรมโดยสุ่มเลือกนักเรียนประมาณ 10 คน พร้อมทั้งถามวันเดือนปีเกิดของแต่ละคน แล้วให้นักเรียนทั้งชั้นเรียนสังเกตว่ามีนักเรียนคนใดที่เกิดวันที่และเดือนเดียวกันหรือไม่
2. ครูจับคู่นักเรียนแบบคละความสามารถ จากนั้นแจกใบกิจกรรม “เพื่อนร่วมชะตา” ให้กับนักเรียนทุกคนแล้วให้นักเรียนศึกษาเกี่ยวกับเพื่อนร่วมชะตาตามที่กำหนดในใบกิจกรรม จากนั้นครูนำอภิปรายเกี่ยวกับเพื่อนร่วมชะตาตามที่กำหนดในใบกิจกรรมเพื่อให้นักเรียนทุกคนเข้าใจตรงกัน โดยเน้นย้ำว่ากิจกรรมนี้
 - กำหนดให้ 1 ปี มี 365 วัน
 - เมื่อกล่าวถึง “วันเกิด” จะหมายถึงวันที่และเดือนเกิดเท่านั้น
 - ไม่พิจารณาคนที่เกิดวันที่ 29 กุมภาพันธ์
 - ไม่พิจารณากรณีที่มีฝาแฝด
3. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันตอบคำถามข้อ 1 – 5 ในใบกิจกรรม โดยให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณตามความเหมาะสม ในระหว่างที่นักเรียนทำกิจกรรมครูควรเดินดูนักเรียนให้ทั่วถึงทุกกลุ่มและคอยชี้แนะ
4. ครูสุ่มเลือกกลุ่มนักเรียนเพื่อตอบคำถาม และให้นักเรียนกลุ่มอื่น ๆ ร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบ รวมทั้งกระตุ้นให้นักเรียนให้เหตุผลประกอบคำตอบ

5. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่เปิดไฟล์กิจกรรม “เพื่อนร่วมชะตา” จากเว็บไซต์ ipst.me/8465 จากนั้นครูชี้แจงวิธีใช้ไฟล์กิจกรรมให้นักเรียนเข้าใจก่อนเริ่มทำกิจกรรมในไฟล์กิจกรรมและตอบคำถามข้อ 6.2 – 6.4
6. ครูสุ่มเลือกกลุ่มนักเรียนเพื่อตอบคำถาม และให้นักเรียนกลุ่มอื่น ๆ ร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบ จากนั้นครูนำนักเรียนอภิปรายเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปของกิจกรรม ซึ่งนักเรียนจะเห็นว่า การคำนวณทางคณิตศาสตร์จะช่วยให้การคาดการณ์ได้ดีกว่าการใช้ความรู้สึก

3.4 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน

การวัดผลระหว่างเรียนมีเป้าหมายเพื่อปรับปรุงการเรียนรู้และพัฒนาการเรียนการสอน และตรวจสอบนักเรียนแต่ละคนว่ามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่ครูสอนมากน้อยเพียงใด การให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเป็นแนวทางหนึ่งที่ครูอาจใช้เพื่อประเมินผลด้านความรู้ระหว่างเรียนของนักเรียน ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดที่ครอบคลุมเนื้อหาที่สำคัญของแต่ละบทไว้ สำหรับในบทที่ 3 ความน่าจะเป็น ครูอาจใช้แบบฝึกหัดเพื่อวัดผลประเมินผลความรู้ในแต่ละเนื้อหาได้ดังนี้

เนื้อหา	แบบฝึกหัด	
การทดลองสุ่ม ปฏิบัติตัวอย่าง และเหตุการณ์	3.1	ข้อ 1 – 4
	3.3	ข้อ 1
ความน่าจะเป็น	3.2	ข้อ 1 – 25
กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น	3.3	ข้อ 2 – 10

3.5 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 มีจุดมุ่งหมายว่า เมื่อนักเรียนได้เรียนจบบทที่ 3 ความน่าจะเป็น แล้วนักเรียนสามารถ

1. หาปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์
2. ใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการแก้ปัญหา

ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดท้ายบทที่ประกอบด้วยโจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียน ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมาย นอกจากนี้มีโจทย์ฝึกทักษะที่น่าสนใจและโจทย์ท้าทาย ครูอาจเลือกใช้แบบฝึกหัดท้ายบทวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบทเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนมีความสามารถตามจุดมุ่งหมายเมื่อเรียนจบบทเรียนหรือไม่

ทั้งนี้แบบฝึกหัดท้ายบทแต่ละข้อในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 บทที่ 3 ความน่าจะเป็น สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียน ดังนี้

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
1. หาปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์	1	2)
	2	1) – 5)
	3	1) – 2)
2. ใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการแก้ปัญหา	4	1) – 5)
	5	1) – 5)
	6	1) – 3)
	7	1) – 6)
	8	
	9	1) – 3)
	10	1) – 2)
	11	
	12	

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
2. ใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการแก้ปัญหา (ต่อ)	13	
	14	
	15	1) – 2)
	16	
	17	
	18	
	19	1) – 3)
	20	
	21	1) – 3)
	22	
	23	
	24	
	25	
	26	1) – 4)
	27	
	28	1) – 3)
	29	
	30	
	31	1) – 5)
	32	
	33	
	34	
	35	1) – 4)

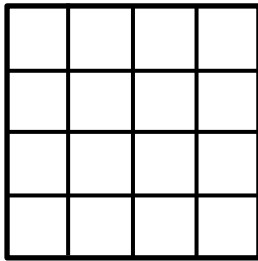
จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
2. ใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการแก้ปัญหา (ต่อ)	36	
	37	1) – 2)
	38	
	39	1) – 2)
	40	1) – 2)
	41	
	42	1) – 4)
	43	
	44	
โจทย์ฝึกทักษะ	1	1)
โจทย์ท้าทาย	45	
	46	
	47	

3.6 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

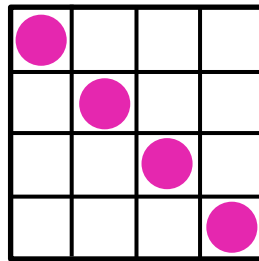
ในส่วนนี้จะนำเสนอตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทที่ 3 ความน่าจะเป็น สำหรับรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ซึ่งครูสามารถเลือกนำไปใช้ได้ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดผลประเมินผล

ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

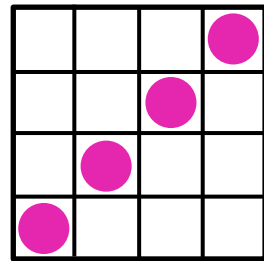
1. ต้องการจัดชาย 3 คน และหญิง 4 คน ยืนเรียงแถวหน้ากระดานเพื่อถ่ายรูป ถ้านายภาคินอยู่ในกลุ่มนี้ด้วย จงหาความน่าจะเป็นที่ทุกคนยืนเรียงแถวสลับชายหญิงและนายภาคินยืนตรงกลาง
2. ร้านค้าแห่งหนึ่งมีเครื่องดื่ม 4 ชนิด ได้แก่ น้ำอัดลม น้ำผลไม้ น้ำสมุนไพร และน้ำเปล่า จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนสองคนเลือกเครื่องดื่มคนละ 1 ชนิด แล้วได้เป็นเครื่องดื่มชนิดเดียวกัน
3. มีบัตร 4 ใบ แต่ละใบมีตัวอักษร R, O, C และ K เขียนกำกับไว้บัตรละ 1 ตัวอักษร สุ่มหยิบบัตร 4 ใบ โดยหยิบทีละใบแล้วใส่คืนก่อนหยิบบัตรใบถัดไป จงหาความน่าจะเป็นที่บัตรที่ได้เรียงตามลำดับเป็นคำว่า COOK
4. ตู้ของเล่นหยอดเหรียญตู้หนึ่ง บรรจุรถของเล่นไว้ 50 คัน ที่แตกต่างกันทั้งหมด แบ่งเป็นสีส้มแดง เขียว น้ำเงิน และเหลือง จำนวนสีละเท่า ๆ กัน ในการเล่นแต่ละครั้งผู้เล่นจะหยอดเหรียญสิบบาท 1 เหรียญ และจะได้รางวัลเป็นรถของเล่น 1 คันเสมอ ถ้ารวีเป็นผู้เล่นคนแรกของตู้ของเล่นหยอดเหรียญตู้นี้ จงหาความน่าจะเป็นที่รวีหยอดเหรียญสิบบาท จำนวน 5 เหรียญ เพื่อเล่นตู้ของเล่นตู้นี้ 5 ครั้ง แล้วได้รถสีแดง 2 คัน รถสีเหลือง 2 คัน และรถสีน้ำเงิน 1 คัน ตามลำดับ
5. ในทางคณิตศาสตร์ พาลินโดรมเป็นจำนวนนับที่เมื่อเขียนเลขโดดเรียงย้อนกลับจากหลังไปหน้าหรือจากขวาไปซ้าย แล้วได้จำนวนเดิม เช่น 8, 22, 101 จงหาความน่าจะเป็นที่สร้างจำนวนนับที่มีสามหลักจากเลขโดด 7 ตัว คือ 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 แล้วจำนวนที่ได้เป็นพาลินโดรม
6. เกมโยนลูกบอลลงกล่องมีกล่องซึ่งแบ่งเป็นช่อง 16 ช่องที่มีขนาดเท่ากัน แต่ละช่องบรรจุลูกบอลได้ 1 ลูก ผู้เล่นจะได้โยนลูกบอล 4 ครั้ง ครั้งละ 1 ลูก และจะได้รางวัลเมื่อลูกบอลทั้งสี่ลูกอยู่ในกล่องตามช่องในแนวเส้นทแยงมุมช่องละ 1 ลูก ดังรูป จงหาความน่าจะเป็นที่รติเล่นเกมนี้แล้วจะได้รับรางวัล



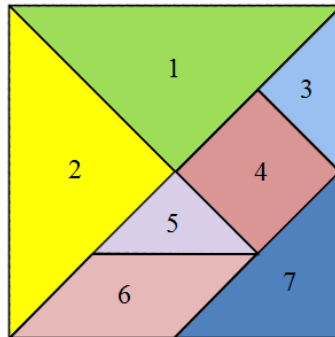
รูปที่ 1 กอล่อง



รูปที่ 2 ตำแหน่งของลูกบอลในกอล่องตามช่องที่จะได้รางวัล



7. มีสลาก 6 ใบ ซึ่งมีหมายเลข $-2, -1, 0, 2, 3$ และ 5 หมายเลขละ 1 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่เมื่อสุ่มหยิบสลากขึ้นมาพร้อมกัน 2 ใบ ได้เป็นสลากที่มีผลรวมของจำนวนที่เป็นหมายเลขของสลากมากกว่า 2
8. มีเสื้อ 10 สี สีละ 5 ตัว โดยแต่ละสีมีขนาด XS, S, M, L และ XL สุ่มหยิบเสื้อ 2 ตัว พร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ได้เสื้อขนาดเดียวกันแต่สีต่างกัน
9. ในการคัดเลือกนักกีฬาว่ายน้ำของโรงเรียนแห่งหนึ่ง จำนวน 4 คน มีผู้สมัคร 10 คน จงหาความน่าจะเป็นที่กวินซึ่งเป็นหนึ่งในผู้สมัครจะได้รับคัดเลือก
10. แทนแตรประกอบด้วยรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 1 รูป รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน 1 รูป และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก 5 รูป โดยกำหนดหมายเลขให้แต่ละรูปเหล่านี้ดังรูป



- รูปที่มีพื้นที่น้อยที่สุด มี 2 รูป คือ รูปหมายเลข 3 และ 5
- รูปที่มีพื้นที่เป็นสองเท่าของรูปที่มีพื้นที่น้อยที่สุดมี 3 รูป คือ รูปหมายเลข 4, 6 และ 7
- รูปที่มีพื้นที่เป็นสี่เท่าของรูปที่มีพื้นที่น้อยที่สุดมี 2 รูป คือ รูปหมายเลข 1 และ 2

มีนาและเมษาสุ่มหยิบสลากพร้อมกันจากกอล่องที่บรรจุสลากหมายเลข 1 – 7 ซึ่งแต่ละหมายเลขแทนรูปที่ประกอบเป็นแทนแตรดังที่อธิบายข้างต้น ถ้าผู้ชนะคือผู้ที่หยิบได้สลาก

ที่มีหมายเลขของรูปที่มีพื้นที่มากกว่า จงหาความน่าจะเป็นที่มีนาจะชนะ เมื่อเมฆาหยิบได้
สลากที่มีหมายเลขของรูปที่มีพื้นที่น้อยที่สุด

11. งานเลี้ยงหนึ่งมีผู้มาร่วมงานทั้งหมด 10 คน โดยคนกลุ่มนี้มีสมาชิกราย 2 คู่ ต้องการจัดที่นั่งให้
ผู้มาร่วมงานเป็นโต๊ะกลม 2 ตัว ตัวละ 5 ที่นั่ง ถ้าโต๊ะกลมทั้งสองตัวนี้ไม่แตกต่างกัน จงหา
ความน่าจะเป็นที่ทุกโต๊ะจะมีคู่สมาชิกราย

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้
การจัดคน 7 คน ยืนเรียงแถวหน้ากระดานเพื่อถ่ายรูป ทำได้ $7!$ วิธี
ดังนั้น $n(S) = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$
ให้ E แทนเหตุการณ์ที่นายภคินจะได้ยืนตรงกลางและทุกคนยืนเรียงแถวสลับชายหญิง

(หญิง) ตำแหน่งที่	(ชาย) ตำแหน่งที่	(หญิง) ตำแหน่งที่	นายภคิน ตำแหน่งที่	(หญิง) ตำแหน่งที่	(ชาย) ตำแหน่งที่	(หญิง) ตำแหน่งที่
1	2	3	4	5	6	7

วิธีที่ 1 การจัดคน 7 คน ยืนเรียงแถวถ่ายรูป โดยนายภคินยืนตรงกลาง (ตำแหน่งที่ 4)
และทุกคนยืนเรียงแถวสลับชายหญิง แบ่งเป็น 7 ขั้นตอน ดังนี้

- ขั้นตอนที่ 1** จัดให้นายภคินยืนตรงกลาง (ตำแหน่งที่ 4) ทำได้ 1 วิธี
ขั้นตอนที่ 2 เลือกหญิง 1 คน จากทั้งหมด 4 คน ให้ยืนตำแหน่งที่ 1 ทำได้ 4 วิธี
ขั้นตอนที่ 3 เลือกชาย 1 คน จากที่เหลือ 2 คน ให้ยืนตำแหน่งที่ 2 ทำได้ 2 วิธี
ขั้นตอนที่ 4 เลือกหญิง 1 คน จากที่เหลือ 3 คน ให้ยืนตำแหน่งที่ 3 ทำได้ 3 วิธี
ขั้นตอนที่ 5 เลือกหญิง 1 คน จากที่เหลือ 2 คน ให้ยืนตำแหน่งที่ 5 ทำได้ 2 วิธี
ขั้นตอนที่ 6 เลือกชาย 1 คน จากที่เหลือ 1 คน ให้ยืนตำแหน่งที่ 6 ทำได้ 1 วิธี
ขั้นตอนที่ 7 เลือกหญิง 1 คน จากที่เหลือ 1 คน ให้ยืนตำแหน่งที่ 7 ทำได้ 1 วิธี
ดังนั้น $n(E) = 1 \times 4 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 4 \times 3 \times 2 \times 2$

วิธีที่ 2 การจัดคน 7 คน ยืนเรียงแถวถ่ายรูป โดยนายภคินยืนตรงกลาง (ตำแหน่งที่ 4) และทุกคนยืนเรียงแถวสลับซ้ายขวา แบ่งเป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จัดให้นายภคินยืนตรงกลาง (ตำแหน่งที่ 4) ทำได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดหญิง 4 คน ให้ยืนตำแหน่งที่ 1, 3, 5 และ 7 ทำได้ $4!$ วิธี

ขั้นตอนที่ 3 จัดชาย 2 คน ให้ยืนตำแหน่งที่ 2 และ 6 ทำได้ $2!$ วิธี

$$\text{ดังนั้น } n(E) = 1 \times 4! \times 2! = 4 \times 3 \times 2 \times 2$$

$$\text{จะได้ } \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 2}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{1}{105}$$

ดังนั้น จงหาความน่าจะเป็นที่ทุกคนยืนเรียงแถวสลับซ้ายขวาและนายภคินยืนตรงกลาง เท่ากับ $\frac{1}{105}$

2. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

การเลือกเครื่องดื่มของนักเรียนสองคนแบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 นักเรียนคนที่ 1 เลือกเครื่องดื่ม 1 ชนิด จากเครื่องดื่มทั้งหมด 4 ชนิด ได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 นักเรียนคนที่ 2 เลือกเครื่องดื่ม 1 ชนิด จากเครื่องดื่มทั้งหมด 4 ชนิด ได้ 4 วิธี

$$\text{ดังนั้น } n(S) = 4 \times 4 = 16$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนสองคนเลือกเครื่องดื่ม 1 ชนิด แล้วได้เป็นเครื่องดื่มชนิดเดียวกัน

การเลือกเครื่องดื่มของนักเรียนสองคนแบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 นักเรียนคนที่ 1 เลือกเครื่องดื่ม 1 ชนิด จากเครื่องดื่มทั้งหมด 4 ชนิด ได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 นักเรียนคนที่ 2 เลือกเครื่องดื่มชนิดเดียวกับที่นักเรียนคนที่ 1 เลือก ได้ 1 วิธี

$$\text{ดังนั้น } n(E) = 4 \times 1 = 4$$

$$\text{จะได้ } \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักเรียนสองคนเลือกเครื่องดื่มคนละ 1 ชนิด แล้วได้เป็นเครื่องดื่มชนิดเดียวกัน เท่ากับ $\frac{1}{4}$

3. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

การสุ่มหยิบบัตร 4 ใบ โดยหยิบทีละใบแล้วใส่คืนก่อนหยิบบัตรใบถัดไปแบ่งเป็น 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หยิบบัตรใบที่ 1 จำนวน 1 ใบ จากบัตรทั้งหมด 4 ใบ ทำได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 หยิบบัตรใบที่ 2 จำนวน 1 ใบ จากบัตรทั้งหมด 4 ใบ ทำได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 หยิบบัตรใบที่ 3 จำนวน 1 ใบ จากบัตรทั้งหมด 4 ใบ ทำได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 หยิบบัตรใบที่ 4 จำนวน 1 ใบ จากบัตรทั้งหมด 4 ใบ ทำได้ 4 วิธี

ดังนั้น $n(S) = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่สุ่มหยิบบัตรแล้วได้บัตรที่เรียงตามลำดับเป็นคำว่า COOK

การสุ่มหยิบบัตรแล้วได้บัตรที่เรียงตามลำดับเป็นคำว่า COOK แบ่งเป็น 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หยิบบัตรใบที่ 1 ได้เป็นบัตรที่มีตัวอักษร C ทำได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 หยิบบัตรใบที่ 2 ได้เป็นบัตรที่มีตัวอักษร O ทำได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 หยิบบัตรใบที่ 3 ได้เป็นบัตรที่มีตัวอักษร O ทำได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 หยิบบัตรใบที่ 4 ได้เป็นบัตรที่มีตัวอักษร K ทำได้ 1 วิธี

ดังนั้น $n(E) = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

$$\text{จะได้ } \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{256}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่สุ่มหยิบบัตร 4 ใบ โดยหยิบทีละใบแล้วใส่คืนก่อนหยิบบัตรใบถัดไป

แล้วบัตรที่ได้เรียงตามลำดับเป็นคำว่า COOK เท่ากับ $\frac{1}{256}$

4. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

การเล่นตู้ของเล่นหยอดเหรียญของรวิแบ่งเป็น 5 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ในการหยอดเหรียญเพื่อเล่นครั้งที่ 1 จำนวนวิธีที่รวิจะได้รถมี 50 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 ในการหยอดเหรียญเพื่อเล่นครั้งที่ 2 จำนวนวิธีที่รวิจะได้รถมี 49 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 ในการหยอดเหรียญเพื่อเล่นครั้งที่ 3 จำนวนวิธีที่รวิจะได้รถมี 48 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 ในการหยอดเหรียญเพื่อเล่นครั้งที่ 4 จำนวนวิธีที่รวิจะได้รถมี 47 วิธี

ขั้นตอนที่ 5 ในการหยอดเหรียญเพื่อเล่นครั้งที่ 5 จำนวนวิธีที่รวิจะได้รถมี 46 วิธี

ดังนั้น $n(S) = 50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่รวิได้รถสีแดง 2 คัน รถสีเหลือง 2 คัน และรถสีน้ำเงิน 1 คัน
ตามลำดับ

เนื่องจาก ตู้ของเล่นนี้บรรจุรถของเล่นสีละ 10 คัน ต้องการได้รถสีแดง 2 คัน รถสีเหลือง 2 คัน และรถสีน้ำเงิน 1 คัน ตามลำดับ

จะได้ว่า การเล่นตู้หยอดเหรียญของรวิให้ได้ตามเงื่อนไขที่กำหนด แบ่งเป็น 5 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ในการหยอดเหรียญเพื่อเล่นครั้งที่ 1 จำนวนวิธีที่รวิจะได้รถสีแดงมี 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 ในการหยอดเหรียญเพื่อเล่นครั้งที่ 2 จำนวนวิธีที่รวิจะได้รถสีแดงมี 9 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 ในการหยอดเหรียญเพื่อเล่นครั้งที่ 3 จำนวนวิธีที่รวิจะได้รถสีเหลืองมี 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 ในการหยอดเหรียญเพื่อเล่นครั้งที่ 4 จำนวนวิธีที่รวิจะได้รถสีเหลืองมี 9 วิธี

ขั้นตอนที่ 5 ในการหยอดเหรียญเพื่อเล่นครั้งที่ 5 จำนวนวิธีที่รวิจะได้รถสีน้ำเงินมี 10 วิธี

ดังนั้น $n(E) = 10 \times 9 \times 10 \times 9 \times 10$

$$\text{จะได้ } \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{10 \times 9 \times 10 \times 9 \times 10}{50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46} = \frac{135}{423,752}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้รถสีแดง 2 คัน รถสีเหลือง 2 คัน และรถสีน้ำเงิน 1 คัน ตามลำดับ

$$\text{เท่ากับ } \frac{135}{423,752}$$

5. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

การสร้างจำนวนนับที่มีสามหลักจากเลขโดดที่กำหนดให้ แบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 เลขโดดทั้งสามหลักไม่ซ้ำกันเลย

นำเลขโดดสามตัวที่ไม่ซ้ำกันเลย จากเลขโดด 1, 2, 3 หรือ 4 มาจัดเรียงเป็น

จำนวนนับที่มีสามหลักได้ $4 \times 3 \times 2 = 24$ วิธี

กรณีที่ 2 มีเลขโดดซ้ำกัน 1 คู่ แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 พิจารณาการเลือกเลขโดดที่ซ้ำกัน 1 คู่ ดังนี้

เลือกเลขโดดที่ซ้ำกัน 1 คู่ จากเลขโดด 2, 3 หรือ 4 ได้ 3 วิธี

และเลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 1, 2, 3 หรือ 4 ที่ไม่ซ้ำกับเลขโดดที่เลือกในขั้นที่ 1 ได้ 3 วิธี

ดังนั้น การเลือกเลขโดดสามตัวที่ซ้ำกัน 1 คู่ ทำได้ $3 \times 3 = 9$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 นำเลขโดดในขั้นที่ 1 มาจัดเรียงเป็นจำนวนนับที่มีสามหลักได้ $\frac{3!}{2!} = 3$ วิธี

ดังนั้น นำเลขโดดสามตัวที่ซ้ำกัน 1 คู่ มาจัดเรียงเป็นจำนวนนับที่มีสามหลักได้

$$9 \times 3 = 27 \text{ วิธี}$$

ดังนั้น $n(S) = 24 + 27 = 51$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่จำนวนนับที่มีสามหลักเป็นพาลินโดรม

หลักร้อย

หลักสิบ

หลักหน่วย

เหตุการณ์ที่จำนวนนับที่มีสามหลักเป็นพาลินโดรม แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขโดดที่ซ้ำกัน 1 คู่ เพื่อเป็นหลักร้อยและหลักหน่วยของจำนวนนับที่มีสามหลัก จากเลขโดด 2, 3 หรือ 4 ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 1, 2, 3 หรือ 4 ที่ไม่ซ้ำกับเลขโดดที่เลือกในขั้นที่ 1 เพื่อเป็นหลักสิบของจำนวนนับที่มีสามหลัก ได้ 3 วิธี

ดังนั้น $n(E) = 3 \times 3 = 9$

จะได้ $\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{9}{51} = \frac{3}{17}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่สร้างจำนวนนับที่มีสามหลักจากเลขโดด 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 แล้วจำนวนที่ได้เป็นพาลินโดรม เท่ากับ $\frac{3}{17}$

6. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

พิจารณาการทดลองสุ่มนี้เป็น 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 โยนลูกบอลลูกที่ 1 ลงช่องใดช่องหนึ่งของกล่อง ได้ 16 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 โยนลูกบอลลูกที่ 2 ลงช่องใดช่องหนึ่งของกล่อง ได้ 16 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 โยนลูกบอลลูกที่ 3 ลงช่องใดช่องหนึ่งของกล่อง ได้ 16 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 โยนลูกบอลลูกที่ 4 ลงช่องใดช่องหนึ่งของกล่อง ได้ 16 วิธี

ดังนั้น $n(S) = 16^4$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่รติเล่นเกมนี้แล้วได้รางวัล

วิธีที่ 1 เหตุการณ์ที่รติเล่นเกมนี้แล้วได้รางวัลแบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 รติเล่นเกมนี้แล้วได้รางวัลโดยลูกบอลทั้งสี่ลูกอยู่ในแนวเส้นทแยงมุมจากมุมบนซ้ายไปมุมล่างขวา แบ่งเป็น 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 โยนลูกบอลลูกที่ 1 ลงช่องใดช่องหนึ่งในแนวเส้นทแยงมุมที่กำหนด ได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 โยนลูกบอลลูกที่ 2 ลงช่องใดช่องหนึ่งในแนวเส้นทแยงมุมที่กำหนด ที่ไม่ซ้ำกับช่องที่โยนลูกบอลลูกแรก ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 โยนลูกบอลลูกที่ 3 ลงช่องใดช่องหนึ่งในแนวเส้นทแยงมุมที่กำหนด ที่ไม่ซ้ำกับช่องที่โยนลูกบอลลูกที่ 1 และ 2 ได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 โยนลูกบอลลูกที่ 4 ลงช่องใดช่องหนึ่งในแนวเส้นทแยงมุมที่กำหนด ที่ไม่ซ้ำกับช่องที่โยนลูกบอลลูกที่ 1, 2 และ 3 ได้ 1 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่รติเล่นเกมนี้แล้วได้รางวัลโดยลูกบอลทั้งสี่ลูกอยู่ในแนวเส้นทแยงมุมจากมุมบนซ้ายไปมุมล่างขวาเป็น $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ วิธี

กรณีที่ 2 รติเล่นเกมนี้แล้วได้รางวัลโดยลูกบอลทั้งสี่ลูกอยู่ในแนวเส้นทแยงมุมจากมุมบนขวาไปมุมล่างซ้าย แบ่งเป็น 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 โยนลูกบอลลูกที่ 1 ลงช่องใดช่องหนึ่งในแนวเส้นทแยงมุมที่กำหนด ได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 โยนลูกบอลลูกที่ 2 ลงช่องใดช่องหนึ่งในแนวเส้นทแยงมุมที่กำหนด ที่ไม่ซ้ำกับช่องที่โยนลูกบอลลูกแรก ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 โยนลูกบอลลูกที่ 3 ลงช่องใดช่องหนึ่งในแนวเส้นทแยงมุมที่กำหนด ที่ไม่ซ้ำกับช่องที่โยนลูกบอลลูกที่ 1 และ 2 ได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 โยนลูกบอลลูกที่ 4 ลงช่องใดช่องหนึ่งในแนวเส้นทแยงมุมที่กำหนด ที่ไม่ซ้ำกับช่องที่โยนลูกบอลลูกที่ 1, 2 และ 3 ได้ 1 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่รติเล่นเกมนี้แล้วได้รางวัลโดยลูกบอลทั้งสี่ลูกอยู่ในแนวเส้นทแยงมุมจากมุมบนขวาไปมุมล่างซ้ายเป็น $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ วิธี

ดังนั้น $n(E) = 24 + 24 = 48$

วิธีที่ 2 เนื่องจาก การได้รางวัลในเกมนี้ คือ ลูกบอลทั้งสี่ลูกอยู่ในแนวเส้นทแยงมุมแนวใดแนวหนึ่ง จากที่มีทั้งหมด 2 แนว คือ จากมุมบนซ้ายไปมุมล่างขวา และจากมุมบนขวาไปมุมล่างซ้าย และแต่ละแนวเส้นทแยงมุมมีช่องทั้งหมด 4 ช่อง จะได้ว่า เหตุการณ์ที่รติเล่นเกมนี้แล้วได้รางวัลแบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกแนวเส้นทแยงมุมของช่อง 1 แนว จากแนวเส้นทแยงมุม 2 แนว มี 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดเรียงลูกบอลที่โยนลูกที่ 1, 2, 3 และ 4 ให้อยู่ในช่องใดช่องหนึ่งตามแนวที่เลือกในขั้นที่ 1 มี $4! = 24$ วิธี

ดังนั้น $n(E) = 2 \times 24 = 48$

$$\text{จะได้ } \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{48}{16^4} = \frac{3}{4,096}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่รีติเล่นเกมนี้แล้วจะได้รับรางวัล เท่ากับ $\frac{3}{4,096}$

7. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

การสุ่มหยิบสลากขึ้นมาพร้อมกัน 2 ใบ จากสลากทั้งหมด 6 ใบ มี $C_{6,2} = \frac{6!}{4!2!} = 15$ วิธี

ดังนั้น $n(S) = 15$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่สุ่มหยิบสลากขึ้นมาพร้อมกัน 2 ใบ ได้เป็นสลากที่มีผลรวมของจำนวนที่เป็นหมายเลขของสลากมากกว่า 2

วิธีที่ 1 เนื่องจาก การสุ่มหยิบสลากขึ้นมาพร้อมกัน 2 ใบ ได้เป็นสลากที่มีผลรวมของจำนวนที่เป็นหมายเลขของสลากมากกว่า 2 มี 7 วิธี ได้แก่ $(-2, 5), (-1, 5), (0, 3), (0, 5), (2, 3), (2, 5)$ และ $(3, 5)$

ดังนั้น $n(E) = 7$

$$\text{จะได้ } \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{7}{15}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่สุ่มหยิบสลากขึ้นมาพร้อมกัน 2 ใบ ได้เป็นสลากที่มีผลรวมของจำนวนที่เป็นหมายเลขของสลากมากกว่า 2 เท่ากับ $\frac{7}{15}$

วิธีที่ 2 การสุ่มหยิบสลากขึ้นมาพร้อมกัน 2 ใบ ได้เป็นสลากที่มีผลรวมของจำนวนที่เป็นหมายเลขของสลากไม่เกิน 2 มีได้ 4 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 หยิบได้สลากที่มีหมายเลขเป็นจำนวนเต็มลบทั้งคู่ มีได้ 1 วิธี คือ $(-2, -1)$

กรณีที่ 2 หยิบได้สลากที่มีหมายเลขเป็น -2 และอีกหมายเลขหนึ่งเป็นศูนย์หรือจำนวนเต็มบวก มีได้ 3 วิธี คือ $(-2, 0), (-2, 2)$ และ $(-2, 3)$

กรณีที่ 3 หยิบได้สลากที่มีหมายเลขเป็น -1 และอีกหมายเลขหนึ่งเป็นศูนย์หรือจำนวนเต็มบวก มีได้ 3 วิธี คือ $(-1, 0), (-1, 2)$ และ $(-1, 3)$

กรณีที่ 4 หยิบได้สลากที่มีหมายเลขเป็น 0 และอีกหมายเลขหนึ่งเป็นจำนวนเต็มบวก มีได้ 1 วิธี คือ $(0, 2)$

ดังนั้น การสุ่มหยิบสลากขึ้นมาพร้อมกัน 2 ใบ ได้เป็นสลากที่

มีผลรวมของจำนวนที่เป็นหมายเลขของสลากไม่เกิน 2 มีได้ $1+3+3+1=8$ วิธี

จะได้ว่า $n(E) = 15 - 8 = 7$

จะได้ $\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{7}{15}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่สุ่มหยิบสลากขึ้นมาพร้อมกัน 2 ใบ ได้เป็นสลากที่มีผลรวมของจำนวนที่เป็นหมายเลขของสลากมากกว่า 2 เท่ากับ $\frac{7}{15}$

8. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

การสุ่มหยิบเสื้อ 2 ตัว จากเสื้อทั้งหมด 50 ตัว ทำได้ $C_{50,2} = \frac{50!}{48!2!} = \frac{50 \times 49}{2}$ วิธี

ดังนั้น $n(S) = 25 \times 49$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้เสื้อขนาดเดียวกันแต่สีต่างกัน

การสุ่มหยิบเสื้อ 2 ตัว แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 สุ่มหยิบเสื้อ 1 ขนาด จากทั้งหมด 5 ขนาด ทำได้ $C_{5,1} = 5$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 สุ่มหยิบเสื้อ 2 สีที่แตกต่างกัน จากทั้งหมด 10 สี ทำได้ $C_{10,2} = \frac{10!}{8!2!} = 5 \times 9$ วิธี

ดังนั้น $n(E) = 5 \times 5 \times 9$

จะได้ $\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5 \times 5 \times 9}{25 \times 49} = \frac{9}{49}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ได้เสื้อขนาดเดียวกันแต่สีต่างกัน เท่ากับ $\frac{9}{49}$

9. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

การคัดเลือกนักกีฬาว่ายน้ำจำนวน 4 คน จากผู้สมัคร 10 คน ทำได้ $C_{10,4} = \frac{10!}{6!4!} = 10 \times 7 \times 3$ วิธี

ดังนั้น $n(S) = 10 \times 7 \times 3$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่กวินซึ่งเป็นหนึ่งในผู้สมัครจะได้รับคัดเลือก

การคัดเลือกนักกีฬาว่ายน้ำที่กวินซึ่งเป็นหนึ่งในผู้สมัครจะได้รับคัดเลือก แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกกวินเป็นนักกีฬาว่ายน้ำ ทำได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกนักกีฬาว่ายน้ำอีก 3 คน จากผู้สมัครอีก 9 คนที่เหลือ

ทำได้ $C_{9,3} = \frac{9!}{6!3!} = 7 \times 4 \times 3$ วิธี

ดังนั้น $n(E) = 7 \times 4 \times 3$

$$\text{จะได้ } \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{7 \times 4 \times 3}{10 \times 7 \times 3} = \frac{2}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่กวินซึ่งเป็นหนึ่งในผู้สมัครจะได้รับคัดเลือก เท่ากับ $\frac{2}{5}$

10. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

เนื่องจาก มีนาและเมษาสุ่มหยิบสลากพร้อมกัน จากสลากหมายเลข 1, 2, 3, 4, 5, 6 หรือ 7

$$\text{ดังนั้น } n(S) = 2 \times C_{7,2} = 2 \times \frac{7!}{5!2!} = 42$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่มีนาชนะเมษา เมื่อเมษาหยิบได้สลากที่มีหมายเลขของรูปที่มีพื้นที่น้อยที่สุดแบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เมษาหยิบได้สลากที่มีหมายเลขของรูปที่มีพื้นที่น้อยที่สุด มีได้ $C_{2,1} = 2$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มีนาหยิบได้สลากที่มีหมายเลขของรูปที่มีพื้นที่มากกว่า มีได้ $C_{5,1} = 5$ วิธี

$$\text{ดังนั้น } n(E) = 2 \times 5 = 10$$

$$\text{จะได้ } \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่มีนาจะชนะ เมื่อเมษาหยิบได้สลากที่มีหมายเลขของรูปที่มีพื้นที่น้อยที่สุด เท่ากับ $\frac{5}{21}$

11. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

การจัดคน 10 คน นั่งโต๊ะกลม 2 ตัว ตัวละ 5 ที่นั่ง แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 พิจารณาการจัดคนนั่งโต๊ะกลมตัวที่ 1 ดังนี้

เลือกคน 5 คน จากคนทั้งหมด 10 คน เพื่อนั่งโต๊ะกลมตัวที่ 1 ได้ $C_{10,5} = \frac{10!}{5!5!}$ วิธี

และจัดคน 5 คนนี้ เพื่อนั่งโต๊ะกลมตัวที่ 1 ได้ $4!$ วิธี

ดังนั้น การจัดคนนั่งโต๊ะกลมตัวที่ 1 ทำได้ $\frac{10!}{5!5!} \times 4! = \frac{10!4!}{5!5!}$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาการจัดคนนั่งโต๊ะกลมตัวที่ 2 ดังนี้

เลือกคน 5 คน จากคนที่เหลือ 5 คน เพื่อนั่งโต๊ะกลมตัวที่ 2 ได้ 1 วิธี

และจัดคน 5 คนนี้ เพื่อนั่งโต๊ะกลมตัวที่ 2 ได้ $4!$ วิธี

ดังนั้น การจัดคนนั่งโต๊ะกลมตัวที่ 2 ทำได้ $1 \times 4! = 4!$ วิธี

$$\text{ดังนั้น } n(S) = \frac{10!4!}{5!5!} \times 4! = \frac{10!4!4!}{5!5!}$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่จัดที่นั่งแล้วทุกโต๊ะมีคู่สามีภรรยา

เหตุการณ์ที่จัดที่นั่งแล้วทุกโต๊ะมีคู่สามีภรรยา แบ่งเป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 พิจารณาการจัดคนนั่งโต๊ะกลมตัวที่ 1 ดังนี้

เลือกคู่สามีภรรยา 1 คู่ จากทั้งหมด 2 คู่ เพื่อนั่งโต๊ะกลมที่ 1 ได้ 2 วิธี

เลือกคนอีก 3 คน จากคน 6 คนที่ไม่ใช่คู่สามีภรรยา เพื่อนั่งโต๊ะกลมที่ 1

ได้ $C_{6,3} = \frac{6!}{3!3!}$ วิธี และจัดคนทั้ง 5 คนนี้ เพื่อนั่งโต๊ะกลมตัวที่ 1 ได้ 4! วิธี

ดังนั้น การจัดคนนั่งโต๊ะกลมตัวที่ 1 ทำได้ $2 \times \frac{6!}{3!3!} \times 4! = \frac{2 \times 6!4!}{3!3!}$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาการจัดคนนั่งโต๊ะกลมตัวที่ 2 ดังนี้

เลือกคู่สามีภรรยา 1 คู่ จากที่เหลือ 1 คู่ เพื่อนั่งโต๊ะกลมที่ 2 ได้ 1 วิธี

เลือกคนอีก 3 คน จากคน 3 คนที่ไม่ใช่คู่สามีภรรยา เพื่อนั่งโต๊ะกลมที่ 2 ได้ 1 วิธี

และจัดคนทั้ง 5 คนนี้ เพื่อนั่งโต๊ะกลมตัวที่ 2 ได้ 4! วิธี

ดังนั้น การจัดคนนั่งโต๊ะกลมตัวที่ 2 ทำได้ $1 \times 1 \times 4! = 4!$ วิธี

$$\text{ดังนั้น} \quad n(E) = \frac{2 \times 6!4!}{3!3!} \times 4! = \frac{2 \times 6!4!4!}{3!3!}$$

$$\text{จะได้} \quad \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\frac{2 \times 6!4!4!}{3!3!}}{\frac{10!4!4!}{5!5!}} = \frac{10}{63}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ทุกโต๊ะมีคู่สามีภรรยา เท่ากับ $\frac{10}{63}$

เฉลยแบบฝึกหัด

บทที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

แบบฝึกหัด 1.1

1. ค่าของ $\text{Re}(z)$ และ $\text{Im}(z)$ ของจำนวนเชิงซ้อน z ที่กำหนดให้ เป็นดังตารางต่อไปนี้

z	$\text{Re}(z)$	$\text{Im}(z)$
1. $2 + 3i$	2	3
2. $-4 + 5i$	-4	5
3. $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
4. -4	-4	0
5. $3i$	0	3
6. $\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$	$\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$

2. 1) $(-1, -2) + (2, 1) = (-1 + 2, -2 + 1)$
 $= (1, -1)$
 $(-1, -2)(2, 1) = ((-1)2 - (-2)1, (-1)1 + (-2)2)$
 $= (-2 + 2, -1 - 4)$
 $= (0, -5)$
- 2) $(-2, 2) + (2, -2) = (-2 + 2, 2 - 2)$
 $= (0, 0)$
 $(-2, 2)(2, -2) = ((-2)2 - 2(-2), (-2)(-2) + 2(2))$
 $= (-4 + 4, 4 + 4)$
 $= (0, 8)$
- 3) $(-2, 3) + (1, 4) = (-2 + 1, 3 + 4)$
 $= (-1, 7)$
 $(-2, 3)(1, 4) = ((-2)1 - 3(4), (-2)4 + 3(1))$

$$\begin{aligned}
 &= (-2-12, -8+3) \\
 &= (-14, -5) \\
 4) \quad \left(3, \frac{1}{2}\right) + \left(4, \frac{2}{3}\right) &= \left(3+4, \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \\
 &= \left(7, \frac{7}{6}\right) \\
 \left(3, \frac{1}{2}\right) \left(4, \frac{2}{3}\right) &= \left(3(4) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right), 3\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}(4)\right) \\
 &= \left(12 - \frac{1}{3}, 2 + 2\right) \\
 &= \left(\frac{35}{3}, 4\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad 1) \quad (2-3i) + (4-5i) &= (2+4) + (-3-5)i \\
 &= 6-8i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad (5+4i) + 3(2i-7) &= (5+4i) + (6i-21) \\
 &= (5-21) + (4+6)i \\
 &= -16+10i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad (2-\sqrt{2}i) + (5-\sqrt{8}i) &= (2+5) + (-\sqrt{2}-\sqrt{8})i \\
 &= (2+5) + (-\sqrt{2}-2\sqrt{2})i \\
 &= 7-3\sqrt{2}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad i(2-i) &= 2i-i^2 \\
 &= 1+2i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \sqrt{2}i(i-\sqrt{2}) &= \sqrt{2}i^2 - 2i \\
 &= -\sqrt{2} - 2i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad i^2(3-4i) &= (-1)(3-4i) \\
 &= -3+4i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad (-1-i)^2 &= (-1-i)(-1-i) \\
 &= (-1)(-1-i) + (-i)(-1-i) \\
 &= 1+i+i+i^2 \\
 &= 1+2i-1 \\
 &= 2i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad (3+2i)(2+4i) &= 3(2+4i) + 2i(2+4i) \\
 &= 6+12i+4i+8i^2 \\
 &= 6+12i+4i-8 \\
 &= -2+16i \\
 9) \quad (\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+\sqrt{3}i) &= \sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}i) + (-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+\sqrt{3}i) \\
 &= 2+\sqrt{6}i-\sqrt{6}i-3i^2 \\
 &= 2+3 \\
 &= 5 \\
 10) \quad (5-2i)(-2+3i) &= 5(-2+3i) + (-2i)(-2+3i) \\
 &= -10+15i+4i-6i^2 \\
 &= -10+19i+6 \\
 &= -4+19i
 \end{aligned}$$

4. 1) จาก $2a-3bi = 4+6i$

$$\begin{array}{ll}
 \text{จะได้} & 2a = 4 \quad \text{และ} \quad -3b = 6 \\
 \text{ดังนั้น} & a = 2 \quad \text{และ} \quad b = -2
 \end{array}$$

2) จาก $2a+bi = 10$

$$\begin{array}{ll}
 \text{จะได้} & 2a = 10 \quad \text{และ} \quad b = 0 \\
 \text{ดังนั้น} & a = 5 \quad \text{และ} \quad b = 0
 \end{array}$$

3) จาก $3a+(a-b)i = 6+i$

$$\text{จะได้} \quad 3a = 6 \quad \text{และ} \quad a-b = 1$$

$$\text{จาก } 3a = 6 \text{ จะได้ } a = 2$$

$$\text{จาก } a = 2 \text{ และ } a-b = 1 \text{ จะได้ } b = 1$$

$$\text{ดังนั้น } a = 2 \text{ และ } b = 1$$

4) จาก $a+b-2abi = 5-12i$

$$\text{จะได้} \quad a+b = 5 \quad \text{-----}(1)$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{และ} & -2ab = -12 \\
 & ab = 6 \quad \text{-----}(2)
 \end{array}$$

$$\text{จาก (1) จะได้} \quad b = 5-a \quad \text{-----}(3)$$

$$\text{จาก (2) และ (3) จะได้} \quad a(5-a) = 6$$

$$5a-a^2 = 6$$

$$a^2-5a+6 = 0$$

$$(a-3)(a-2) = 0$$

นั่นคือ $a-3 = 0$ หรือ $a-2 = 0$

$$a = 3 \quad \text{หรือ} \quad a = 2$$

ถ้า $a = 3$ จะได้ $b = 2$

ถ้า $a = 2$ จะได้ $b = 3$

ดังนั้น $a = 3, b = 2$ หรือ $a = 2, b = 3$

5) จาก $(a+bi)(2+5i) = 3-i$

$$(2a-5b) + (5a+2b)i = 3-i$$

จะได้ $2a-5b = 3$ -----(1)

และ $5a+2b = -1$ -----(2)

(1) $\times 2$; จะได้ $4a-10b = 6$ -----(3)

(2) $\times 5$; จะได้ $25a+10b = -5$ -----(4)

(3) + (4) ; จะได้

$$(4a-10b) + (25a+10b) = 6 + (-5)$$

$$(4a+25a) + (10b-10b) = 1$$

$$29a = 1$$

$$a = \frac{1}{29}$$

แทน a ด้วย $\frac{1}{29}$ ใน (2) จะได้ $5\left(\frac{1}{29}\right) + 2b = -1$

$$\frac{5}{29} + 2b = -1$$

$$2b = -1 - \frac{5}{29}$$

$$2b = -\frac{34}{29}$$

$$b = -\frac{17}{29}$$

ดังนั้น $a = \frac{1}{29}$ และ $b = -\frac{17}{29}$

$$\begin{aligned}
 5. \quad 1) \quad (1-i)^3 &= 1^3 - 3(1^2)(i) + 3(1)(i^2) - i^3 \\
 &= 1 - 3i + 3(1)(-1) - (-i) \\
 &= 1 - 3i - 3 + i \\
 &= -2 - 2i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \text{พิจารณา } (2+i)^4 &= 2^4 + 4(2^3)(i) + 6(2^2)(i^2) + 4(2)(i^3) + i^4 \\
 &= 16 + 32i + 24(-1) + 8(-i) + 1 \\
 &= 16 + 32i - 24 - 8i + 1 \\
 &= -7 + 24i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{และ } (2-i)^4 &= 2^4 - 4(2^3)(i) + 6(2^2)(i^2) - 4(2)(i^3) + i^4 \\
 &= 16 - 32i + 24(-1) - 8(-i) + 1 \\
 &= 16 - 32i - 24 + 8i + 1 \\
 &= -7 - 24i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } (2+i)^4 - (2-i)^4 &= (-7 + 24i) - (-7 - 24i) \\
 &= -7 + 24i + 7 + 24i \\
 &= 48i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \text{พิจารณา } (1+i)^3 &= 1^3 + 3(1^2)(i) + 3(1)(i^2) + i^3 \\
 &= 1 + 3i + 3(-1) + (-i) \\
 &= 1 + 3i - 3 - i \\
 &= -2 + 2i
 \end{aligned}$$

$$\text{และ } (1-i)^3 = -2 - 2i \quad (\text{จากข้อ 1)})$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } (1+i)^3 - (1-i)^3 &= (-2 + 2i) - (-2 - 2i) \\
 &= -2 + 2i + 2 + 2i \\
 &= 4i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \text{พิจารณา } (2+2i)^4 &= 2^4 (1+i)^4 \\
 &= 2^4 (1+i)^3 (1+i) \\
 &= 2^4 (-2+2i)(1+i) & (\text{จากข้อ 2)}) \\
 &= 16((-2-2)+0) \\
 &= 16(-4) \\
 &= -64
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } (-i)^5 (2+2i)^4 &= (-i)^4 (-i)(-64) \\
 &= (-i)(-64) \\
 &= 64i
 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 1.2

1. 1) $(-8+3i)-2(3-2i) = -8+3i-6+4i$
 $= -14+7i$
- 2) $5(3+i)-i(1+i) = 15+5i-i-i^2$
 $= 16+4i$
- 3) $-3(2-i)+i(2+i) = -6+3i+2i-1$
 $= -7+5i$
- 4) $-i(1+i)-3i(-3-2i) = -i+1+9i-6$
 $= -5+8i$
- 5) $\frac{1}{2}(1+i)-\frac{3}{2}(3+2i) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{9}{2}-3i$
 $= -4-\frac{5}{2}i$
- 6) $\sqrt{2}(\sqrt{18}-\sqrt{3}i)-2\sqrt{3}i(\sqrt{2}+\sqrt{12}i) = 6-\sqrt{6}i-2\sqrt{6}i+12$
 $= 18-3\sqrt{6}i$
- 7) $(2+i)^2(1+i)-(1+i)(1-3i)^2$
 $= (2^2+2(2)(i)+i^2)(1+i)-(1+i)(1^2-2(1)(3i)+(3i)^2)$
 $= (4+4i-1)(1+i)-(1+i)(1-6i-9)$
 $= (3+4i)(1+i)-(1+i)(-8-6i)$
 $= (1+i)(3+4i+8+6i)$
 $= (1+i)(11+10i)$
 $= (11+10i)+i(11+10i)$
 $= 11+10i+11i-10$
 $= 1+21i$
2. 1) $\frac{1}{2-3i} = \left(\frac{1}{2-3i}\right)\left(\frac{2+3i}{2+3i}\right)$
 $= \frac{2+3i}{13}$
 $= \frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \frac{3+2i}{2-3i} &= \left(\frac{3+2i}{2-3i} \right) \left(\frac{2+3i}{2+3i} \right) \\
 &= \frac{3(2+3i) + 2i(2+3i)}{13} \\
 &= \frac{6+9i+4i-6}{13} \\
 &= i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \frac{4+3i}{1+i} &= \left(\frac{4+3i}{1+i} \right) \left(\frac{1-i}{1-i} \right) \\
 &= \frac{4(1-i) + 3i(1-i)}{2} \\
 &= \frac{4-4i+3i+3}{2} \\
 &= \frac{7-i}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \frac{2-2i}{4i} &= \left(\frac{2-2i}{4i} \right) \left(\frac{-4i}{-4i} \right) \\
 &= \frac{-8i-8}{16} \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \frac{2-i}{4+i} &= \left(\frac{2-i}{4+i} \right) \left(\frac{4-i}{4-i} \right) \\
 &= \frac{2(4-i) + (-i)(4-i)}{17} \\
 &= \frac{8-2i-4i-1}{17} \\
 &= \frac{7-6i}{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad \frac{i}{2+6i} &= \left(\frac{i}{2+6i} \right) \left(\frac{2-6i}{2-6i} \right) \\
 &= \frac{2i+6}{40} \\
 &= \frac{3}{20} + \frac{1}{20}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad \frac{(1-i)3i}{2+i} &= \frac{3i+3}{2+i} \\
 &= \left(\frac{3+3i}{2+i}\right)\left(\frac{2-i}{2-i}\right) \\
 &= \frac{3(2-i)+3i(2-i)}{5} \\
 &= \frac{6-3i+6i+3}{5} \\
 &= \frac{9+3i}{5} \\
 &= \frac{9}{5} + \frac{3}{5}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad -4i(3+2i) + \frac{i}{1-i} &= -12i+8 + \left(\frac{i}{1-i}\right)\left(\frac{1+i}{1+i}\right) \\
 &= -12i+8 + \frac{i-1}{2} \\
 &= \frac{15}{2} - \frac{23}{2}i
 \end{aligned}$$

3. 1) จาก $z(1+i) = 4$

จะได้
$$\begin{aligned}
 z &= \frac{4}{1+i} \\
 &= \left(\frac{4}{1+i}\right)\left(\frac{1-i}{1-i}\right) \\
 &= 2-2i
 \end{aligned}$$

2) จาก $(2-i)z = 4+2i$

จะได้
$$\begin{aligned}
 z &= \frac{4+2i}{2-i} \\
 &= \left(\frac{4+2i}{2-i}\right)\left(\frac{2+i}{2+i}\right) \\
 &= \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i
 \end{aligned}$$

$$3) \text{ จาก } (3-i)z = 6-7i$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } z &= \frac{6-7i}{3-i} \\ &= \left(\frac{6-7i}{3-i} \right) \left(\frac{3+i}{3+i} \right) \\ &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

$$4) \text{ จาก } (1+3i)z = -2-i$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } z &= \frac{-2-i}{1+3i} \\ &= \left(\frac{-2-i}{1+3i} \right) \left(\frac{1-3i}{1-3i} \right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

$$5) \text{ จาก } (1+3i)z = 1+i$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } z &= \frac{1+i}{1+3i} \\ &= \left(\frac{1+i}{1+3i} \right) \left(\frac{1-3i}{1-3i} \right) \\ &= \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \end{aligned}$$

$$6) \text{ จาก } (2+i)z+i = 3$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } z &= \frac{3-i}{2+i} \\ &= \left(\frac{3-i}{2+i} \right) \left(\frac{2-i}{2-i} \right) \\ &= 1-i \end{aligned}$$

$$7) \text{ จาก } (1+i)^2 z = 2z-1+3i$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } (1+i)^2 z - 2z &= -1+3i \\ ((1+i)^2 - 2)z &= -1+3i \\ ((1+2i-1)-2)z &= -1+3i \\ (-2+2i)z &= -1+3i \\ z &= \frac{-1+3i}{-2+2i} \end{aligned}$$

$$z = \left(\frac{-1+3i}{-2+2i} \right) \left(\frac{-2-2i}{-2-2i} \right)$$

$$z = 1 - \frac{1}{2}i$$

8) จาก $\frac{z}{2+i} + i = 3$

จะได้ $\frac{z}{2+i} = 3-i$

$$z = (2+i)(3-i)$$

$$z = 7+i$$

4. 1) ให้ $z_1 = a+bi$ และ $z_2 = c+di$

จะได้ $z_1 z_2 = (a+bi)(c+di)$

$$= (ac-bd) + (ad+bc)i$$

$$= (ca-db) + (cb+da)i$$

$$= (c+di)(a+bi)$$

$$= z_2 z_1$$

2) ให้ $z = x+yi$, $z_1 = a+bi$ และ $z_2 = c+di$

จะได้ $z(z_1 z_2) = (x+yi)((a+bi)(c+di))$

$$= (x+yi)((ac-bd) + (ad+bc)i)$$

$$= (x(ac-bd) - y(ad+bc)) + (x(ad+bc) + y(ac-bd))i$$

$$= (xac - ybd - yad - ybc) + (xad + xbc + yac - ybd)i$$

$$= (xac - ybc - xbd - yad) + (xad - ybd + xbc + yac)i$$

$$= ((xa - yb)c - (xb + ya)d) + ((xa - yb)d + (xb + ya)c)i$$

$$= ((xa - yb) + (xb + ya)i)(c + di)$$

$$= ((x + yi)(a + bi))(c + di)$$

$$= (zz_1)z_2$$

3) ให้ $z = a+bi$

จะได้ $\overline{\overline{z}} = \overline{a+bi}$

$$= \overline{a-bi}$$

$$= a+bi$$

$$= z$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \text{ให้ } z_1 = a + bi \text{ และ } z_2 = c + di \\
 & \text{จะได้ } \overline{z_1 - z_2} = \overline{(a + bi) - (c + di)} \\
 & \quad = \overline{(a - c) + (b - d)i} \\
 & \quad = (a - c) - (b - d)i \\
 & \quad = (a - bi) - (c - di) \\
 & \quad = \overline{z_1} - \overline{z_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad 1) \quad & \overline{\overline{z_1}} = z_1 \\
 & \quad = 2 - i \\
 2) \quad & \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} \\
 & \quad = (2 + i) - (-3 - 2i) \\
 & \quad = 5 + 3i \\
 3) \quad & \overline{\overline{z_1} - z_2} = \overline{\overline{z_1}} - \overline{z_2} \\
 & \quad = z_1 - \overline{z_2} \\
 & \quad = (2 - i) - (-3 - 2i) \\
 & \quad = 5 + i \\
 4) \quad & z_1 + \overline{z_2} = (2 - i) + (-3 - 2i) \\
 & \quad = -1 - 3i \\
 5) \quad & \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{1}{\overline{z_2}} \\
 & \quad = \frac{1}{-3 - 2i} \\
 & \quad = \left(\frac{1}{-3 - 2i}\right) \left(\frac{-3 + 2i}{-3 + 2i}\right) \\
 & \quad = \frac{-3 + 2i}{13} \\
 & \quad = -\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i \\
 6) \quad & \frac{z_2}{\overline{z_1}} = \frac{-3 + 2i}{2 + i} \\
 & \quad = \left(\frac{-3 + 2i}{2 + i}\right) \left(\frac{2 - i}{2 - i}\right) \\
 & \quad = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad \frac{1}{\overline{z_1 + z_2}} &= \frac{1}{\overline{z_1} + \overline{z_2}} \\
 &= \frac{1}{2+i+(-3-2i)} \\
 &= \left(\frac{1}{-1-i} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{-1-i} \right) \left(\frac{-1+i}{-1+i} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad \left(\frac{1}{\overline{z_1}} + \frac{1}{\overline{z_2}} \right) i &= \left(\frac{1}{2+i} + \frac{1}{-3-2i} \right) i \\
 &= \left(\left(\frac{1}{2+i} \right) \left(\frac{2-i}{2-i} \right) + \left(\frac{1}{-3-2i} \right) \left(\frac{-3+2i}{-3+2i} \right) \right) i \\
 &= \left(\frac{2-i}{5} + \frac{-3+2i}{13} \right) i \\
 &= \left(\frac{11}{65} - \frac{3}{65}i \right) i \\
 &= \frac{3}{65} + \frac{11}{65}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad 1) \quad z\overline{z} &= (2-4i)(2+4i) \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \frac{1}{2}(z + \overline{z}) &= \frac{1}{2}((2-4i) + (2+4i)) \\
 &= \frac{1}{2}(4) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \frac{1}{i}(\overline{z} - z) &= \frac{1}{i}((2+4i) - (2-4i)) \\
 &= \frac{1}{i}(8i) \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad z(z + \overline{z}) &= (2-4i)((2-4i) + (2+4i)) \\
 &= (2-4i)(4) \\
 &= 8-16i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \frac{\bar{z}}{z} &= \frac{2+4i}{2-4i} \\
 &= \left(\frac{2+4i}{2-4i} \right) \left(\frac{2+4i}{2+4i} \right) \\
 &= \frac{-12+16i}{20} \\
 &= -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad (\bar{z} - \bar{\bar{z}})i &= (\bar{z} - z)i \\
 &= ((2+4i) - (2-4i))i \\
 &= (8i)i \\
 &= -8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad (1 - \bar{z})z^{-1} &= \frac{1 - \bar{z}}{z} \\
 &= \frac{1 - (2+4i)}{2-4i} \\
 &= \frac{-1-4i}{2-4i} \\
 &= \left(\frac{-1-4i}{2-4i} \right) \left(\frac{2+4i}{2+4i} \right) \\
 &= \frac{14-12i}{20} \\
 &= \frac{7}{10} - \frac{3}{5}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad \overline{\left(\frac{z-2}{i+1} \right)} &= \overline{\left(\frac{(2-4i)-2}{1+i} \right)} \\
 &= \overline{\left(\frac{-4i}{1+i} \right)} \\
 &= \frac{\overline{-4i}}{\overline{1+i}} \\
 &= \frac{4i}{1-i} \\
 &= \left(\frac{4i}{1-i} \right) \left(\frac{1+i}{1+i} \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{-4+4i}{2}$$

$$= -2+2i$$

7. ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z_1 = a+bi$ และ $z_2 = c+di$ เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง

สมมติให้ $z_1 z_2 = 0$ และ $z_1 \neq 0$

จะได้ $(a+bi)(c+di) = 0$

$$(ac-bd) + (ad+bc)i = 0$$

นั่นคือ $ac-bd = 0$ ----- (1)

และ $ad+bc = 0$ ----- (2)

จาก $z_1 \neq 0$ จะสามารถพิจารณาได้ 3 กรณี คือ

กรณี 1 ; $a \neq 0$ และ $b = 0$ จาก (1) จะได้ $ac = 0$ ดังนั้น $c = 0$

จาก (2) จะได้ $ad = 0$ ดังนั้น $d = 0$

กรณี 2 ; $a = 0$ และ $b \neq 0$ จาก (1) จะได้ $bd = 0$ ดังนั้น $d = 0$

จาก (2) จะได้ $bc = 0$ ดังนั้น $c = 0$

กรณี 3 ; $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ คูณ (1) ด้วย b จะได้ $abc - b^2d = 0$ ----- (3)

จาก (2) ด้วย a จะได้ $a^2d + abc = 0$ ----- (4)

นำ (4) - (3) จะได้ $a^2d + b^2d = 0$

$$d(a^2 + b^2) = 0$$

จาก $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ ดังนั้น $d = 0$

จาก 1) เมื่อ $d = 0$ จะได้ $ac = 0$ ดังนั้น $c = 0$

จากทั้ง 3 กรณีจะได้ $z_2 = c+di = 0$

ดังนั้น ถ้า $z_1 z_2 = 0$ แล้ว $z_1 = 0$ หรือ $z_2 = 0$

แบบฝึกหัด 1.3

1. 1) ให้ $z = a + bi = -16i$ จะได้ $a=0, b=-16$ และ $r = \sqrt{(-16)^2} = 16$

เนื่องจาก $b < 0$ จะได้ว่ารากที่สองของ $-16i$ คือ

$$\begin{aligned} \pm \left(\sqrt{\frac{16}{2}} - \sqrt{\frac{16}{2}}i \right) &= \pm(\sqrt{8} - \sqrt{8}i) \\ &= \pm(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i) \end{aligned}$$

ดังนั้น รากที่สองของ $-16i$ คือ $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ และ $-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

- 2) ให้ $z = a + bi = 5 + 12i$ จะได้ $a=5, b=12$ และ $r = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

เนื่องจาก $b \geq 0$ จะได้ว่ารากที่สองของ $5 + 12i$ คือ

$$\pm \left(\sqrt{\frac{13+5}{2}} + \sqrt{\frac{13-5}{2}}i \right) = \pm(3 + 2i)$$

ดังนั้น รากที่สองของ $5 + 12i$ คือ $3 + 2i$ และ $-3 - 2i$

- 3) ให้ $z = a + bi = 3 + 4i$ จะได้ $a=3, b=4$ และ $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

เนื่องจาก $b \geq 0$ จะได้ว่ารากที่สองของ $3 + 4i$ คือ

$$\pm \left(\sqrt{\frac{5+3}{2}} + \sqrt{\frac{5-3}{2}}i \right) = \pm(2 + i)$$

ดังนั้น รากที่สองของ $3 + 4i$ คือ $2 + i$ และ $-2 - i$

- 4) ให้ $z = a + bi = 8 - 6i$ จะได้ $a=8, b=-6$ และ $r = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$

เนื่องจาก $b < 0$ จะได้ว่ารากที่สองของ $8 - 6i$ คือ

$$\pm \left(\sqrt{\frac{10+8}{2}} - \sqrt{\frac{10-8}{2}}i \right) = \pm(3 - i)$$

ดังนั้น รากที่สองของ $8 - 6i$ คือ $3 - i$ และ $-3 + i$

- 5) ให้ $z = a + bi = 1 - 2\sqrt{2}i$ จะได้ $a=1, b=-2\sqrt{2}$ และ $r = \sqrt{1^2 + (-2\sqrt{2})^2} = 3$

เนื่องจาก $b < 0$ จะได้ว่ารากที่สองของ $1 - 2\sqrt{2}i$ คือ

$$\pm \left(\sqrt{\frac{3+1}{2}} - \sqrt{\frac{3-1}{2}}i \right) = \pm(\sqrt{2} - i)$$

ดังนั้น รากที่สองของ $1 - 2\sqrt{2}i$ คือ $\sqrt{2} - i$ และ $-\sqrt{2} + i$

2. 1) จาก $x^2 + 48 = 0$

จะได้ $x^2 = -48$

$$x = \pm 4\sqrt{3}i$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{4\sqrt{3}i, -4\sqrt{3}i\}$

2) จาก $2x^2 + 2x + 25 = 0$

เนื่องจาก $2^2 - 4(2)(25) = -196 < 0$

จะได้ว่า คำตอบของสมการนี้ คือ $\frac{-2 \pm \sqrt{-196}i}{4} = \frac{-2 \pm 14i}{4} = \frac{-1 \pm 7i}{2}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\left\{-\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i\right\}$

3) จาก $2x^2 + 5x + 12 = 0$

เนื่องจาก $5^2 - 4(2)(12) = -71 < 0$

จะได้ว่า คำตอบของสมการนี้ คือ $\frac{-5 \pm \sqrt{-71}i}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{71}i}{4}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\left\{-\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{71}}{4}i, -\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{71}}{4}i\right\}$

4) จาก $2x^2 - 2x + 1 = 0$

เนื่องจาก $(-2)^2 - 4(2)(1) = -4 < 0$

จะได้ว่า คำตอบของสมการนี้ คือ $\frac{2 \pm \sqrt{-4}i}{4} = \frac{1 \pm i}{2}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$

5) จาก $x^2 - 2x - 1 = 0$

เนื่องจาก $(-2)^2 - 4(1)(-1) = 8 > 0$

จะได้ว่า คำตอบของสมการนี้ คือ $\frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$

6) จาก $x^2 - 4x + 5 = 0$

เนื่องจาก $(-4)^2 - 4(1)(5) = -4 < 0$

จะได้ว่า คำตอบของสมการนี้ คือ $\frac{4 \pm \sqrt{-4}i}{2} = 2 \pm i$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{2 + i, 2 - i\}$

7) จาก $x^2 + x + 6 = 0$

เนื่องจาก $1^2 - 4(1)(6) = -23 < 0$

จะได้ว่า คำตอบของสมการนี้ คือ $\frac{-1 \pm \sqrt{-23}i}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{23}i}{2}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\left\{ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}i \right\}$

8) จาก $3x^2 + 5x - 16 = 0$

เนื่องจาก $5^2 - 4(3)(-16) = 217 > 0$

จะได้ว่า คำตอบของสมการนี้ คือ $\frac{-5 \pm \sqrt{217}}{6}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\left\{ -\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{217}}{6}, -\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{217}}{6} \right\}$

9) จาก $2x^2 + 2x + 4 = 0$

เนื่องจาก $2^2 - 4(2)(4) = -28 < 0$

จะได้ว่า คำตอบของสมการนี้ คือ $\frac{-2 \pm \sqrt{-28}i}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\left\{ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i \right\}$

10) จาก $(x+1)^2 + 49 = 0$

จะได้ $(x+1)^2 = -49$

$$x+1 = \pm 7i$$

$$x = -1 \pm 7i$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{-1 + 7i, -1 - 7i\}$

11) จาก $x^4 - 16 = 0$

จะได้ $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$$(x-2)(x+2)(x^2+4) = 0$$

นั่นคือ $x=2$ หรือ $x=-2$ หรือ $x^2+4=0$

จาก $x^2+4=0$ จะได้ $x = \pm 2i$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{2, -2, 2i, -2i\}$

12) จาก $x^4 + 2x^2 - 24 = 0$

จะได้ $(x^2 + 6)(x^2 - 4) = 0$

$$(x^2 + 6)(x-2)(x+2) = 0$$

นั่นคือ $x=2$ หรือ $x=-2$ หรือ $x^2+6=0$

จาก $x^2+6=0$ จะได้ $x = \pm\sqrt{6}i$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{2, -2, \sqrt{6}i, -\sqrt{6}i\}$

13) จาก $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

จะได้ $(x^3 - 1)(x^3 + 8) = 0$

$$(x-1)(x^2+x+1)(x+2)(x^2-2x+4) = 0$$

นั่นคือ $x=1$ หรือ $x=-2$ หรือ $x^2+x+1=0$ หรือ $x^2-2x+4=0$

จาก $x^2+x+1=0$ จะได้ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(1)(1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

จาก $x^2-2x+4=0$ จะได้ $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(1)(4)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}i}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\left\{1, -2, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i\right\}$

14) จาก $x^5 + 2x^4 - 8x^2 - 16x = 0$

จะได้ $x(x^4 + 2x^3 - 8x - 16) = 0$

$$x(x^3(x+2) - 8(x+2)) = 0$$

$$x(x+2)(x^3-8) = 0$$

$$x(x+2)(x-2)(x^2+2x+4) = 0$$

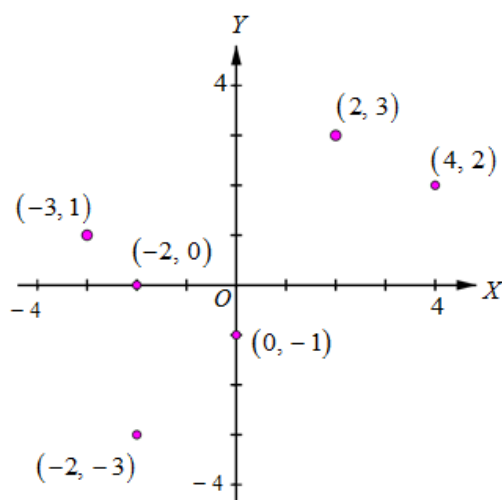
นั่นคือ $x=0$ หรือ $x=2$ หรือ $x=-2$ หรือ $x^2+2x+4=0$

จาก $x^2 + 2x + 4 = 0$ จะได้ $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$

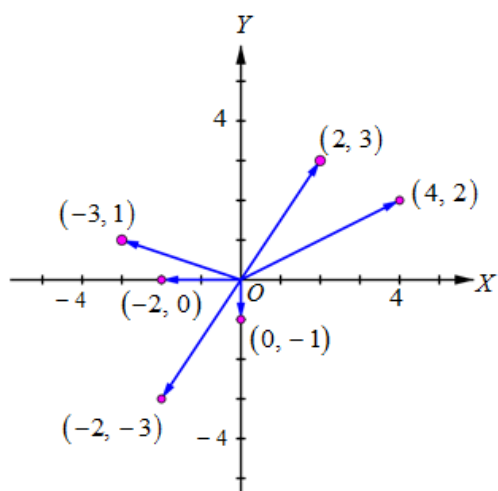
ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{0, 2, -2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i\}$

แบบฝึกหัด 1.4

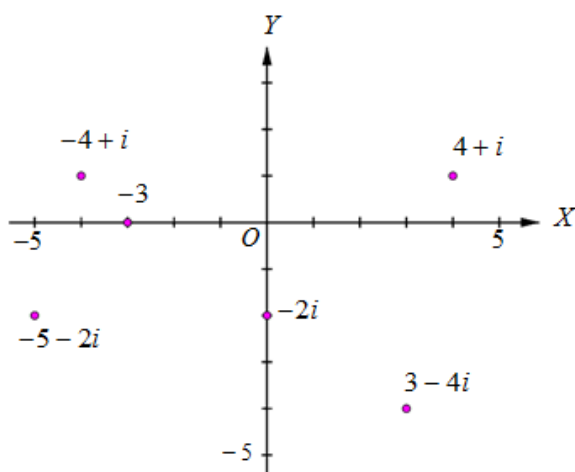
1. 1)



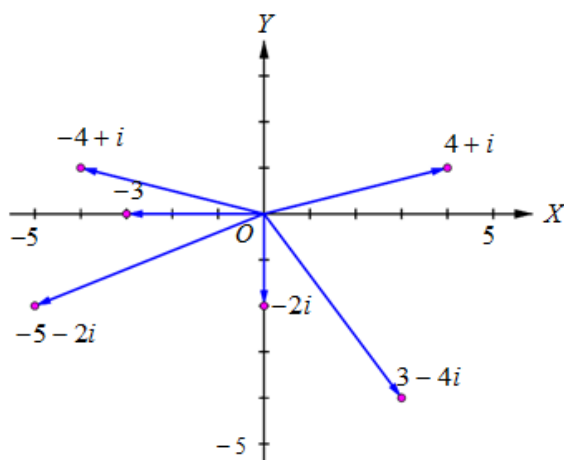
หรือ



2)



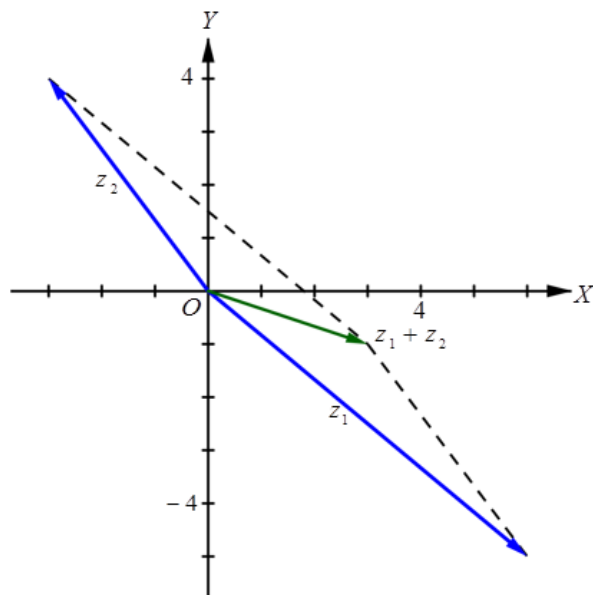
หรือ



2. จำนวนเชิงซ้อนที่แสดงด้วยจุด A คือ $(3, 1)$
 จำนวนเชิงซ้อนที่แสดงด้วยจุด B คือ $(0, 2)$
 จำนวนเชิงซ้อนที่แสดงด้วยจุด C คือ $(-3, -4)$
 จำนวนเชิงซ้อนที่แสดงด้วยจุด D คือ $(2, -2)$
 จำนวนเชิงซ้อนที่แสดงด้วยจุด E คือ $(-3, 0)$
 จำนวนเชิงซ้อนที่แสดงด้วยจุด F คือ $(-1, -1)$

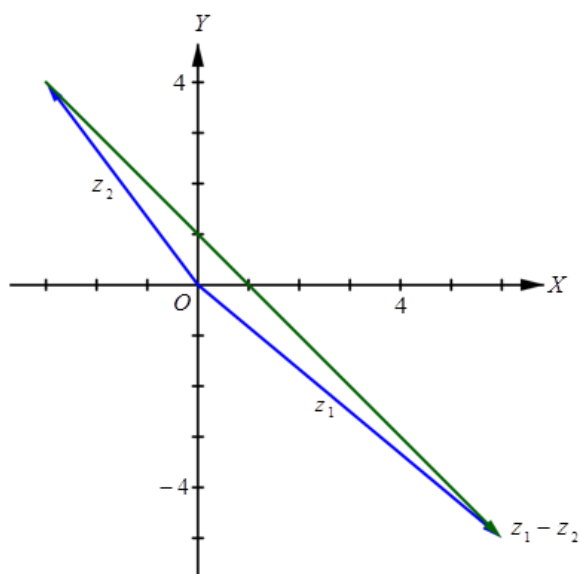
3. 1) $z_1 + z_2 = (6 - 5i) + (-3 + 4i) = 3 - i$

เขียนกราฟแสดงได้ดังรูป



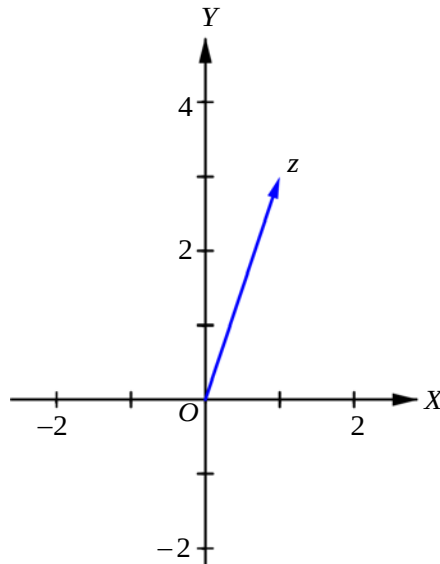
2) $z_1 - z_2 = (6 - 5i) - (-3 + 4i) = 9 - 9i$

เขียนกราฟแสดงได้ดังรูป



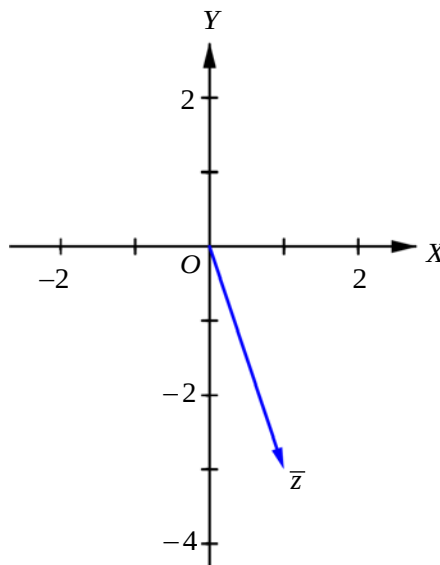
4. 1) $z = 1+3i$

เขียนกราฟแสดงได้ดังรูป



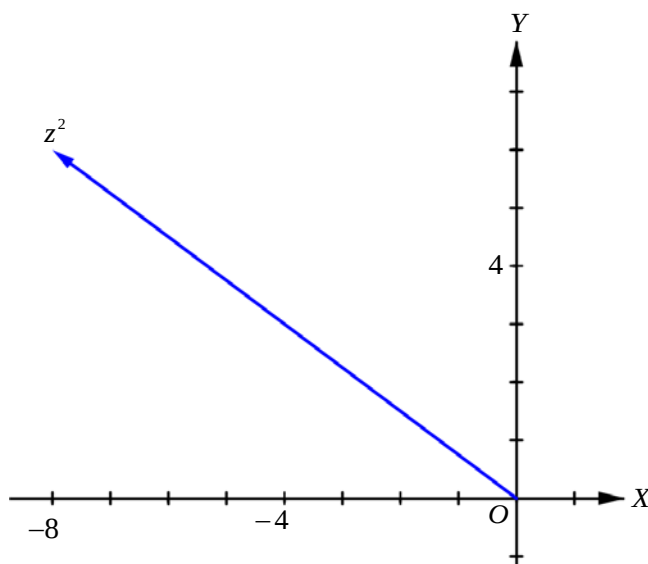
2) $\bar{z} = 1-3i$

เขียนกราฟแสดงได้ดังรูป



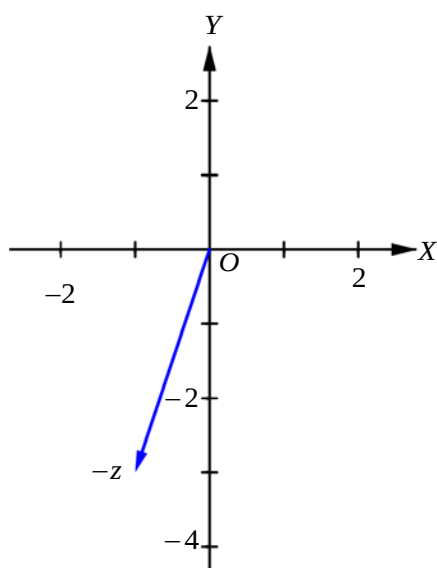
$$3) \quad z^2 = (1+3i)^2 = -8+6i$$

เขียนกราฟแสดงได้ดังรูป



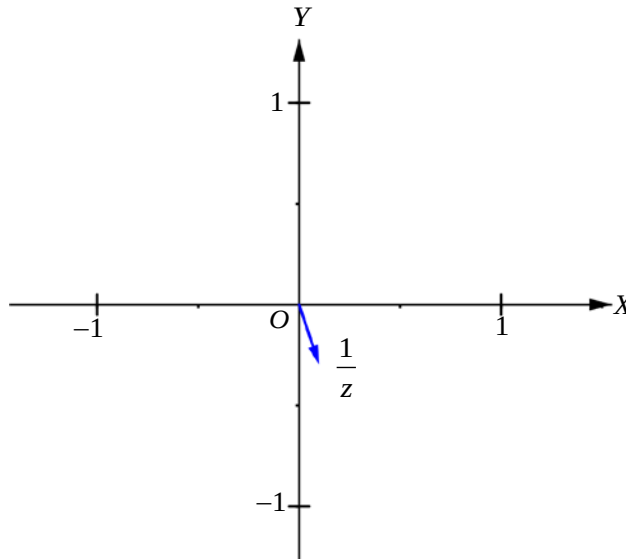
$$4) \quad -z = -1-3i$$

เขียนกราฟแสดงได้ดังรูป



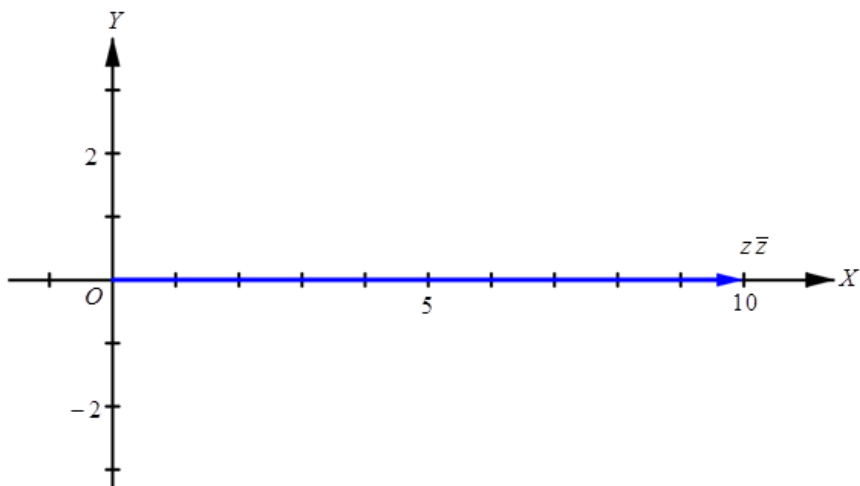
$$5) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{1+3i} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$$

เขียนกราฟแสดงได้ดังรูป



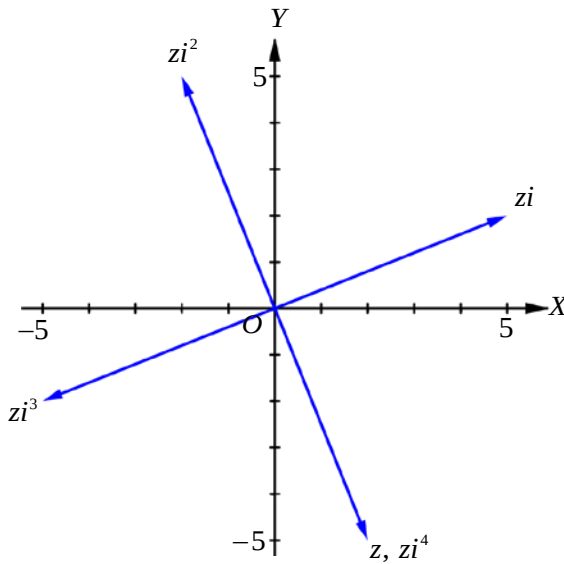
$$6) \quad z\bar{z} = (1+3i)(1-3i) = 10$$

เขียนกราฟแสดงได้ดังรูป



5. 1) $z = 2 - 5i$
 2) $zi = (2 - 5i)i = 5 + 2i$
 3) $zi^2 = (2 - 5i)(-1) = -2 + 5i$
 4) $zi^3 = (2 - 5i)(-i) = -5 - 2i$
 5) $zi^4 = 2 - 5i$

เขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อนได้ดังนี้



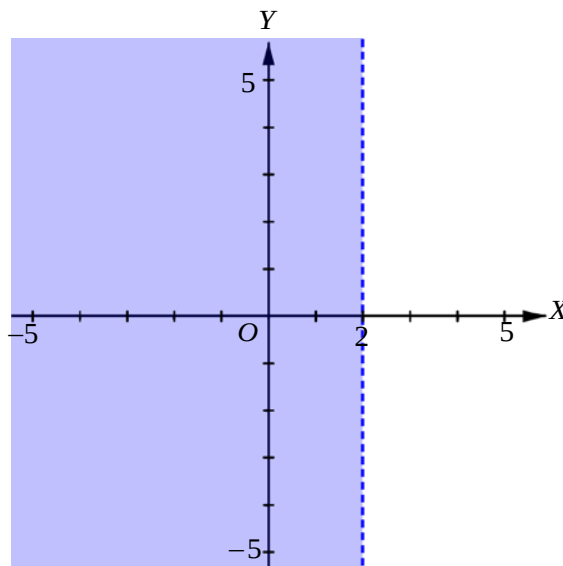
6. 1) ค่าสัมบูรณ์ของ $4i$ คือ $|4i| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$
 2) ค่าสัมบูรณ์ของ $\sqrt{2} - 3i$ คือ $|\sqrt{2} - 3i| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-3)^2} = \sqrt{11}$
 3) ค่าสัมบูรณ์ของ $-\sqrt{3} - i$ คือ $|\sqrt{3} - i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$
 4) ค่าสัมบูรณ์ของ $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}i$ คือ $|\sqrt{5} + 2\sqrt{3}i| = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{17}$
 5) ค่าสัมบูรณ์ของ $-3 - 4i$ คือ $|-3 - 4i| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$
 6) ค่าสัมบูรณ์ของ $-5 + 12i$ คือ $|-5 + 12i| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$

7. ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จากทฤษฎีบท 4 จะได้

$$\begin{aligned}
 |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) + (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\
 &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) + (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
 &= \overline{z_1}z_1 - \overline{z_1}z_2 - \overline{z_2}z_1 + \overline{z_2}z_2 + \overline{z_1}z_1 + \overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_1 + \overline{z_2}z_2 \\
 &= 2\overline{z_1}z_1 + 2\overline{z_2}z_2 \\
 &= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2
 \end{aligned}$$

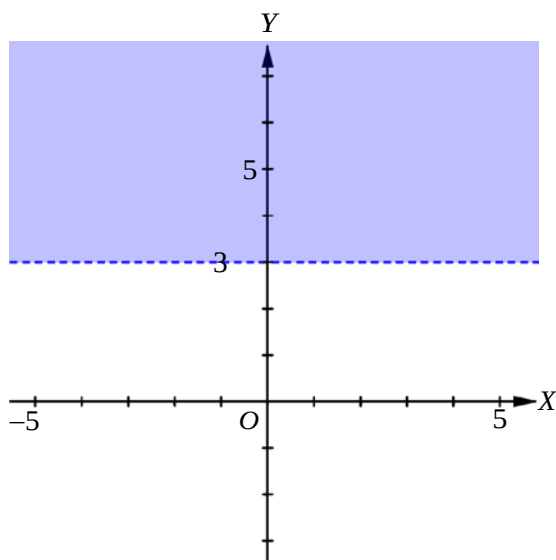
8. 1) $\text{Re}(z) < 2$

เขียนกราฟของจุดทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับ $\text{Re}(z) < 2$ แสดงเป็นส่วนแรเงาได้ดังนี้

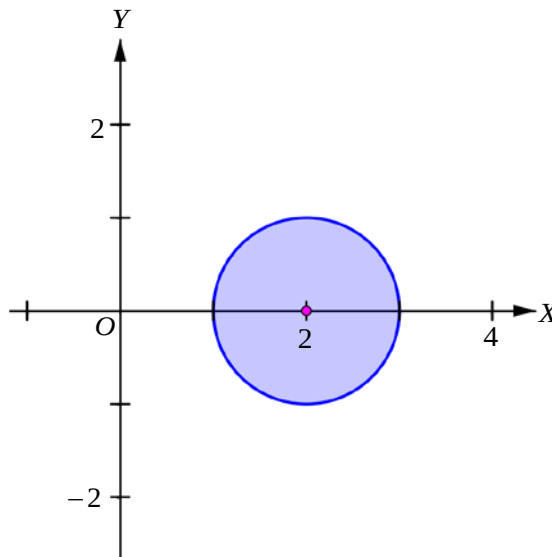


2) $\text{Im}(z) > 3$

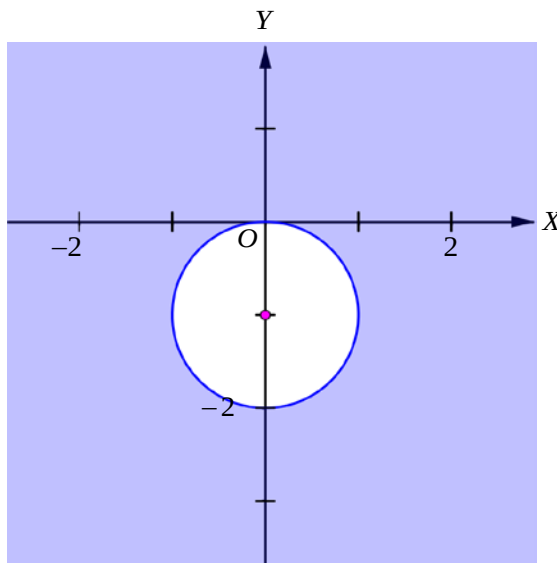
เขียนกราฟของจุดทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับ $\text{Im}(z) > 3$ แสดงเป็นส่วนแรเงาได้ดังนี้



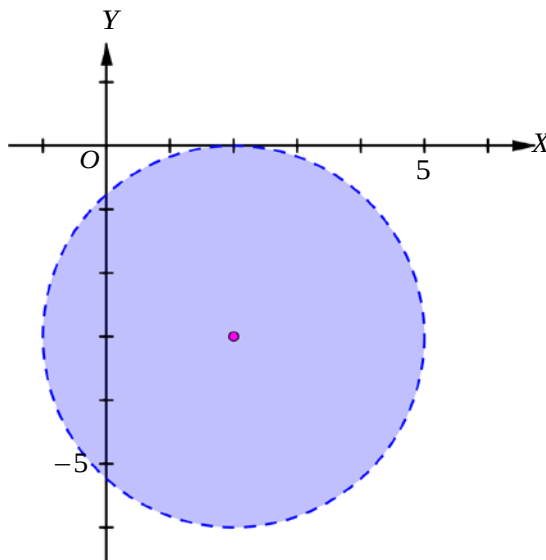
- 3) เนื่องจาก $|z-2|$ คือ ระยะทางระหว่างจุด $(2,0)$ และจุด z ใด ๆ
 ดังนั้น เซตของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับสมการ $|z-2| \leq 1$
 คือ เซตของจุดที่อยู่บนเส้นรอบวงและอยู่ภายในวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด
 $(2,0)$ และมีรัศมียาว 1 หน่วย
 จะได้ กราฟของจุดทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับสมการ $|z-2| \leq 1$ แสดงเป็นส่วนแรเงา
 ได้ดังนี้



- 4) เนื่องจาก $|z+i| = |z-(-i)|$ คือ ระยะทางระหว่างจุด $(0, -1)$ และจุด z ใด ๆ
 ดังนั้น เซตของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $|z+i| \geq 1$
 คือ เซตของจุดที่อยู่บนเส้นรอบวงและอยู่ภายนอกวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด
 $(0, -1)$ และรัศมียาว 1 หน่วย
 จะได้ กราฟของจุดทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $|z+i| \geq 1$ แสดงเป็นส่วนแรเงา
 ได้ดังนี้



- 5) เนื่องจาก $|z - 2 + 3i| = |z - (2 - 3i)|$ คือระยะทางระหว่างจุด $(2, -3)$ และจุด z ใด ๆ
 ดังนั้น เซตของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $|z - 2 + 3i| < 3$ คือ
 เซตของจุดที่อยู่ภายในวงกลม (ไม่รวมจุดบนเส้นรอบวง) ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2, -3)$
 และรัศมียาว 3 หน่วย
 จะได้ กราฟของจุดทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $|z - 2 + 3i| < 3$ แสดงเป็นส่วนแรเงา
 ได้ดังนี้



6) ให้ $z = a + bi$ จะได้ $\bar{z} = a - bi$

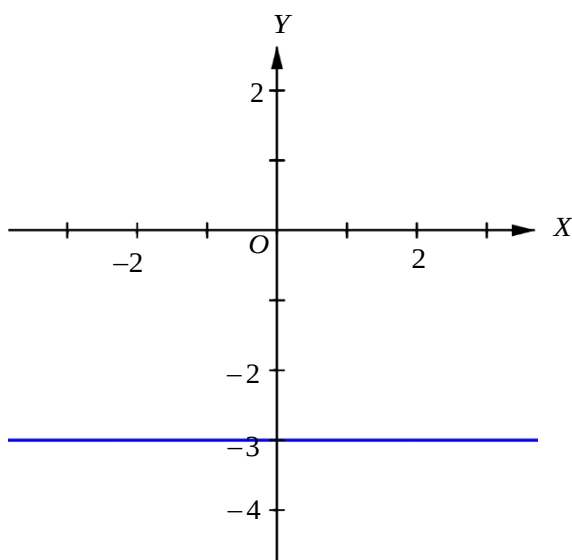
นั่นคือ $i + \bar{z} = i + (a - bi) = a + (1 - b)i$

จาก $\text{Im}(i + \bar{z}) = 4$ จะได้ $1 - b = 4$

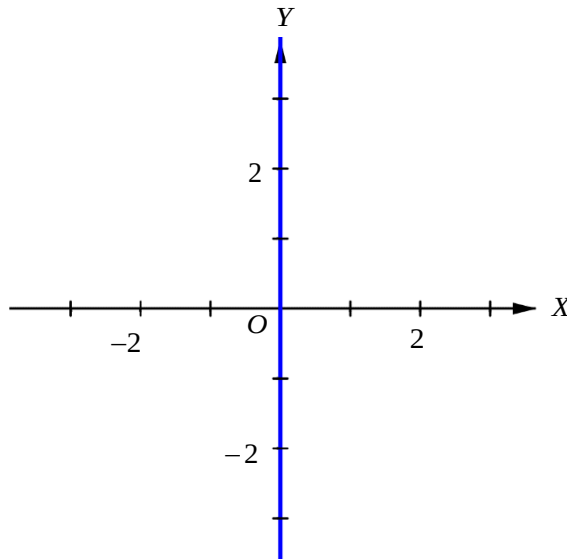
นั่นคือ $b = -3$

จะได้ $\text{Im}(z) = -3$

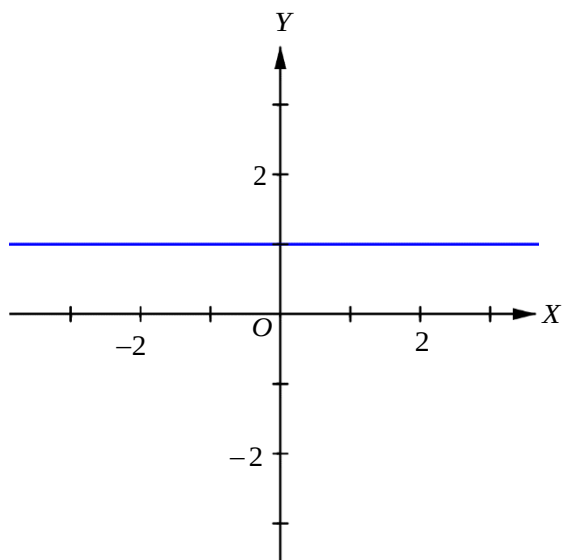
จะได้ กราฟของจุดทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับสมการ $\text{Im}(i + \bar{z}) = 4$ แสดงได้ดังนี้



- 7) กราฟของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับสมการ $|z+2|=|z-2|$ คือ กราฟของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนที่มีระยะห่างจากจุด $(-2,0)$ เท่ากับระยะห่างจากจุด $(2,0)$ นั่นคือ แกนจินตภาพ ดังรูป



- 8) กราฟของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับสมการ $|z - 3i| = |z + i|$ คือ
 กราฟของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนที่มีระยะห่างจากจุด $(0, 3)$ เท่ากับระยะห่าง
 จากจุด $(0, -1)$ นั่นคือ เส้นตรง $y = 1$ (หรือ $z = i$) ดังรูป



9) ให้จำนวนเชิงซ้อน $z = x + yi$

$$\text{จาก } |z + 2i| = |z - 3|$$

$$\text{นั่นคือ } |(x + yi) + 2i| = |(x + yi) - 3|$$

$$|x + (y + 2)i| = |(x - 3) + yi|$$

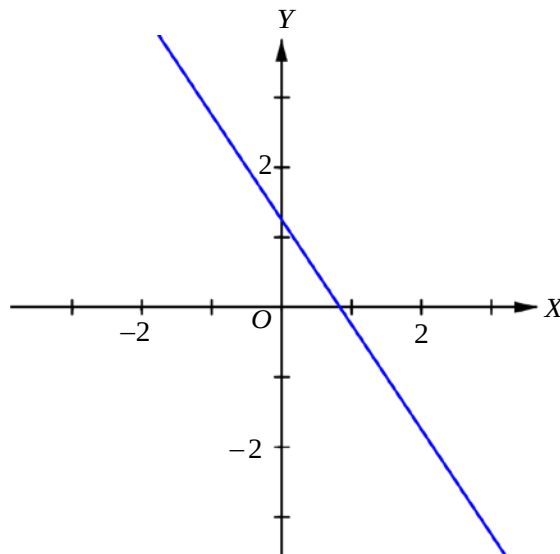
$$\text{จะได้ } \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2$$

$$6x + 4y - 5 = 0$$

ดังนั้น กราฟของจุดทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับ $|z + 2i| = |z - 3|$ คือ $6x + 4y - 5 = 0$

แสดงได้ดังรูป



10) ให้จำนวนเชิงซ้อน $z = x + yi$

$$\text{จาก } |z - (2 + i)| = |z + (2 + 3i)|$$

$$\text{นั่นคือ } |(x + yi) - (2 + i)| = |(x + yi) + (2 + 3i)|$$

$$|(x - 2) + (y - 1)i| = |(x + 2) + (y + 3)i|$$

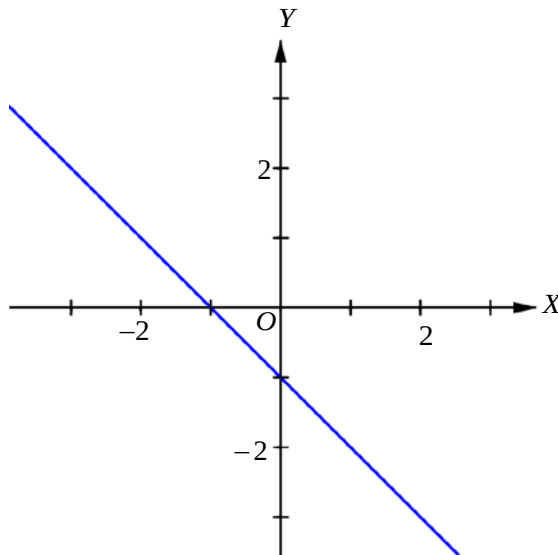
$$\text{จะได้ } \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + (y + 3)^2}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9$$

$$x + y + 1 = 0$$

ดังนั้น กราฟของจุดทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับ $|z - (2 + i)| = |z + (2 + 3i)|$ คือ

$x + y + 1 = 0$ ดังรูป



แบบฝึกหัด 1.5

1. 1) ให้ $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $1 + \sqrt{3}i$ จะได้ $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

เนื่องจาก $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ และ $(1, \sqrt{3})$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 1

จะได้ว่า θ ค่าหนึ่งที่ทำให้ $\tan \theta = \sqrt{3}$ คือ $\frac{\pi}{3}$

ดังนั้น รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $1 + \sqrt{3}i$ คือ $2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

และรูปเชิงขั้วทั่วไปของ $1 + \sqrt{3}i$ คือ $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right)$

เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

- 2) ให้ $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $1 - i$ จะได้ $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

เนื่องจาก $\tan \theta = \frac{(-1)}{1} = -1$ และ $(1, -1)$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 4

จะได้ว่า θ ค่าหนึ่งที่ทำให้ $\tan \theta = -1$ คือ $\frac{7\pi}{4}$

ดังนั้น รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $1 - i$ คือ $\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$

และรูปเชิงขั้วทั่วไปของ $1 - i$ คือ $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)$

เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

- 3) ให้ $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $-2\sqrt{3} + 2i$ จะได้ $r = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$

เนื่องจาก $\tan \theta = \frac{2}{-2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ และ $(-2\sqrt{3}, 2)$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 2

จะได้ว่า θ ค่าหนึ่งที่ทำให้ $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ คือ $\frac{5\pi}{6}$

ดังนั้น รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $-2\sqrt{3} + 2i$ คือ $4\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$

และรูปเชิงขั้วทั่วไปของ $-2\sqrt{3} + 2i$ คือ $4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)\right)$

เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

- 4) ให้ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $-4 - 4i$ จะได้ $r = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$

เนื่องจาก $\tan\theta = \frac{-4}{-4} = 1$ และ $(-4, -4)$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 3

จะได้ว่า θ ค่าหนึ่งที่ทำให้ $\tan\theta = 1$ คือ $\frac{5\pi}{4}$

ดังนั้น รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $-4 - 4i$ คือ $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

และรูปเชิงขั้วทั่วไปของ $-4 - 4i$ คือ $4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)$

เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

- 5) ให้ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $12 - 12\sqrt{3}i$ จะได้ $r = \sqrt{12^2 + (-12\sqrt{3})^2} = 24$

เนื่องจาก $\tan\theta = \frac{-12\sqrt{3}}{12} = -\sqrt{3}$ และ $(12, -12\sqrt{3})$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 4

จะได้ว่า θ ค่าหนึ่งที่ทำให้ $\tan\theta = -\sqrt{3}$ คือ $\frac{5\pi}{3}$

ดังนั้น รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $12 - 12\sqrt{3}i$ คือ $24\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

และรูปเชิงขั้วทั่วไปของ $12 - 12\sqrt{3}i$ คือ $24\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)\right)$

เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

- 6) ให้ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $-i$ จะได้ $r = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$

เนื่องจาก $-i$ เป็นจุดบนแกน Y ด้านลบ จะได้ $\theta = \frac{3\pi}{2}$

ดังนั้น รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $-i$ คือ $1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

และรูปเชิงขั้วทั่วไปของ $-i$ คือ $1\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

2. 1) ให้ $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$$\text{จะได้ } r = 2, \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{ดังนั้น รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ } \sqrt{2} + \sqrt{2}i \text{ คือ } 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^5 &= 2^5 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \\ &= 2^5 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \\ &= -16\sqrt{2} - 16\sqrt{2}i \end{aligned}$$

- 2) ให้ $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $\sqrt{3} - i$

$$\text{จะได้ } r = 2, \theta = \frac{11\pi}{6}$$

$$\text{ดังนั้น รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ } \sqrt{3} - i \text{ คือ } 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - i)^7 &= 2^7 \left(\cos \frac{77\pi}{6} + i \sin \frac{77\pi}{6} \right) \\ &= 2^7 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \\ &= 2^7 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(\frac{1}{2} \right) \right) \\ &= -64\sqrt{3} + 64i \end{aligned}$$

- 3) ให้ $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$$\text{จะได้ } r = 1, \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{ดังนั้น รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ } \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \text{ คือ } 1 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{100} &= 1^{100} \left(\cos \frac{100\pi}{6} + i \sin \frac{100\pi}{6}\right) \\
 &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \\
 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i
 \end{aligned}$$

4) เนื่องจาก $1-i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$

และ $-1-i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ และทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \frac{(1-i)^6}{(-1-i)^4} &= \frac{(\sqrt{2})^6 \left(\cos \frac{42\pi}{4} + i \sin \frac{42\pi}{4}\right)}{(\sqrt{2})^4 \left(\cos \frac{20\pi}{4} + i \sin \frac{20\pi}{4}\right)} \\
 &= 2 \left(\cos \frac{22\pi}{4} + i \sin \frac{22\pi}{4}\right) \\
 &= 2 \left(\cos \frac{11\pi}{2} + i \sin \frac{11\pi}{2}\right) \\
 &= 2(0 + i(-1)) \\
 &= -2i
 \end{aligned}$$

5) เนื่องจาก $-\sqrt{3}+i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$

และ $2\sqrt{3}+2i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ และทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 &\frac{(-\sqrt{3}+i)^3 (2\sqrt{3}+2i)^5}{(4i)^4} \\
 &= \frac{\left(2^3 \left(\cos \frac{15\pi}{6} + i \sin \frac{15\pi}{6}\right)\right) \left(4^5 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)\right)}{4^4} \\
 &= 32 \left(\cos \frac{20\pi}{6} + i \sin \frac{20\pi}{6}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 32\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) \\
 &= 32\left(-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\
 &= -16 - 16\sqrt{3}i
 \end{aligned}$$

6) เนื่องจาก $2\sqrt{3} + 6i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $\sqrt{48}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$2 + 2i \text{ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น } \sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{และ } \sqrt{3} - i \text{ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น } 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ และทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \overline{2\sqrt{3} + 6i} &= \sqrt{48}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
 (\overline{2\sqrt{3} + 6i})^{80} &= (\sqrt{48})^{80}\left(\cos\left(-\frac{80\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{80\pi}{3}\right)\right) \\
 &= 48^{40}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) \\
 (2 + 2i)^{45} &= (\sqrt{8})^{45}\left(\cos\frac{45\pi}{4} + i\sin\frac{45\pi}{4}\right) \\
 &= 2^{67}\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) \\
 (\sqrt{3} - i)^{35} &= 2^{35}\left(\cos\left(-\frac{35\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{35\pi}{6}\right)\right) \\
 &= 2^{35}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{ดังนั้น} \frac{(\overline{2\sqrt{3}+6i})^{80}}{(2+2i)^{45}(\sqrt{3}-i)^{35}} \\
 &= \frac{48^{40} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)}{\left(2^{67} \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \right) \left(2^{35} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right)} \\
 &= 2^{57} \cdot 3^{40} \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right) \\
 &= 2^{57} \cdot 3^{40} \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)
 \end{aligned}$$

3. 1) เนื่องจาก $|1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$$\begin{aligned}
 \text{และ } 1-\sqrt{3}i &= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\
 &= 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) \\
 &= 2 \left(\cos \left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right) \right) \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\theta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เนื่องจาก ต้องการหา θ ที่ $2\pi \leq \theta < 6\pi$ เท่านั้น

ดังนั้น ค่า k ที่เป็นไปได้ คือ 1 และ 2

ซึ่งทำให้ได้ว่า $r=2$ และ $\theta = \frac{11\pi}{3}$ หรือ $\theta = \frac{17\pi}{3}$

2) เนื่องจาก $|-1-i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{และ } -1-i &= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \\
 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \\
 &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right) \right) \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เนื่องจาก ต้องการหา θ ที่ $5\pi \leq \theta < 7\pi$ เท่านั้น

ดังนั้น ค่า k ที่เป็นไปได้ คือ 2

ซึ่งทำให้ได้ว่า $r = \sqrt{2}$ และ $\theta = \frac{21\pi}{4}$

3) เนื่องจาก $|-1-i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \text{และ } -1-i &= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right) \right) \text{ เมื่อ } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ดังนั้น $2\theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

นั่นคือ $\theta = \frac{5\pi}{8} + k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เนื่องจาก ต้องการหา θ ที่ $0 \leq \theta < 2\pi$ เท่านั้น

ดังนั้น ค่า k ที่เป็นไปได้ คือ 0 และ 1

ซึ่งทำให้ได้ว่า $r = \sqrt[4]{2}$ และ $\theta = \frac{5\pi}{8}$ หรือ $\theta = \frac{13\pi}{8}$

แบบฝึกหัด 1.6

1. 1) ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่สามของ -64

จะได้ $z^3 = -64$

เนื่องจาก $-64 = 64(\cos \pi + i \sin \pi)$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ $r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = 64(\cos \pi + i \sin \pi)$

ดังนั้น $r^3 = 64$ และ $3\theta - \pi = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

จึงได้ว่า $r = 4$ และ $\theta = \frac{\pi + 2k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

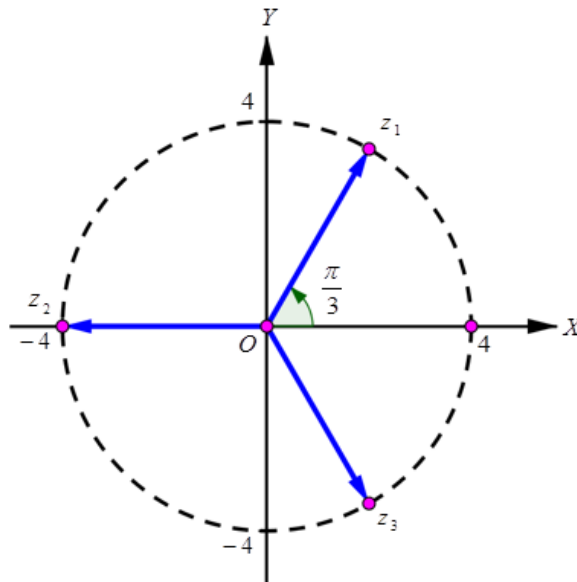
ดังนั้น $z = 4 \left(\cos \left(\frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) \right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2 - 2\sqrt{3}i$

เวกเตอร์ที่แสดงรากที่ 3 ของ -64 มีขนาด 4 หน่วย และเวกเตอร์แต่ละคู่ที่อยู่ในการลำดับติดกัน ทำมุมขนาด $\frac{2\pi}{3}$ หรือ 120° เท่ากันทุกคู่ ซึ่งเขียนแสดงได้ดังนี้



- 2) ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่สามของ $27i$

จะได้ $z^3 = 27i$

เนื่องจาก $27i = 27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

ดังนั้น $r^3 = 27$ และ $3\theta - \frac{\pi}{2} = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

จึงได้ว่า $r = 3$ และ $\theta = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

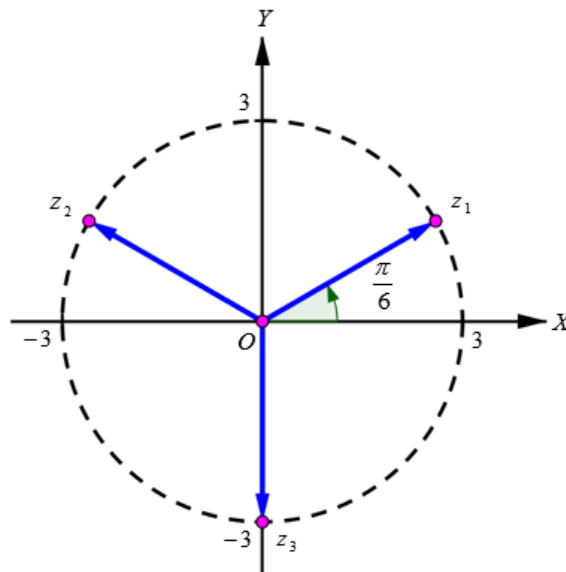
ดังนั้น $z = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -3i$

เวกเตอร์ที่แสดงรากที่ 3 ของ $27i$ มีขนาด 3 หน่วย และเวกเตอร์แต่ละคู่ที่อยู่ในลำดับติดกัน ทำมุมขนาด $\frac{2\pi}{3}$ หรือ 120° เท่ากันทุกคู่ ซึ่งเขียนแสดงได้ดังนี้



3) ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่สามของ $\sqrt{3} - i$

จะได้ $z^3 = \sqrt{3} - i$

เนื่องจาก $\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

ดังนั้น $r^3 = 2$ และ $3\theta - \frac{11\pi}{6} = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

จึงได้ว่า $r = \sqrt[3]{2}$ และ $\theta = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

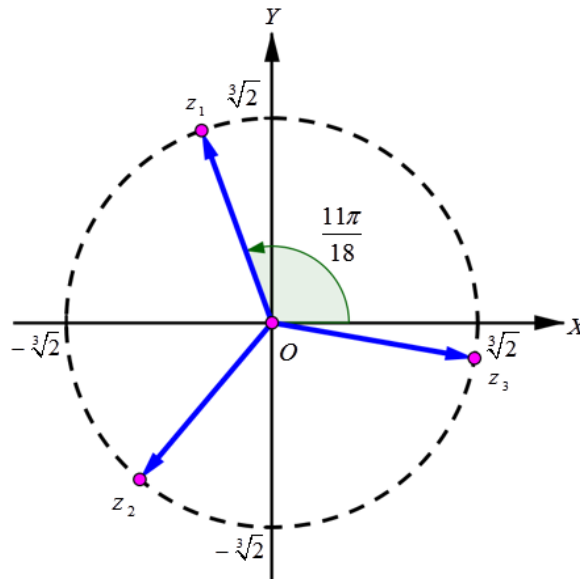
ดังนั้น $z = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{11\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{11\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{23\pi}{6} + i \sin \frac{23\pi}{6} \right)$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{35\pi}{6} + i \sin \frac{35\pi}{6} \right)$

เวกเตอร์ที่แสดงรากที่ 3 ของ $\sqrt{3} - i$ มีขนาด $\sqrt[3]{2}$ หน่วย และเวกเตอร์แต่ละคู่ที่อยู่ในลำดับติดกัน ทำมุมขนาด $\frac{2\pi}{3}$ หรือ 120° เท่ากันทุกคู่ ซึ่งเขียนแสดงได้ดังนี้



4) ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่สามของ $8 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

จะได้ $z^3 = 8 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ $r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = 8 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

ดังนั้น $r^3 = 8$ และ $3\theta - \frac{\pi}{3} = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

จึงได้ว่า $r = 2$ และ $\theta = \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $z = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

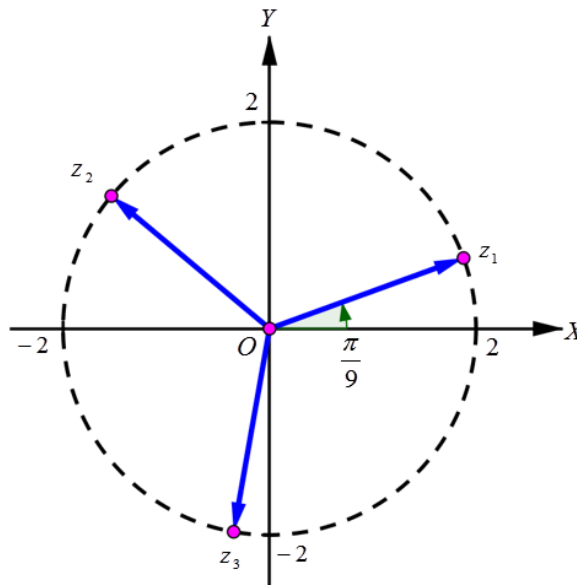
เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right)$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{9} + i \sin \frac{7\pi}{9} \right)$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = 2 \left(\cos \frac{13\pi}{9} + i \sin \frac{13\pi}{9} \right)$

เวกเตอร์ที่แสดงรากที่ 3 ของ $8 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ มีขนาด 2 หน่วย และเวกเตอร์

แต่ละคู่ที่อยู่ในลำดับติดกัน ทำมุมขนาด $\frac{2\pi}{3}$ หรือ 120° เท่ากันทุกคู่ ซึ่งเขียนแสดงได้ดังนี้



2. พิจารณา $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$

ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่สองของ 1

$$\text{จะได้ } z^2 = 1$$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ $r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 1(\cos 0 + i \sin 0)$

$$\text{ดังนั้น } r^2 = 1 \quad \text{และ} \quad 2\theta - 0 = 2k\pi \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

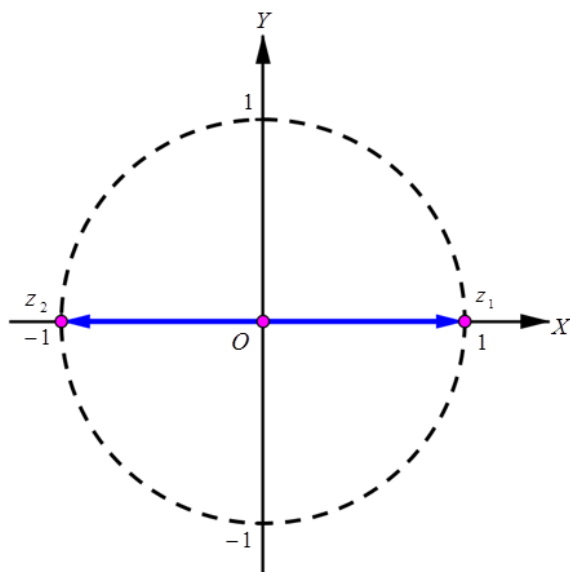
$$\text{จึงได้ว่า } r = 1 \quad \text{และ} \quad \theta = k\pi \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ดังนั้น } z = 1(\cos k\pi + i \sin k\pi) \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{เมื่อ } k = 0 \quad \text{จะได้ } z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$\text{เมื่อ } k = 1 \quad \text{จะได้ } z_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

เวกเตอร์ที่แสดงรากที่ 2 ของ 1 มีขนาด 1 หน่วย และเวกเตอร์ทั้งสองทำมุมขนาด π หรือ 180° ซึ่งเขียนแสดงได้ดังนี้



ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่สี่ของ 1

$$\text{จะได้ } z^4 = 1$$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ $r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 1(\cos 0 + i \sin 0)$

$$\text{ดังนั้น } r^4 = 1 \quad \text{และ} \quad 4\theta - 0 = 2k\pi \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{จึงได้ว่า } r = 1 \quad \text{และ} \quad \theta = \frac{2k\pi}{4} \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

ดังนั้น $z = 1\left(\cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}\right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

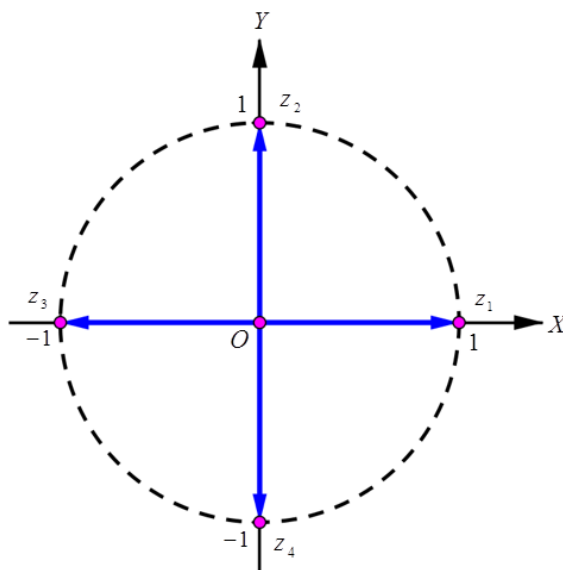
เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$

เวกเตอร์ที่แสดงรากที่ 4 ของ 1 มีขนาด 1 หน่วย และเวกเตอร์แต่ละคู่ที่อยู่ในลำดับติดกัน ทำมุมขนาด $\frac{\pi}{2}$ หรือ 90° เท่ากันทุกคู่ ซึ่งเขียนแสดงได้ดังนี้



ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่แปดของ 1

จะได้ $z^8 = 1$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ $r^8(\cos 8\theta + i\sin 8\theta) = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

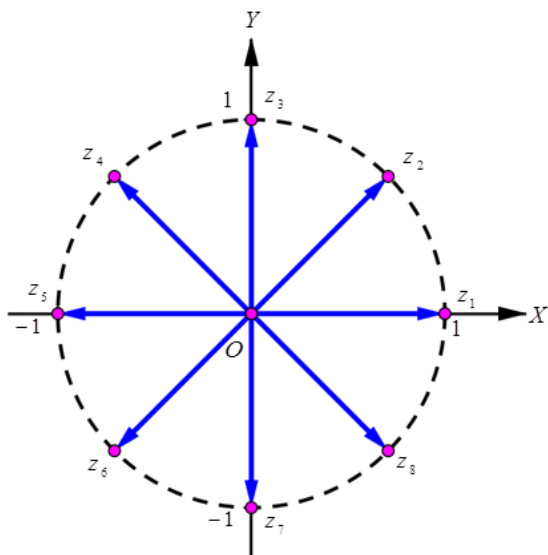
ดังนั้น $r^8 = 1$ และ $8\theta - 0 = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

จึงได้ว่า $r = 1$ และ $\theta = \frac{2k\pi}{8}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $z = 1\left(\cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}\right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เมื่อ $k = 0$	จะได้ $z_1 = \cos 0 + i \sin 0$	$= 1$
เมื่อ $k = 1$	จะได้ $z_2 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$	$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
เมื่อ $k = 2$	จะได้ $z_3 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$	$= i$
เมื่อ $k = 3$	จะได้ $z_4 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$	$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
เมื่อ $k = 4$	จะได้ $z_5 = \cos \pi + i \sin \pi$	$= -1$
เมื่อ $k = 5$	จะได้ $z_6 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}$	$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
เมื่อ $k = 6$	จะได้ $z_7 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$	$= -i$
เมื่อ $k = 7$	จะได้ $z_8 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}$	$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

เวกเตอร์ที่แสดงรากที่ 8 ของ 1 มีขนาด 1 หน่วย และเวกเตอร์แต่ละคู่ที่อยู่ในลำดับติดกัน
ทำมุมขนาด $\frac{\pi}{4}$ หรือ 45° เท่ากันทุกคู่ ซึ่งเขียนแสดงได้ดังนี้



พิจารณา $i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่สองของ i

จะได้ $z^2 = i$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ $r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

ดังนั้น $r^2 = 1$ และ $2\theta - \frac{\pi}{2} = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

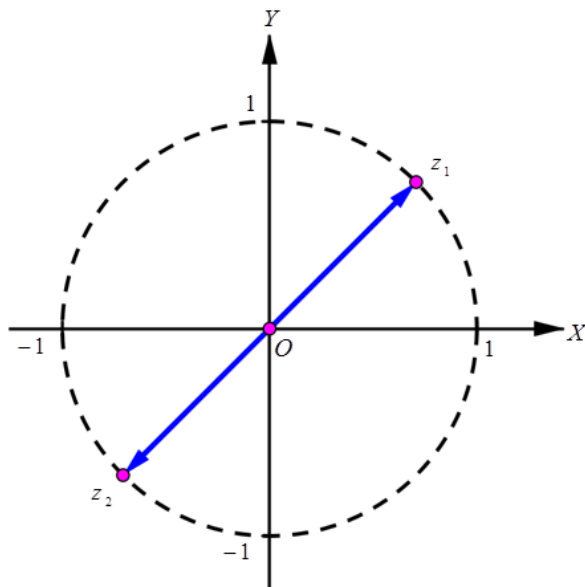
จึงได้ว่า $r = 1$ และ $\theta = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $z = 1 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + k\pi \right) \right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

เวกเตอร์ที่แสดงรากที่ 2 ของ i มีขนาด 1 หน่วย และเวกเตอร์ทั้งสองทำมุมขนาด π หรือ 180° ซึ่งเขียนแสดงได้ดังนี้



ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่สี่ของ i

จะได้ $z^4 = i$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ $r^4 (\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

ดังนั้น $r^4 = 1$ และ $4\theta - \frac{\pi}{2} = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

จึงได้ว่า $r = 1$ และ $\theta = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $z = 1 \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \right) \right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

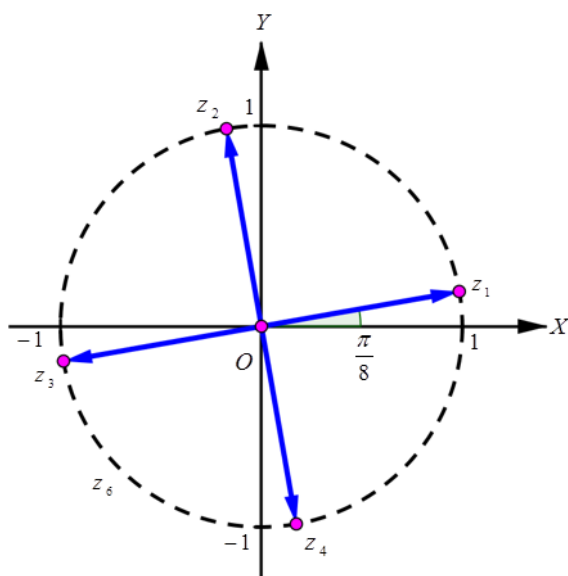
เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8}$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8}$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8}$

เวกเตอร์ที่แสดงรากที่ 4 ของ i มีขนาด 1 หน่วย และเวกเตอร์แต่ละคู่ที่อยู่ในลำดับติดกัน
ทำมุมขนาด $\frac{\pi}{2}$ หรือ 90° เท่ากันทุกคู่ ซึ่งเขียนแสดงได้ดังนี้



ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่แปดของ i

จะได้ $z^8 = i$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ $r^8 (\cos 8\theta + i \sin 8\theta) = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

ดังนั้น $r^8 = 1$ และ $8\theta - \frac{\pi}{2} = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

จึงได้ว่า $r = 1$ และ $\theta = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{8}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $z = 1 \left(\cos \left(\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} \right) \right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16}$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \cos \frac{5\pi}{16} + i \sin \frac{5\pi}{16}$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \cos \frac{9\pi}{16} + i \sin \frac{9\pi}{16}$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \cos \frac{13\pi}{16} + i \sin \frac{13\pi}{16}$

เมื่อ $k = 4$ จะได้ $z_5 = \cos \frac{17\pi}{16} + i \sin \frac{17\pi}{16}$

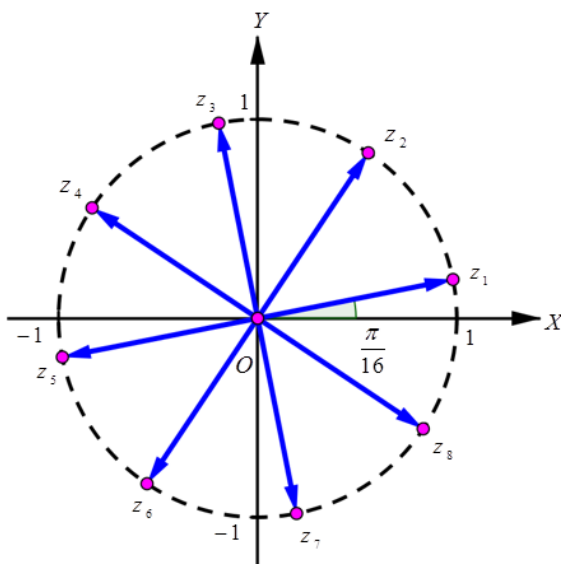
เมื่อ $k = 5$ จะได้ $z_6 = \cos \frac{21\pi}{16} + i \sin \frac{21\pi}{16}$

เมื่อ $k = 6$ จะได้ $z_7 = \cos \frac{25\pi}{16} + i \sin \frac{25\pi}{16}$

เมื่อ $k = 7$ จะได้ $z_8 = \cos \frac{29\pi}{16} + i \sin \frac{29\pi}{16}$

เวกเตอร์ที่แสดงรากที่ 8 ของ i มีขนาด 1 หน่วย และเวกเตอร์แต่ละคู่ที่อยู่ในลำดับติดกัน

ทำมุมขนาด $\frac{\pi}{4}$ หรือ 45° เท่ากันทุกคู่ ซึ่งเขียนแสดงได้ดังนี้



3. ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่สี่ของ $2 + 2\sqrt{3}i$

จะได้ $z^4 = 2 + 2\sqrt{3}i$

เนื่องจาก $2 + 2\sqrt{3}i = 4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ $r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

ดังนั้น $r^4 = 4$ และ $4\theta - \frac{\pi}{3} = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

จึงได้ว่า $r = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ และ $\theta = \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right)\right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}\right)$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12}\right)$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right)$

4. ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่ห้าของ $2 - 2\sqrt{3}i$
จะได้ $z^5 = 2 - 2\sqrt{3}i$

เนื่องจาก $2 - 2\sqrt{3}i = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ $r^5 (\cos 5\theta + i \sin 5\theta) = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$

ดังนั้น $r^5 = 4$ และ $5\theta - \frac{5\pi}{3} = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

จึงได้ว่า $r = \sqrt[5]{4}$ และ $\theta = \frac{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi}{5}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $z = \sqrt[5]{4} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{5} \right) \right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \sqrt[5]{4} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \sqrt[5]{4} \left(\cos \frac{11\pi}{15} + i \sin \frac{11\pi}{15} \right)$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \sqrt[5]{4} \left(\cos \frac{17\pi}{15} + i \sin \frac{17\pi}{15} \right)$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \sqrt[5]{4} \left(\cos \frac{23\pi}{15} + i \sin \frac{23\pi}{15} \right)$

เมื่อ $k = 4$ จะได้ $z_5 = \sqrt[5]{4} \left(\cos \frac{29\pi}{15} + i \sin \frac{29\pi}{15} \right)$

5. 1) จาก $z^4 = 1 + \sqrt{3}i$

ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ สอดคล้องกับสมการข้างต้น

เนื่องจาก $1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ $r^4 (\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

ดังนั้น $r^4 = 2$ และ $4\theta - \frac{\pi}{3} = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{จึงได้ว่า } r = \sqrt[4]{2} \quad \text{และ} \quad \theta = \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ดังนั้น } z = \sqrt[4]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right) \right) \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{เมื่อ } k = 0 \quad \text{จะได้ } z_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\text{เมื่อ } k = 1 \quad \text{จะได้ } z_2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$\text{เมื่อ } k = 2 \quad \text{จะได้ } z_3 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right)$$

$$\text{เมื่อ } k = 3 \quad \text{จะได้ } z_4 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right)$$

2) จาก $z^5 + i = 0$ จะได้ $z^5 = -i$

ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ สอดคล้องกับสมการข้างต้น

$$\text{เนื่องจาก } -i = 1 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\text{จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ } r^5 (\cos 5\theta + i \sin 5\theta) = 1 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\text{ดังนั้น } r^5 = 1 \quad \text{และ} \quad 5\theta - \frac{3\pi}{2} = 2k\pi \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{จึงได้ว่า } r = 1 \quad \text{และ} \quad \theta = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{5} \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ดังนั้น } z = 1 \left(\cos \left(\frac{3\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \right) \right) \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{เมื่อ } k = 0 \quad \text{จะได้ } z_1 = \cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10}$$

$$\text{เมื่อ } k = 1 \quad \text{จะได้ } z_2 = \cos \frac{7\pi}{10} + i \sin \frac{7\pi}{10}$$

$$\text{เมื่อ } k = 2 \quad \text{จะได้ } z_3 = \cos \frac{11\pi}{10} + i \sin \frac{11\pi}{10}$$

$$\text{เมื่อ } k = 3 \quad \text{จะได้ } z_4 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

$$\text{เมื่อ } k = 4 \quad \text{จะได้ } z_5 = \cos \frac{19\pi}{10} + i \sin \frac{19\pi}{10}$$

3) จาก $z^7 - 1 = 0$ จะได้ $z^7 = 1$

ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ สอดคล้องกับสมการข้างต้น

เนื่องจาก $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ $r^7 (\cos 7\theta + i \sin 7\theta) = 1(\cos 0 + i \sin 0)$

ดังนั้น $r^7 = 1$ และ $7\theta - 0 = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

จึงได้ว่า $r = 1$ และ $\theta = \frac{2k\pi}{7}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $z = 1 \left(\cos \frac{2k\pi}{7} + i \sin \frac{2k\pi}{7} \right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \cos \frac{4\pi}{7} + i \sin \frac{4\pi}{7}$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7}$

เมื่อ $k = 4$ จะได้ $z_5 = \cos \frac{8\pi}{7} + i \sin \frac{8\pi}{7}$

เมื่อ $k = 5$ จะได้ $z_6 = \cos \frac{10\pi}{7} + i \sin \frac{10\pi}{7}$

เมื่อ $k = 6$ จะได้ $z_7 = \cos \frac{12\pi}{7} + i \sin \frac{12\pi}{7}$

4) จาก $z^8 + 4 + 4i = 0$ จะได้ $z^8 = -4 - 4i$

ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ สอดคล้องกับสมการ

เนื่องจาก $-4 - 4i = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ $r^8 (\cos 8\theta + i \sin 8\theta) = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$

ดังนั้น $r^8 = 4\sqrt{2}$ และ $8\theta - \frac{5\pi}{4} = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

จึงได้ว่า $r = \sqrt[8]{32}$ และ $\theta = \frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{8}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{ดังนั้น } z = \sqrt[16]{32} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{32} + \frac{k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{32} + \frac{k\pi}{4} \right) \right) \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{เมื่อ } k = 0 \quad \text{จะได้ } z_1 = \sqrt[16]{32} \left(\cos \frac{5\pi}{32} + i \sin \frac{5\pi}{32} \right)$$

$$\text{เมื่อ } k = 1 \quad \text{จะได้ } z_2 = \sqrt[16]{32} \left(\cos \frac{13\pi}{32} + i \sin \frac{13\pi}{32} \right)$$

$$\text{เมื่อ } k = 2 \quad \text{จะได้ } z_3 = \sqrt[16]{32} \left(\cos \frac{21\pi}{32} + i \sin \frac{21\pi}{32} \right)$$

$$\text{เมื่อ } k = 3 \quad \text{จะได้ } z_4 = \sqrt[16]{32} \left(\cos \frac{29\pi}{32} + i \sin \frac{29\pi}{32} \right)$$

$$\text{เมื่อ } k = 4 \quad \text{จะได้ } z_5 = \sqrt[16]{32} \left(\cos \frac{37\pi}{32} + i \sin \frac{37\pi}{32} \right)$$

$$\text{เมื่อ } k = 5 \quad \text{จะได้ } z_6 = \sqrt[16]{32} \left(\cos \frac{45\pi}{32} + i \sin \frac{45\pi}{32} \right)$$

$$\text{เมื่อ } k = 6 \quad \text{จะได้ } z_7 = \sqrt[16]{32} \left(\cos \frac{53\pi}{32} + i \sin \frac{53\pi}{32} \right)$$

$$\text{เมื่อ } k = 7 \quad \text{จะได้ } z_8 = \sqrt[16]{32} \left(\cos \frac{61\pi}{32} + i \sin \frac{61\pi}{32} \right)$$

แบบฝึกหัด 1.7

1. 1) ให้ $p(x) = 2x^3 + 2x^2 + x + 1$

เนื่องจากจำนวนเต็มหาร 1 ลงตัว คือ ± 1

และจำนวนเต็มหาร 2 ลงตัว คือ $\pm 1, \pm 2$

ดังนั้น จำนวนตรรกยะ $\frac{k}{m}$ ที่ทำให้ $p\left(\frac{k}{m}\right) = 0$ จะอยู่ในกลุ่มของจำนวนต่อไปนี้ $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$

$$\text{พิจารณา } p(-1) = 2(-1)^3 + 2(-1)^2 + (-1) + 1 = -2 + 2 - 1 + 1 = 0$$

แสดงว่า $x+1$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

$$\text{ดังนั้น } 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x+1)(2x^2 + 1)$$

$$\text{นั่นคือ } (x+1)(2x^2 + 1) = 0$$

$$\text{จะได้ } x = -1 \text{ หรือ } 2x^2 + 1 = 0$$

ถ้า $2x^2 + 1 = 0$ แล้ว $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\left\{-1, \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$

2) ให้ $p(x) = 2x^3 - x + 1$

เนื่องจากจำนวนเต็มหาร 1 ลงตัว คือ ± 1

และจำนวนเต็มหาร 2 ลงตัว คือ $\pm 1, \pm 2$

ดังนั้น จำนวนตรรกยะ $\frac{k}{m}$ ที่ทำให้ $p\left(\frac{k}{m}\right) = 0$ จะอยู่ในกลุ่มของจำนวนต่อไปนี้ $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$

พิจารณา $p(-1) = 2(-1)^3 - (-1) + 1 = -2 + 1 + 1 = 0$

แสดงว่า $x+1$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

ดังนั้น $2x^3 - x + 1 = (x+1)(2x^2 - 2x + 1)$

นั่นคือ $(x+1)(2x^2 - 2x + 1) = 0$

จะได้ $x = -1$ หรือ $2x^2 - 2x + 1 = 0$

ถ้า $2x^2 - 2x + 1 = 0$ แล้ว $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 4(2)(1)}}{2(2)}i = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\left\{-1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$

3) จาก $x^4 - 6x^2 - 40 = 0$

จะได้ว่า $(x^2 + 4)(x^2 - 10) = 0$

จะได้ $x^2 + 4 = 0$ หรือ $x^2 - 10 = 0$

ถ้า $x^2 + 4 = 0$ แล้ว $x = \pm 2i$

ถ้า $x^2 - 10 = 0$ แล้ว $x = \pm \sqrt{10}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{\sqrt{10}, -\sqrt{10}, 2i, -2i\}$

4) ให้ $p(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18$

เนื่องจากจำนวนเต็มหาร -18 ลงตัว คือ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$

พิจารณา $p(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 + 7(-1)^2 - 9(-1) - 18$
 $= 1 + 1 + 7 + 9 - 18$
 $= 0$

$$\begin{aligned}\text{และ } p(2) &= (2)^4 - (2)^3 + 7(2)^2 - 9(2) - 18 \\ &= 16 - 8 + 28 - 18 - 18 \\ &= 0\end{aligned}$$

แสดงว่า $x+1$ และ $x-2$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

$$\text{ดังนั้น } x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18 = (x+1)(x-2)(x^2 + 9)$$

$$\text{นั่นคือ } (x+1)(x-2)(x^2 + 9) = 0$$

$$\text{จะได้ } x = -1 \text{ หรือ } x = 2 \text{ หรือ } x^2 + 9 = 0$$

$$\text{ถ้า } x^2 + 9 = 0 \text{ แล้ว } x = \pm 3i$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{-1, 2, 3i, -3i\}$

$$5) \text{ ให้ } p(x) = x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 22x + 12$$

เนื่องจากจำนวนเต็มทีหาร 12 ลงตัว คือ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

$$\begin{aligned}\text{พิจารณา } p(1) &= (1)^4 - 6(1)^3 + 15(1)^2 - 22(1) + 12 \\ &= 1 - 6 + 15 - 22 + 12 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } p(3) &= (3)^4 - 6(3)^3 + 15(3)^2 - 22(3) + 12 \\ &= 81 - 162 + 135 - 66 + 12 \\ &= 0\end{aligned}$$

แสดงว่า $x-1$ และ $x-3$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

$$\text{ดังนั้น } x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 22x + 12 = (x-1)(x-3)(x^2 - 2x + 4)$$

$$\text{นั่นคือ } (x-1)(x-3)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$\text{จะได้ } x = 1 \text{ หรือ } x = 3 \text{ หรือ } x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\text{ถ้า } x^2 - 2x + 4 = 0 \text{ แล้ว } x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 4(1)(4)}}{2(1)} = 1 \pm \sqrt{3}i$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{1, 3, 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i\}$

$$6) \text{ ให้ } p(x) = x^5 + 8x^4 + 24x^3 + 26x^2 - 17x - 42$$

เนื่องจากจำนวนเต็มทีหาร -42 ลงตัว คือ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 42$

$$\begin{aligned}\text{พิจารณา } p(1) &= (1)^5 + 8(1)^4 + 24(1)^3 + 26(1)^2 - 17(1) - 42 \\ &= 1 + 8 + 24 + 26 - 17 - 42 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(-2) &= (-2)^5 + 8(-2)^4 + 24(-2)^3 + 26(-2)^2 - 17(-2) - 42 \\ &= -32 + 128 - 192 + 104 + 34 - 42 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } p(-3) &= (-3)^5 + 8(-3)^4 + 24(-3)^3 + 26(-3)^2 - 17(-3) - 42 \\ &= -243 + 648 - 648 + 234 + 51 - 42 \\ &= 0 \end{aligned}$$

แสดงว่า $x-1, x+2$ และ $x+3$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

$$\text{ดังนั้น } x^5 + 8x^4 + 24x^3 + 26x^2 - 17x - 42 = (x-1)(x+2)(x+3)(x^2 + 4x + 7)$$

$$\text{นั่นคือ } (x-1)(x+2)(x+3)(x^2 + 4x + 7) = 0$$

$$\text{จะได้ } x=1 \text{ หรือ } x=-2 \text{ หรือ } x=-3 \text{ หรือ } x^2 + 4x + 7 = 0$$

$$\text{ถ้า } x^2 + 4x + 7 = 0 \text{ แล้ว } x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(7)}}{2(1)} = -2 \pm \sqrt{3}i$$

$$\text{ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ } \{1, -2, -3, -2 + \sqrt{3}i, -2 - \sqrt{3}i\}$$

2. ให้ $p(x) = x^5 + 9x^3 - 8x^2 - 72$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } p(-1 + \sqrt{3}i) &= (-1 + \sqrt{3}i)^5 + 9(-1 + \sqrt{3}i)^3 - 8(-1 + \sqrt{3}i)^2 - 72 \\ &= -16 - 16\sqrt{3}i + 72 + 16 + 16\sqrt{3}i - 72 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } -1 + \sqrt{3}i \text{ เป็นคำตอบของสมการ } p(x) = 0$$

จากทฤษฎีบท 13 จะได้ว่า $-1 - \sqrt{3}i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย

$$\text{เนื่องจาก } (x - (-1 + \sqrt{3}i))(x - (-1 - \sqrt{3}i)) = x^2 + 2x + 4$$

$$\text{และเมื่อนำ } x^2 + 2x + 4 \text{ ไปหาร } p(x) \text{ ได้ผลหารเป็น } x^3 - 2x^2 + 9x - 18$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } x^5 + 9x^3 - 8x^2 - 72 &= (x^2 + 2x + 4)(x^3 - 2x^2 + 9x - 18) \\ &= (x^2 + 2x + 4)(x^2(x-2) + 9(x-2)) \\ &= (x^2 + 2x + 4)(x-2)(x^2 + 9) \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } (x^2 + 2x + 4)(x-2)(x^2 + 9) = 0$$

$$\text{จะได้ } x=2 \text{ หรือ } x^2 + 2x + 4 = 0 \text{ หรือ } x^2 + 9 = 0$$

$$\text{ถ้า } x^2 + 9 = 0 \text{ แล้ว } x = \pm 3i$$

$$\text{ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ } \{2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i, 3i, -3i\}$$

3. เนื่องจาก $2-2\sqrt{3}i$ และ $-4i$ เป็นคำตอบของสมการ และจากทฤษฎีบท 13

จะได้ว่า $2+2\sqrt{3}i$ และ $4i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย ตามลำดับ

$$\text{จะได้ } (x-(2-2\sqrt{3}i))(x-(2+2\sqrt{3}i))(x-4i)(x+4i) = 0$$

$$(x^2-4x+16)(x^2+16) = 0$$

$$x^4-4x^3+32x^2-64x+256 = 0$$

ดังนั้น $x^4-4x^3+32x^2-64x+256=0$ เป็นสมการพหุนามดีกรี 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็น

จำนวนเต็ม มี $2-2\sqrt{3}i$ และ $-4i$ เป็นคำตอบ และมี 1 เป็นสัมประสิทธิ์นำ

4. ให้ $p(x)=x^2-x+(i+1)$

$$\text{จะได้ } p(i) = (i)^2 - i + (i+1)$$

$$= -1 - i + (i+1)$$

$$= 0$$

ดังนั้น i เป็นคำตอบของสมการ $p(x)=0$

$$\text{พิจารณา } p(-i) = (-i)^2 - (-i) + (i+1)$$

$$= -1 + i + (i+1)$$

$$= 2i$$

นั่นคือ $-i$ ไม่ใช่คำตอบของสมการ $p(x)=0$

ดังนั้น i เป็นคำตอบ แต่ $-i$ ไม่ใช่คำตอบ ผลที่ได้นี้ ไม่ขัดแย้งกับทฤษฎีบท 13 เนื่องจาก

สมการพหุนาม $x^2-x+(i+1)=0$ มีสัมประสิทธิ์บางจำนวนไม่ใช่จำนวนจริง

5. 1) เนื่องจาก i เป็นคำตอบของสมการ และจากทฤษฎีบท 13 จะได้ว่า $-i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย

$$\text{จะได้ } (x+3)(x-2)(x-i)(x+i) = 0$$

$$(x^2+x-6)(x^2+1) = 0$$

$$x^4+x^3-5x^2+x-6 = 0$$

ดังนั้น $x^4+x^3-5x^2+x-6=0$ เป็นสมการพหุนามดีกรีต่ำสุดที่มีสัมประสิทธิ์เป็น

จำนวนเต็ม ซึ่งมี $-3, 2$ และ i เป็นคำตอบ และมี 1 เป็นสัมประสิทธิ์นำ

- 2) เนื่องจาก $2i$ เป็นคำตอบของสมการ และจากทฤษฎีบท 13 จะได้ว่า $-2i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad & (x-2i)^2(x+2i)^2(x-5)^3 = 0 \\ & (x^4+8x^2+16)(x^3-15x^2+75x-125) = 0 \end{aligned}$$

$x^7-15x^6+83x^5-245x^4+616x^3-1240x^2+1200x-2000 = 0$
 ดังนั้น $x^7-15x^6+83x^5-245x^4+616x^3-1240x^2+1200x-2000=0$ เป็นสมการพหุนามดีกรีต่ำสุดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม มี $2i$ และ 5 เป็นคำตอบซ้ำ 2 คำตอบ และ 3 คำตอบ ตามลำดับ และมี 1 เป็นสัมประสิทธิ์นำ

6. ให้ $p(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 28x + 52$

$$\text{เนื่องจาก } (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\text{และ } x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 28x + 52 = (x^2 + 4x + 4)(x^2 - 6x + 13)$$

$$\text{จะได้ว่า } x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 28x + 52 = (x+2)^2(x^2 - 6x + 13)$$

นั่นคือ -2 เป็นคำตอบซ้ำ 2 คำตอบของสมการพหุนาม $p(x) = 0$

$$\text{และจะได้ } (x+2)^2(x^2 - 6x + 13) = 0$$

$$\text{นั่นคือ } x = -2 \text{ หรือ } x^2 - 6x + 13 = 0$$

$$\text{ถ้า } x^2 - 6x + 13 = 0 \text{ แล้ว } x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36 - 4(1)(13)}}{2(1)} = 3 \pm 2i$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{-2, 3+2i, 3-2i\}$

7. เนื่องจาก $1+i$ เป็นคำตอบของสมการ และจากทฤษฎีบท 13 จะได้ว่า $1-i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย

$$\text{เนื่องจาก } (x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2 - 2x + 2$$

และเมื่อนำ $x^2 - 2x + 2$ ไปหาร $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 22x + 12$ ได้ผลหารเป็น $x^2 - 5x + 6$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 22x + 12 &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 5x + 6) \\ &= (x^2 - 2x + 2)(x-3)(x-2) \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } (x^2 - 2x + 2)(x-3)(x-2) = 0$$

$$\text{จะได้ } x = 3 \text{ หรือ } x = 2$$

ดังนั้น เซตคำตอบทั้งหมดของสมการพหุนามนี้ คือ $\{2, 3, 1+i, 1-i\}$

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. 1) $2(1+5i)+3(-3-2i) = 2+10i-9-6i$
 $= -7+4i$
- 2) $i(2-4i)+i^2(-3+i) = (2i+4)+(-1)(-3+i)$
 $= 2i+4+3-i$
 $= 7+i$
- 3) $4(2-5i)-i(1-i) = 8-20i-i+i^2$
 $= 8-20i-i-1$
 $= 7-21i$
- 4) $\frac{i}{2}(4-3i)-\frac{3}{2}(2-i) = 2i+\frac{3}{2}-3+\frac{3}{2}i$
 $= -\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$
- 5) $(\sqrt{3}-\sqrt{5}i)(\sqrt{3}+\sqrt{5}i)(-1-i) = (3+5)(-1-i)$
 $= -8-8i$
- 6) $\frac{5}{3-2i} = \left(\frac{5}{3-2i}\right)\left(\frac{3+2i}{3+2i}\right)$
 $= \frac{5(3+2i)}{13}$
 $= \frac{15}{13}+\frac{10}{13}i$
- 7) $\frac{4-3i}{2+3i} = \left(\frac{4-3i}{2+3i}\right)\left(\frac{2-3i}{2-3i}\right)$
 $= \frac{(4-3i)(2-3i)}{13}$
 $= \frac{8-12i-6i-9}{13}$
 $= -\frac{1}{13}-\frac{18}{13}i$
- 8) $\frac{(3-2i)(2i)}{-2+3i} = \frac{4+6i}{-2+3i}$
 $= \left(\frac{4+6i}{-2+3i}\right)\left(\frac{-2-3i}{-2-3i}\right)$
 $= \frac{(4+6i)(-2-3i)}{13}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-8-12i-12i+18}{13} \\
 &= \frac{10}{13} - \frac{24}{13}i \\
 9) \quad -5i(2-3i) - \frac{5i}{4-3i} &= -10i-15 - \left(\frac{5i}{4-3i}\right)\left(\frac{4+3i}{4+3i}\right) \\
 &= -10i-15 - \frac{5i(4+3i)}{25} \\
 &= -10i-15 - \frac{4}{5}i + \frac{3}{5} \\
 &= -\frac{72}{5} - \frac{54}{5}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \text{ เนื่องจาก } \frac{1}{1-i} &= \left(\frac{1}{1-i}\right)\left(\frac{1+i}{1+i}\right) = \frac{1+i}{2} \\
 \frac{1}{(1-i)^2} &= \left(\frac{1}{1-i}\right)\left(\frac{1}{1-i}\right) \\
 &= \frac{1}{-2i} \\
 &= \left(\frac{1}{-2i}\right)\left(\frac{2i}{2i}\right) \\
 &= \frac{2i}{4} \\
 &= \frac{i}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{และ } \frac{1}{(1-i)^3} &= \frac{1}{(1-i)^2} \cdot \frac{1}{1-i} \\
 &= \frac{i}{2} \left(\frac{1+i}{2}\right) \\
 &= \frac{-1+i}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } \frac{1}{1-i} + 5 - \frac{1}{(1-i)^2} + \frac{1}{(1-i)^3} &= \frac{1+i}{2} + 5 - \frac{i}{2} + \frac{-1+i}{4} \\
 &= \frac{21}{4} + \frac{1}{4}i
 \end{aligned}$$

2. วิธีที่ 1 พิจารณา

$$\begin{aligned}(x + yi)^2 &= x^2 + 2xyi + y^2i^2 \\ &= x^2 - y^2 + 2xyi\end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned}(x + yi)^4 &= \left((x + yi)^2\right)^2 \\ &= (x^2 - y^2 + 2xyi)^2 \\ &= (x^2 - y^2)^2 + 2(x^2 - y^2)(2xyi) - 4x^2y^2 \\ &= (x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2 + 4xy(x^2 - y^2)i\end{aligned}$$

จาก

$$(x + yi)^4 = a + bi$$

จะได้

$$(x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2 + 4xy(x^2 - y^2)i = a + bi$$

นั่นคือ

$$a = (x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$$

และ

$$b = 4xy(x^2 - y^2)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= (x^4 - 6x^2y^2 + y^4)^2 + (4xy(x^2 - y^2))^2 \\ &= (x^8 + 36x^4y^4 + y^8 - 12x^6y^2 - 12x^2y^6 + 2x^4y^4) \\ &\quad + (16x^6y^2 - 32x^4y^4 + 16x^2y^6) \\ &= x^8 + 4x^6y^2 + 6x^4y^4 + 4x^2y^6 + y^8 \\ &= (x^2)^4 + 4(x^2)^3y^2 + 6(x^2)^2(y^2)^2 + 4x^2(y^2)^3 + (y^2)^4 \\ &= (x^2 + y^2)^4\end{aligned}$$

วิธีที่ 2 จาก

$$a + bi = (x + yi)^4$$

จะได้ว่า

$$|a + bi| = |(x + yi)^4| = |x + yi|^4$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + b^2} &= (\sqrt{x^2 + y^2})^4 \\ a^2 + b^2 &= (x^2 + y^2)^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3. \quad 1) \quad \frac{i^7 + 2i^2}{i^3} &= i^4 + \frac{2}{i} \\ &= 1 + \left(\frac{2}{i}\right)\left(\frac{-i}{-i}\right) \\ &= 1 - 2i\end{aligned}$$

2) พิจารณา $i^{-1} = \frac{1}{i} = \left(\frac{1}{i}\right)\left(\frac{-i}{-i}\right) = -i$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{(-1)} = -1$$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \left(\frac{1}{i^2}\right)\left(\frac{1}{i}\right) = (-1)(-i) = i$$

$$i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1$$

สังเกตว่า $i^{-1} = i^{-5} = i^{-9} = i^{-13}$, $i^{-2} = i^{-6} = i^{-10} = i^{-14}$, $i^{-3} = i^{-7} = i^{-11} = i^{-15}$

และ $i^{-4} = i^{-8} = i^{-12} = i^{-16}$

และ $i^{-1} + i^{-2} + i^{-3} + i^{-4} = (-i) + (-1) + i + 1 = 0$

นั่นคือ $i^{-1} + i^{-2} + \dots + i^{-16} = 0$

ดังนั้น $1 + i^{-1} + i^{-2} + \dots + i^{-16} = 1 + 0 = 1$

$$\begin{aligned} 3) \quad \frac{(2+i)(3+2i)}{1+i} &= \frac{4+7i}{1+i} \\ &= \left(\frac{4+7i}{1+i}\right)\left(\frac{1-i}{1-i}\right) \\ &= \frac{11}{2} + \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad (2+i)^2 + (2-i)^2 &= (3+4i) + (3-4i) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad \frac{3+4i}{3-4i} - \frac{3-4i}{3+4i} &= \left(\frac{3+4i}{3-4i}\right)\left(\frac{3+4i}{3+4i}\right) - \left(\frac{3-4i}{3+4i}\right)\left(\frac{3-4i}{3-4i}\right) \\ &= \frac{(-7+24i) - (-7-24i)}{25} \\ &= \frac{48}{25}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad i(\sqrt{3}+i)^{-1} + (\overline{3+2i}) &= \frac{i}{\sqrt{3}+i} + (3-2i) \\
 &= \left(\frac{i}{\sqrt{3}+i} \right) \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i} \right) + (3-2i) \\
 &= \frac{1+\sqrt{3}i}{4} + 3-2i \\
 &= \frac{13}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}-8}{4} \right) i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad 1) \quad z_2 \bar{z}_2 &= (3-2i)(3+2i) \\
 &= 13
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \overline{z_2 + z_1} &= \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \\
 &= 3+2i + \frac{1}{2-i} \\
 &= 3+2i + \left(\frac{1}{2-i} \right) \left(\frac{2+i}{2+i} \right) \\
 &= 3+2i + \frac{2+i}{5} \\
 &= \frac{17}{5} + \frac{11}{5}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2-i} \\
 &= \frac{1}{(2-i)(3+2i)} \\
 &= \frac{1}{8+i} \\
 &= \left(\frac{1}{8+i} \right) \left(\frac{8-i}{8-i} \right) \\
 &= \frac{8}{65} - \frac{1}{65}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \bar{z}_1 + \frac{1}{z_2} &= \frac{1}{2-i} + \frac{1}{3-2i} \\
 &= \left(\frac{1}{2-i} \right) \left(\frac{2+i}{2+i} \right) + \left(\frac{1}{3-2i} \right) \left(\frac{3+2i}{3+2i} \right) \\
 &= \frac{2+i}{5} + \frac{3+2i}{13} \\
 &= \frac{41}{65} + \frac{23}{65}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \left(\frac{z_1}{z_2} \right) (1-i) &= \frac{1}{3-2i} (1-i) \\
 &= \frac{1}{(2+i)(3-2i)} (1-i) \\
 &= \frac{1-i}{8-i} \\
 &= \left(\frac{1-i}{8-i} \right) \left(\frac{8+i}{8+i} \right) \\
 &= \frac{9}{65} - \frac{7}{65}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad \frac{\bar{z}_1 - z_2}{z_1} &= \frac{\bar{z}_1}{z_1} - \frac{z_2}{z_1} \\
 &= \frac{1}{\frac{2-i}{1}} - \frac{3-2i}{\frac{1}{2+i}} \\
 &= \frac{2+i}{2-i} - (3-2i)(2+i) \\
 &= \left(\frac{2+i}{2-i} \right) \left(\frac{2+i}{2+i} \right) - (3-2i)(2+i) \\
 &= \frac{3+4i}{5} - (8-i) \\
 &= -\frac{37}{5} + \frac{9}{5}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad \overline{(z_1 + \bar{z}_2)} z_1^{-1} &= \frac{\bar{z}_1 + z_2}{z_1} \\
 &= \frac{1}{\frac{2-i}{1} + \frac{3-2i}{1}} \\
 &= \frac{2+i}{2-i} + (3-2i)(2+i) \\
 &= \left(\frac{2+i}{2-i} \right) \left(\frac{2+i}{2+i} \right) + (3-2i)(2+i) \\
 &= \frac{3+4i}{5} + (8-i) \\
 &= \frac{43}{5} - \frac{1}{5}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad \frac{(\overline{z_1 - 2})(\overline{z_2 - i})}{3i} &= \frac{(\bar{z}_1 - \bar{2})(\bar{z}_2 - \bar{i})}{3i} \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{2-i} - 2 \right) ((3+2i) + i)}{3i} \\
 &= \frac{\left(\left(\frac{1}{2-i} \right) \left(\frac{2+i}{2+i} \right) - 2 \right) (3+3i)}{3i} \\
 &= \frac{\left(\frac{2+i}{5} - 2 \right) (3+3i)}{3i} \\
 &= \frac{\left(-\frac{8}{5} + \frac{1}{5}i \right) (3+3i)}{3i} \\
 &= \frac{-\frac{27}{5} - \frac{21}{5}i}{3i} \\
 &= \frac{\left(-\frac{27}{5} - \frac{21}{5}i \right) (-3i)}{(3i)(-3i)} \\
 &= -\frac{7}{5} + \frac{9}{5}i
 \end{aligned}$$

5. 1) $\overline{iz} = \bar{i} \cdot \bar{z} = -i\bar{z}$

2) ให้ $z = x + yi$ จะได้ $iz = i(x + yi) = -y + xi$

นั่นคือ $\text{Im}(iz) = \text{Im}(y - xi) = x = \text{Re}(x + yi) = \text{Re}(z)$

3) ให้ $z = x + yi$ จะได้ $iz = i(x + yi) = -y + xi$

นั่นคือ $\text{Re}(iz) = \text{Re}(-y + xi) = -y = -\text{Im}(z)$

6. 1) เนื่องจาก $(1+i)a + 2(1-2i)b = (a+2b) + (a-4b)i$

จะได้ $a + 2b = 3$ -----(1)

และ $a - 4b = 0$ -----(2)

(1)-(2) จะได้ $6b = 3$

$$b = \frac{1}{2}$$

แทน b ใน (1) ด้วย $\frac{1}{2}$ จะได้

$$a + 1 = 3$$

$$a = 2$$

ดังนั้น $a = 2$ และ $b = \frac{1}{2}$

2) เนื่องจาก $(1+2i)a + (2-3i)b = (a+2b) + (2a-3b)i$

จะได้ $a + 2b = 10$ -----(1)

และ $2a - 3b = 0$ -----(2)

(1) $\times 2$ จะได้ $2a + 4b = 20$ -----(3)

(3)-(2) จะได้ $7b = 20$

$$b = \frac{20}{7}$$

แทน b ใน (1) ด้วย $\frac{20}{7}$ จะได้

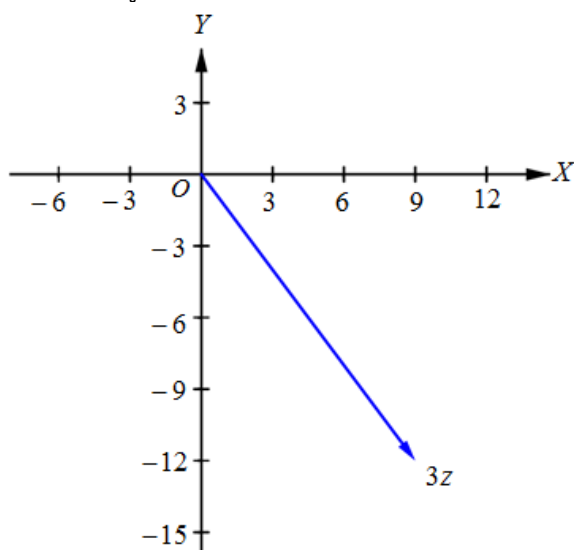
$$a + \frac{40}{7} = 10$$

$$a = \frac{30}{7}$$

ดังนั้น $a = \frac{30}{7}$ และ $b = \frac{20}{7}$

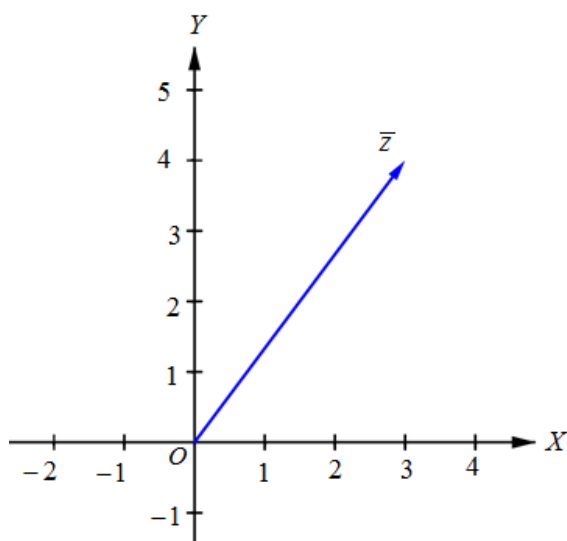
7. 1) $3z = 3(3 - 4i) = 9 - 12i$

เขียนกราฟแสดงได้ดังรูป



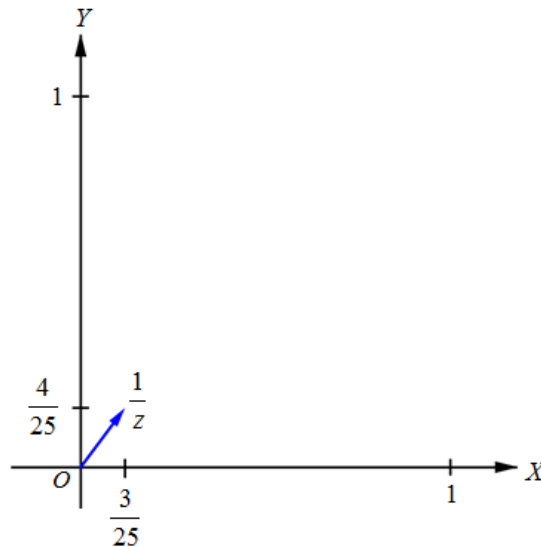
2) $\bar{z} = \overline{3 - 4i} = 3 + 4i$

เขียนกราฟแสดงได้ดังรูป



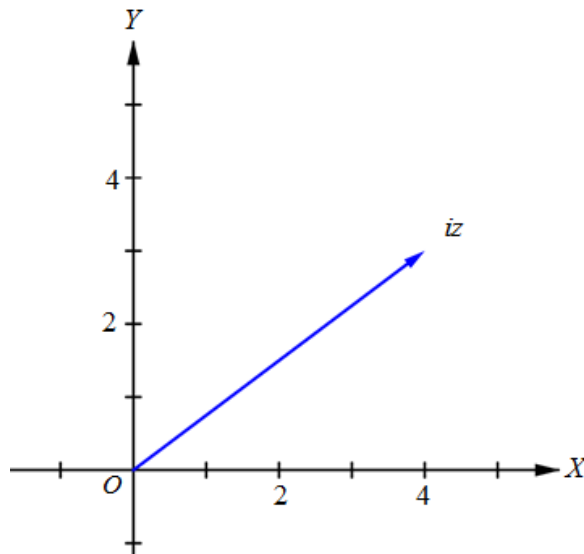
$$3) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{3-4i} = \left(\frac{1}{3-4i} \right) \left(\frac{3+4i}{3+4i} \right) = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

เขียนกราฟแสดงได้ดังรูป



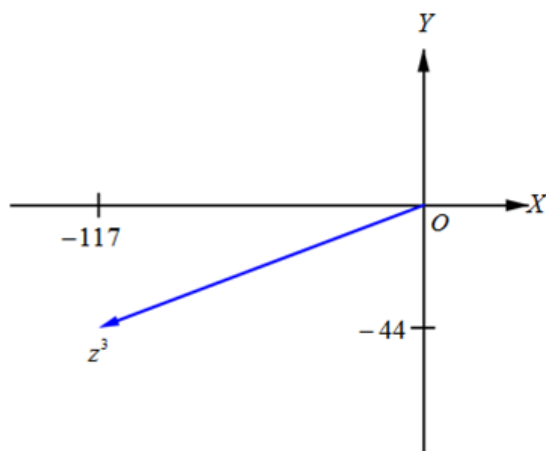
$$4) \quad iz = i(3-4i) = 4 + 3i$$

เขียนกราฟแสดงได้ดังรูป



$$5) \quad z^3 = (3-4i)^3 = (3-4i)^2(3-4i) = (-7-24i)(3-4i) = -117-44i$$

เขียนกราฟแสดงได้ดังรูป



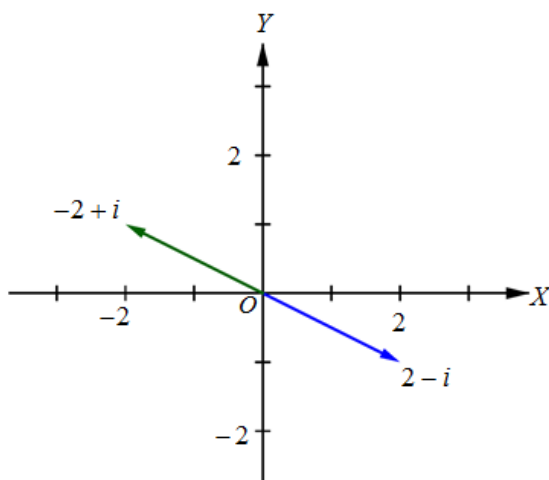
$$6) \quad \text{จาก } a=3, b=-4 \text{ และ } r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

เนื่องจาก $b < 0$ จะได้ รากที่สองของ $3-4i$ คือ

$$\pm \left(\sqrt{\frac{5+3}{2}} - \sqrt{\frac{5-3}{2}}i \right) = \pm \left(\sqrt{\frac{8}{2}} - \sqrt{\frac{2}{2}}i \right) = \pm(2-i)$$

ดังนั้น รากที่สองของ $3-4i$ คือ $2-i$ และ $-2+i$

เขียนกราฟแสดงได้ดังรูป



8. 1) ค่าสัมบูรณ์ของ $2-3i$ คือ $|2-3i| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$

ค่าสัมบูรณ์ของ $3+4i$ คือ $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

ค่าสัมบูรณ์ของ $6+4i$ คือ $|6+4i| = \sqrt{6^2+4^2} = 2\sqrt{13}$

ค่าสัมบูรณ์ของ $15-8i$ คือ $|15-8i| = \sqrt{15^2+(-8)^2} = 17$

ดังนั้น ค่าสัมบูรณ์ของ $\frac{(2-3i)(3+4i)}{(6+4i)(15-8i)}$ คือ $\frac{|(2-3i)(3+4i)|}{|(6+4i)(15-8i)|}$

$$= \frac{|2-3i||3+4i|}{|6+4i||15-8i|}$$

$$= \frac{\sqrt{13} \cdot 5}{2\sqrt{13} \cdot 17}$$

$$= \frac{5}{34}$$

2) ค่าสัมบูรณ์ของ 3 คือ $|3| = \sqrt{3^2+0^2} = 3$

ค่าสัมบูรณ์ของ $1-3i$ คือ $|1-3i| = \sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$

ค่าสัมบูรณ์ของ $1+i$ คือ $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

ดังนั้น ค่าสัมบูรณ์ของ $\frac{3(1-3i)^2}{1+i}$ คือ $\frac{|3||1-3i|^2}{|1+i|} = \frac{3 \cdot (\sqrt{10})^2}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{2}$

9. 1) พิจารณา $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

จะได้ $r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$

เนื่องจาก $\tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ และ $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 1

จะได้ว่า θ ค่าหนึ่งที่ทำให้ $\tan \theta = 1$ คือ $\frac{\pi}{4}$

รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ คือ $2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

พิจารณา $2-2\sqrt{3}i$

ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $2-2\sqrt{3}i$

$$\text{จะได้ } r = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$$

เนื่องจาก $\tan \theta = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$ และ $(2, -2\sqrt{3})$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 4

จะได้ว่า θ ค่าหนึ่งที่ทำให้ $\tan \theta = -\sqrt{3}$ คือ $\frac{5\pi}{3}$

รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $2 - 2\sqrt{3}i$ คือ $4\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } & (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)(\sqrt{2} - 2\sqrt{3}i) \\ &= 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \cdot 4\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right) \\ &= 8\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3}\right)\right] \\ &= 8\left(\cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น รูปเชิงขั้วทั่วไปของ $(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)(\sqrt{2} - 2\sqrt{3}i)$ คือ

$$8\left(\cos\left(\frac{23\pi}{12} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{23\pi}{12} + 2k\pi\right)\right) \text{ เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

2) รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $-2i$ คือ $2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$

พิจารณา $5 + 5i$

ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $5 + 5i$

$$\text{จะได้ } r = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

เนื่องจาก $\tan \theta = \frac{5}{5} = 1$ และ $(5, 5)$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 1

จะได้ว่า θ ค่าหนึ่งที่ทำให้ $\tan \theta = 1$ คือ $\frac{\pi}{4}$

$$\text{รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ } 5 + 5i \text{ คือ } 5\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } \frac{2i}{5+5i} &= \frac{2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)}{5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{5}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{5}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น รูปเชิงขั้วทั่วไปของ $\frac{2i}{5+5i}$ คือ $\frac{\sqrt{2}}{5}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)$

เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

- 3) ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $-3 + \sqrt{3}i$

จะได้ $r = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12}$

เนื่องจาก $\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ และ $(-3, \sqrt{3})$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 2

จะได้ว่า θ ค่าหนึ่งที่ทำให้ $\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ คือ $\frac{5\pi}{6}$

รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $-3 + \sqrt{3}i$ คือ $\sqrt{12}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } (-3 + \sqrt{3}i)^4 &= (\sqrt{12})^4 \left(\cos\frac{20\pi}{6} + i\sin\frac{20\pi}{6}\right) \\
 &= 144 \left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right) \\
 &= 144 \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น รูปเชิงขั้วทั่วไปของ $(-3 + \sqrt{3}i)^4$ คือ $144\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)\right)$

เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

- 4) ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $-1 + \sqrt{3}i$

จะได้ $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

เนื่องจาก $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ และ $(-1, \sqrt{3})$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 2

จะได้ว่า θ ค่าหนึ่งที่ทำให้ $\tan \theta = -\sqrt{3}$ คือ $\frac{2\pi}{3}$

รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $-1 + \sqrt{3}i$ คือ $2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$

จะได้ รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $-1 - \sqrt{3}i$ คือ $2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } & (-1 + \sqrt{3}i)^5 (-1 - \sqrt{3}i)^{-4} \\ &= 2^5 \left(\cos \frac{10\pi}{3} + i \sin \frac{10\pi}{3}\right) \cdot 2^{-4} \left(\cos \frac{8\pi}{3} + i \sin \frac{8\pi}{3}\right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{18\pi}{3} + i \sin \frac{18\pi}{3}\right) \\ &= 2(\cos 6\pi + i \sin 6\pi) \\ &= 2(\cos 0 + i \sin 0) \end{aligned}$$

ดังนั้น รูปเชิงขั้วทั่วไปของ $(-1 + \sqrt{3}i)^5 (-1 - \sqrt{3}i)^{-4}$ คือ $2(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)$

เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

10. 1) ให้ $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $\sqrt{3} - \sqrt{3}i$

$$\text{จะได้ } r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$$

เนื่องจาก $\tan \theta = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -1$ และ $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 4

จะได้ว่า θ ค่าหนึ่งที่ทำให้ $\tan \theta = -1$ คือ $\frac{7\pi}{4}$

รูปเชิงขั้วของ $\sqrt{3} - \sqrt{3}i$ คือ $\sqrt{6} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } (\sqrt{3} - \sqrt{3}i)^8 &= (\sqrt{6})^8 \left(\cos \frac{56\pi}{4} + i \sin \frac{56\pi}{4}\right) \\ &= 6^4 (\cos 14\pi + i \sin 14\pi) \\ &= 6^4 (1 + i(0)) \\ &= 6^4 + 0i \end{aligned}$$

- 2) ให้ $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $-1 + \sqrt{3}i$

$$\text{จะได้ } r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

เนื่องจาก $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ และ $(-1, \sqrt{3})$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 2

จะได้ว่า θ ค่าหนึ่งที่ทำให้ $\tan \theta = -\sqrt{3}$ คือ $\frac{2\pi}{3}$

รูปเชิงขั้วของ $-1 + \sqrt{3}i$ คือ $2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } (-1 + \sqrt{3}i)^{10} &= 2^{10} \left(\cos \frac{20\pi}{3} + i \sin \frac{20\pi}{3} \right) \\ &= 2^{10} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= 2^{10} \left(-\frac{1}{2} + i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \\ &= 2^9 (-1 + \sqrt{3}i) \\ &= -2^9 + 2^9 \sqrt{3}i \end{aligned}$$

- 3) ให้ $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $-1 - i$

$$\text{จะได้ } r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

เนื่องจาก $\tan \theta = \frac{-1}{-1} = 1$ และ $(-1, -1)$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 3

จะได้ว่า θ ค่าหนึ่งที่ทำให้ $\tan \theta = 1$ คือ $\frac{5\pi}{4}$

รูปเชิงขั้วของ $-1 - i$ คือ $\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \frac{1}{(-1-i)^{10}} &= (-1-i)^{-10} \\ &= (\sqrt{2})^{-10} \left(\cos \left(-\frac{50\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{50\pi}{4} \right) \right) \\ &= 2^{-5} \left(\cos \frac{50\pi}{4} - i \sin \frac{50\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{32} \left(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{32} (0 - i(1)) \\
 &= -\frac{1}{32} i
 \end{aligned}$$

4) ให้ $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{i}{3}$

$$\text{จะได้ } r = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

เนื่องจาก $\tan \theta = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ และ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ เป็นจุดในจุดภาคที่ 3

จะได้ว่า θ ค่าหนึ่งที่ทำให้ $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ คือ $\frac{7\pi}{6}$

รูปเชิงขั้วของ $-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{i}{3}$ คือ $\frac{2}{3} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{i}{3}\right)^{100} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{100} \left(\cos \frac{700\pi}{6} + i \sin \frac{700\pi}{6}\right) \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^{100} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^{100} \left(-\frac{1}{2} + i \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^{100} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \\
 &= \frac{2^{99}}{3} + \frac{2^{99}\sqrt{3}}{3} i
 \end{aligned}$$

5) เนื่องจาก รูปเชิงขั้วของ $-1+i$ คือ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad (-1+i)^6 &= (\sqrt{2})^6 \left(\cos\frac{18\pi}{4}+i\sin\frac{18\pi}{4}\right) \\ &= 2^3 \left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

เนื่องจาก รูปเชิงขั้วของ $\sqrt{3}-i$ คือ $2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad (\sqrt{3}-i)^8 &= 2^8 \left(\cos\frac{88\pi}{6}+i\sin\frac{88\pi}{6}\right) \\ &= 2^8 \left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

เนื่องจาก รูปเชิงขั้วของ $1+\sqrt{3}i$ คือ $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$\text{จะได้} \quad (1+\sqrt{3}i)^5 = 2^5 \left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น} \quad &\frac{(-1+i)^6(\sqrt{3}-i)^8}{(1+\sqrt{3}i)^5} \\ &= \frac{2^3 \cdot 2^8}{2^5} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2^6 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= 2^6(0+i(-1)) \\ &= 0-64i\end{aligned}$$

11. 1) เนื่องจาก $|\sqrt{3}+3i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\text{และ} \quad -\sqrt{3}+3i &= 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\right) \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เนื่องจากต้องการหา θ ที่ $6\pi \leq 3\theta \leq 9\pi$ หรือ $2\pi \leq \theta \leq 3\pi$ เท่านั้น

ดังนั้น ค่า k ที่เป็นไปได้ คือ 1 ซึ่งทำให้ได้ว่า $r = 2\sqrt{3}$ และ $\theta = \frac{8\pi}{3}$

2) เนื่องจาก $|-1-i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \text{และ } -1-i &= \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right) \right) \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ดังนั้น $3\theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$ นั่นคือ $\theta = \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เนื่องจากต้องการหา θ ที่ $-2\pi \leq \theta \leq \pi$ เท่านั้น จะได้ ค่า k ที่เป็นไปได้ คือ

$-3, -2, -1$ และ 0

ซึ่งทำให้ได้ว่า $r = \sqrt[3]{2}$ และ $\theta = \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in \{-3, -2, -1, 0\}$

ดังนั้น $r = \sqrt[3]{2}$ และ θ คือ $-\frac{19\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12}, -\frac{3\pi}{12}$ และ $\frac{5\pi}{12}$

3) เนื่องจาก $|\sqrt{3}-i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$

$$\begin{aligned} \text{และ } \sqrt{3}-i &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left(\cos \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right) \right) \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ดังนั้น $4\theta = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$ นั่นคือ $\theta = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เนื่องจากต้องการหา θ ที่ $-4\pi \leq \theta < 0$ เท่านั้น จะได้ ค่า k ที่เป็นไปได้ คือ

$-1, -2, -3, \dots, -8$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $r = \sqrt[4]{2}$ และ $\theta = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$ เมื่อ $k \in \{-1, -2, -3, \dots, -8\}$

12. จาก $z_k = \frac{k}{k+1} \left(\cos \frac{k\pi}{180} + i \sin \frac{k\pi}{180} \right)$

จะได้ $z_1 = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{180} + i \sin \frac{\pi}{180} \right)$

$$z_2 = \frac{2}{3} \left(\cos \frac{2\pi}{180} + i \sin \frac{2\pi}{180} \right)$$

$$z_3 = \frac{3}{4} \left(\cos \frac{3\pi}{180} + i \sin \frac{3\pi}{180} \right)$$

$$\vdots$$

$$z_{180} = \frac{180}{181} \left(\cos \frac{180\pi}{180} + i \sin \frac{180\pi}{180} \right)$$

ดังนั้น $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdots z_{180}$

$$= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{180} + i \sin \frac{\pi}{180} \right) \cdot \frac{2}{3} \left(\cos \frac{2\pi}{180} + i \sin \frac{2\pi}{180} \right) \cdot \frac{3}{4} \left(\cos \frac{3\pi}{180} + i \sin \frac{3\pi}{180} \right)$$

$$\cdots \cdot \frac{180}{181} \left(\cos \frac{180\pi}{180} + i \sin \frac{180\pi}{180} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{180}{181} \left(\cos \left(\frac{\pi}{180} + \frac{2\pi}{180} + \cdots + \frac{180\pi}{180} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{180} + \frac{2\pi}{180} + \cdots + \frac{180\pi}{180} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{181} \left(\cos (1+2+\cdots+180) \frac{\pi}{180} + i \sin (1+2+\cdots+180) \frac{\pi}{180} \right)$$

$$= \frac{1}{181} \left(\cos \frac{16290\pi}{180} + i \sin \frac{16290\pi}{180} \right)$$

$$= \frac{1}{181} \left(\cos \frac{181\pi}{2} + i \sin \frac{181\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{181} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{181} (0 + i(1))$$

$$= \frac{1}{181} i$$

13. จาก $z^5 - \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 0$

จะได้ $z^5 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่ 5 ของ $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

เนื่องจาก $\sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

จากทฤษฎีบทเดอมัวร์ จะได้ $r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ดังนั้น $r^5 = 2$ และ $5\theta - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

นั่นคือ $r = \sqrt[5]{2}$ และ $\theta = \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $z = \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20} + i\sin\frac{\pi}{20}\right)$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{20} + i\sin\frac{9\pi}{20}\right)$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{20} + i\sin\frac{17\pi}{20}\right)$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{20} + i\sin\frac{25\pi}{20}\right)$

เมื่อ $k = 4$ จะได้ $z_5 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{33\pi}{20} + i\sin\frac{33\pi}{20}\right)$

เนื่องจาก $\cos\frac{17\pi}{20}$ และ $\cos\frac{25\pi}{20}$ เป็นจำนวนลบ จึงพิจารณาเฉพาะ $\cos\frac{\pi}{20}, \cos\frac{9\pi}{20}$

และ $\cos\frac{33\pi}{20}$ ซึ่งเป็นจำนวนบวก

เนื่องจากฟังก์ชันโคไซน์เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0, \pi)$ และ $\cos\frac{33\pi}{20} = \cos\frac{7\pi}{20}$

จะได้ $\cos\frac{\pi}{20} > \cos\frac{33\pi}{20} > \cos\frac{9\pi}{20}$

นั่นคือ $\cos\frac{\pi}{20}$ มีค่ามากที่สุด

ดังนั้น $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20} + i\sin\frac{\pi}{20}\right)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ $\text{Re}(z)$ มีค่ามากที่สุด และ

สอดคล้องกับสมการ $z^5 - \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 0$

14. 1) ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่ 3 ของ $-27i$

$$\text{เนื่องจาก } -27i = 27 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\text{จากทฤษฎีบทเดอมัวร์ จะได้ } r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = 27 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\text{ดังนั้น } r^3 = 27 \quad \text{และ} \quad 3\theta - \frac{3\pi}{2} = 2k\pi \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{นั่นคือ } r = 3 \quad \text{และ} \quad \theta = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ดังนั้น } z = 3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right) \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{เมื่อ } k = 0 \quad \text{จะได้} \quad z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 3i$$

$$\text{เมื่อ } k = 1 \quad \text{จะได้} \quad z_2 = 3 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\text{เมื่อ } k = 2 \quad \text{จะได้} \quad z_3 = 3 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

2) ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่ 4 ของ $-2 - 2\sqrt{3}i$

$$\text{เนื่องจาก } -2 - 2\sqrt{3}i = 4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$\text{จากทฤษฎีบทเดอมัวร์ จะได้ } r^4 (\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$\text{ดังนั้น } r^4 = 4 \quad \text{และ} \quad 4\theta - \frac{4\pi}{3} = 2k\pi \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{นั่นคือ } r = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \quad \text{และ} \quad \theta = \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4} \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ดังนั้น } z = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \right) \right) \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{เมื่อ } k = 0 \quad \text{จะได้} \quad z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$\text{เมื่อ } k=1 \quad \text{จะได้} \quad z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$\text{เมื่อ } k=2 \quad \text{จะได้} \quad z_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$\text{เมื่อ } k=3 \quad \text{จะได้} \quad z_4 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

- 3) ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่ 5 ของ 1

$$\text{เนื่องจาก } 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\text{จากทฤษฎีบทเดอมัวร์ จะได้ } r^5(\cos 5\theta + i \sin 5\theta) = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad r^5 = 1 \quad \text{และ} \quad 5\theta - 0 = 0 + 2k\pi \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad r = 1 \quad \text{และ} \quad \theta = \frac{2k\pi}{5} \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad z = 1 \left(\cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5} \right) \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{เมื่อ } k=0 \quad \text{จะได้} \quad z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$\text{เมื่อ } k=1 \quad \text{จะได้} \quad z_2 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$$

$$\text{เมื่อ } k=2 \quad \text{จะได้} \quad z_3 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}$$

$$\text{เมื่อ } k=3 \quad \text{จะได้} \quad z_4 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5}$$

$$\text{เมื่อ } k=4 \quad \text{จะได้} \quad z_5 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}$$

- 4) ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่ 8 ของ $-i$

$$\text{เนื่องจาก } -i = 1 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\text{จากทฤษฎีบทเดอมัวร์ จะได้ } r^8(\cos 8\theta + i \sin 8\theta) = 1 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad r^8 = 1 \quad \text{และ} \quad 8\theta - \frac{3\pi}{2} = 2k\pi \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad r = 1 \quad \text{และ} \quad \theta = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{8} \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ดังนั้น } z = 1 \left(\cos \left(\frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} \right) \right) \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{เมื่อ } k = 0 \quad \text{จะได้} \quad z_1 = \cos \frac{3\pi}{16} + i \sin \frac{3\pi}{16}$$

$$\text{เมื่อ } k = 1 \quad \text{จะได้} \quad z_2 = \cos \frac{7\pi}{16} + i \sin \frac{7\pi}{16}$$

$$\text{เมื่อ } k = 2 \quad \text{จะได้} \quad z_3 = \cos \frac{11\pi}{16} + i \sin \frac{11\pi}{16}$$

$$\text{เมื่อ } k = 3 \quad \text{จะได้} \quad z_4 = \cos \frac{15\pi}{16} + i \sin \frac{15\pi}{16}$$

$$\text{เมื่อ } k = 4 \quad \text{จะได้} \quad z_5 = \cos \frac{19\pi}{16} + i \sin \frac{19\pi}{16}$$

$$\text{เมื่อ } k = 5 \quad \text{จะได้} \quad z_6 = \cos \frac{23\pi}{16} + i \sin \frac{23\pi}{16}$$

$$\text{เมื่อ } k = 6 \quad \text{จะได้} \quad z_7 = \cos \frac{27\pi}{16} + i \sin \frac{27\pi}{16}$$

$$\text{เมื่อ } k = 7 \quad \text{จะได้} \quad z_8 = \cos \frac{31\pi}{16} + i \sin \frac{31\pi}{16}$$

15. 1) ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่ 3 ของ $-8i$

$$\text{จะได้} \quad z^3 = -8i$$

$$\text{เนื่องจาก } -8i = 8 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\text{จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ว่า } r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = 8 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\text{ดังนั้น } r^3 = 8 \quad \text{และ} \quad 3\theta - \frac{3\pi}{2} = 2k\pi \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{นั่นคือ } r = 2 \quad \text{และ} \quad \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

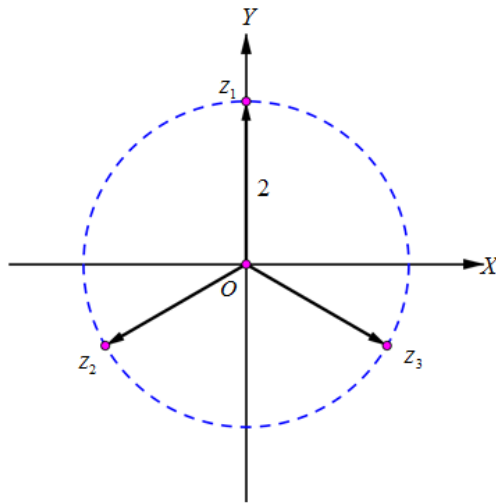
$$\text{ดังนั้น } z = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right) \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{เมื่อ } k = 0 \quad \text{จะได้} \quad z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i$$

$$\text{เมื่อ } k = 1 \quad \text{จะได้} \quad z_2 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} - i$$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$

เวกเตอร์ที่แสดงรากที่ 3 ของ $-8i$ มีขนาด 2 หน่วย และเวกเตอร์แต่ละคู่ที่อยู่ในลำดับที่ติดกัน ทำมุม $\frac{2\pi}{3}$ หรือ 120° เท่ากันทุกคู่ ซึ่งแสดงได้ดังนี้



- 2) ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 3 ของ $-2\sqrt{3} + 2i$
จะได้ $z^3 = -2\sqrt{3} + 2i$

เนื่องจาก $-2\sqrt{3} + 2i = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

ดังนั้น $r^3 = 4$ และ $3\theta - \frac{5\pi}{6} = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

นั่นคือ $r = \sqrt[3]{4}$ และ $\theta = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

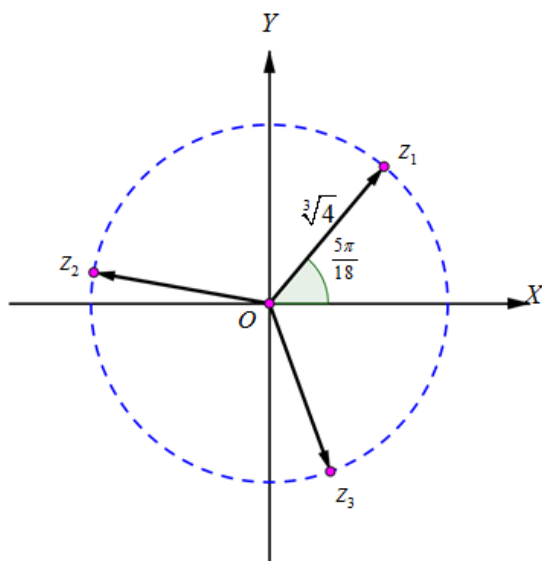
ดังนั้น $z = \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{18} + i\sin\frac{5\pi}{18}\right)$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{17\pi}{18} + i\sin\frac{17\pi}{18}\right)$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{29\pi}{18} + i \sin \frac{29\pi}{18} \right)$

เวกเตอร์ที่แสดงรากที่ 3 ของ $-2\sqrt{3} + 2i$ มีขนาด $\sqrt[3]{4}$ หน่วย และเวกเตอร์แต่ละคู่ที่อยู่ในลำดับที่ติดกัน ทำมุม $\frac{2\pi}{3}$ หรือ 120° เท่ากันทุกคู่ ซึ่งแสดงได้ดังนี้



3) ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่ 4 ของ $2 - 2\sqrt{3}i$

จะได้ $z^4 = 2 - 2\sqrt{3}i$

เนื่องจาก $2 - 2\sqrt{3}i = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ $r^4 (\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$

ดังนั้น $r^4 = 4$ และ $4\theta - \frac{5\pi}{3} = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

นั่นคือ $r = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ และ $\theta = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $z = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right) \right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

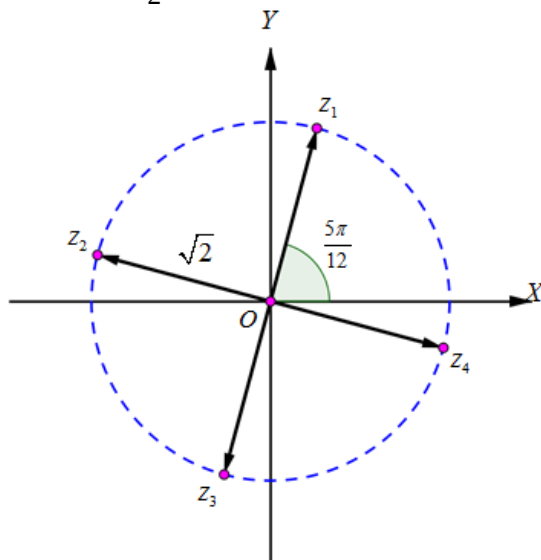
เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right)$

เวกเตอร์ที่แสดงรากที่ 4 ของ $2 - 2\sqrt{3}i$ มีขนาด $\sqrt{2}$ หน่วย และเวกเตอร์แต่ละคู่ที่อยู่
ในลำดับที่ติดกัน ทำมุม $\frac{\pi}{2}$ หรือ 90° เท่ากันทุกคู่ ซึ่งแสดงได้ดังนี้



4) ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่ 2 ของ $27 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$

จะได้ $z^2 = 27 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จะได้ $r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 27 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$

ดังนั้น $r^2 = 27$ และ $2\theta - \frac{5\pi}{3} = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

นั่นคือ $r = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ และ $\theta = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

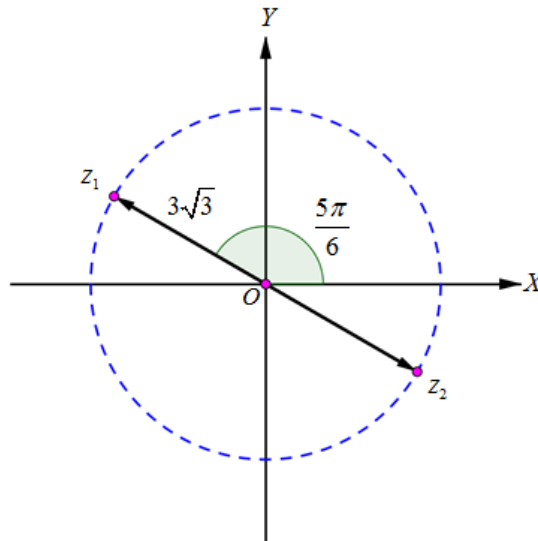
ดังนั้น $z = 3\sqrt{3} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} + k\pi \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} + k\pi \right) \right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = 3\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = 3\sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

เวกเตอร์ที่แสดงรากที่ 2 ของ $27\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ มีขนาด $3\sqrt{3}$ หน่วย และ

เวกเตอร์ทั้งสองทำมุม π หรือ 180° ซึ่งแสดงได้ดังนี้



16. 1) เนื่องจาก $b^2 - 4ac = 2^2 - 4(5)(2) = -36$ ซึ่ง $-36 < 0$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า คำตอบของสมการนี้ คือ } x &= \frac{-b \pm \sqrt{|b^2 - 4ac|}i}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}i}{2(5)} \\ &= \frac{-2 \pm 6i}{10} = \frac{-1 \pm 3i}{5} \end{aligned}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\left\{-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i, -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i\right\}$

2) จาก $(2x-3)^2 + 9 = 0$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad (2x-3)^2 &= -9 \\ 2x-3 &= \pm 3i \\ x &= \frac{3 \pm 3i}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\left\{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i, \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i\right\}$

3) จาก $(x+2)(x^2+4x+5) = 0$

จะได้ $x = -2$ หรือ $x^2 + 4x + 5 = 0$

ถ้า $x^2 + 4x + 5 = 0$ แล้วพบว่า $b^2 - 4ac = 4^2 - 4(1)(5) = -4$ ซึ่ง $-4 < 0$

ดังนั้น $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}i}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(5)}i}{2(1)} = -2 \pm i$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{-2, -2 + i, -2 - i\}$

4) จาก $2x^3 + x^2 + 1 = 0$

จะได้ $(x+1)(2x^2 - x + 1) = 0$

นั่นคือ $x = -1$ หรือ $2x^2 - x + 1 = 0$

ถ้า $2x^2 - x + 1 = 0$ แล้ว $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4(2)(1)}i}{2(2)} = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{4}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\left\{-1, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i, \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i\right\}$

17. 1) เนื่องจาก $-i$ และ $2+3i$ เป็นคำตอบของสมการ และจากทฤษฎีบท 13

จะได้ว่า i และ $2-3i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย ตามลำดับ

จะได้ $(x-2)(x+i)(x-i)(x-(2+3i))(x-(2-3i)) = 0$

$$(x-2)(x^2+1)(x^2-4x+13) = 0$$

$$x^5 - 6x^4 + 22x^3 - 32x^2 + 21x - 26 = 0$$

ดังนั้น $x^5 - 6x^4 + 22x^3 - 32x^2 + 21x - 26 = 0$ เป็นสมการพหุนามดีกรีต่ำสุดที่มี

สัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง มี $2, -i$ และ $2+3i$ เป็นคำตอบ และมี 1 เป็นสัมประสิทธิ์นำ

2) เนื่องจาก $3i$ และ $1-i$ เป็นคำตอบของสมการ และจากทฤษฎีบท 13

จะได้ว่า $-3i$ และ $1+i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย ตามลำดับ

จะได้ $x(x-3i)(x+3i)(x-(1-i))(x-(1+i)) = 0$

$$x(x^2+9)(x^2-2x+2) = 0$$

$$x^5 - 2x^4 + 11x^3 - 18x^2 + 18x = 0$$

ดังนั้น $x^5 - 2x^4 + 11x^3 - 18x^2 + 18x = 0$ เป็นสมการพหุนามดีกรีต่ำสุดที่มี

สัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง มี $0, 3i$ และ $1-i$ เป็นคำตอบ และมี 1 เป็นสัมประสิทธิ์นำ

18. 1) เนื่องจาก $-2+i$ เป็นคำตอบของสมการ และจากทฤษฎีบท 13 จะได้ว่า $-2-i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย

$$\text{จะได้ } (x-6)(x-(-2+i))(x-(-2-i)) = 0$$

$$(x-6)(x^2+4x+5) = 0$$

$$x^3-2x^2-19x-30 = 0$$

ดังนั้น $x^3-2x^2-19x-30=0$ เป็นสมการพหุนามดีกรีต่ำสุดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง มี 6 และ $-2+i$ เป็นคำตอบ และมี 1 เป็นสัมประสิทธิ์นำ

- 2) เนื่องจาก $1+2i$ เป็นคำตอบของสมการ และจากทฤษฎีบท 13 จะได้ว่า $1-2i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย และจาก $1+2i$ เป็นคำตอบซ้ำ 2 คำตอบ ดังนั้น $1-2i$ ก็เป็นคำตอบซ้ำ 2 คำตอบ

$$\text{จะได้ } (x+3)^2(x-(1+2i))^2(x-(1-2i))^2 = 0$$

$$(x+3)^2(x^2-2x+5)^2 = 0$$

$$(x^2+6x+9)(x^4-4x^3+14x^2-20x+25) = 0$$

$$x^6+2x^5-x^4+28x^3+31x^2-30x+225 = 0$$

ดังนั้น $x^6+2x^5-x^4+28x^3+31x^2-30x+225=0$ เป็นสมการพหุนามดีกรีต่ำสุดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง มี -3 และ $1+2i$ เป็นคำตอบซ้ำ 2 คำตอบ ทั้งสองคำตอบ และมี 1 เป็นสัมประสิทธิ์นำ

19. เนื่องจาก $-1+i$ และ $3+\sqrt{3}i$ เป็นคำตอบของสมการ และจากทฤษฎีบท 13

จะได้ว่า $-1-i$ และ $3-\sqrt{3}i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย ตามลำดับ

$$\text{จะได้ } (3x+2)(x-(-1+i))(x-(-1-i))(x-(3+\sqrt{3}i))(x-(3-\sqrt{3}i)) = 0$$

$$(3x+2)(x^2+2x+2)(x^2-6x+12) = 0$$

$$3x^5-10x^4-2x^3+40x^2+96x+48 = 0$$

ดังนั้น $3x^5-10x^4-2x^3+40x^2+96x+48=0$ เป็นสมการพหุนามดีกรี 5 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม มี $-\frac{2}{3}$, $-1+i$ และ $3+\sqrt{3}i$ เป็นคำตอบ และมี 3 เป็นสัมประสิทธิ์นำ

20. เนื่องจาก $1+2i$ เป็นคำตอบของสมการ และจากทฤษฎีบท 13 จะได้ว่า $1-2i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย

นั่นคือ สมการ $z^3+az+b=0$ มีคำตอบ คือ $1+2i$, $1-2i$ และจำนวนจริง c

$$\text{จะได้ } (z-c)(z-(1+2i))(z-(1-2i)) = 0$$

$$(z-c)(z^2-2z+5) = 0$$

$$z^3 + (-c-2)z^2 + (2c+5)z - 5c = 0$$

เนื่องจากสมการพหุนามที่กำหนดให้ มีสัมประสิทธิ์ของพจน์ z^2 เท่ากับ 0

ดังนั้น $-c-2 = 0$

$$c = -2$$

จะได้ สมการพหุนามที่ต้องการคือ $z^3 + z + 10 = 0$

ดังนั้น $a = 1$ และ $b = 10$

21. 1) จาก $x^2 - x - 12 = 0$

จะได้ $(x-4)(x+3) = 0$

นั่นคือ $x = 4$ หรือ $x = -3$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{-3, 4\}$

2) จาก $x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 0$

จะได้ $x^2(x^2 + 4x + 4) = 0$

$$x^2(x+2)^2 = 0$$

นั่นคือ $x = 0$ หรือ $x = -2$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{-2, 0\}$

3) เนื่องจาก $x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0$

จะได้ $(x^6 + x^4) + (x^2 + 1) = 0$

$$x^4(x^2 + 1) + (x^2 + 1) = 0$$

$$(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

นั่นคือ $x^2 + 1 = 0$ หรือ $x^4 + 1 = 0$

ถ้า $x^2 + 1 = 0$ แล้ว $x = \pm i$

ถ้า $x^4 + 1 = 0$ แล้ว $x^4 = -1$ นั่นคือ x เป็นรากที่ 4 ของ -1

ให้ $x = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่ 4 ของ -1

เนื่องจาก $-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$

จากทฤษฎีบทเดอมัวร์ จะได้ $r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$

ดังนั้น $r^4 = 1$ และ $4\theta - \pi = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

นั่นคือ $r = 1$ และ $\theta = \frac{\pi + 2k\pi}{4}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{ดังนั้น } x = 1 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right) \right) \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{เมื่อ } k=0 \quad \text{จะได้ } x_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\text{เมื่อ } k=1 \quad \text{จะได้ } x_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\text{เมื่อ } k=2 \quad \text{จะได้ } x_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\text{เมื่อ } k=3 \quad \text{จะได้ } x_4 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ

$$\left\{ i, -i, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right\}$$

4) ให้ $p(x) = 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$

เนื่องจากจำนวนเต็มหาร 1 ลงตัว คือ ± 1

และจำนวนเต็มหาร 2 ลงตัว คือ $\pm 1, \pm 2$

ดังนั้น จำนวนตรรกยะ $\frac{k}{m}$ ที่ทำให้ $p\left(\frac{k}{m}\right) = 0$ จะอยู่ในกลุ่มของจำนวนต่อไปนี้

$$\text{คือ } \pm 1, \pm \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } p(1) &= 2(1)^4 - 2(1)^3 - (1)^2 + 1 \\ &= 2 - 2 - 1 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

แสดงว่า $x-1$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

$$\text{ดังนั้น } 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 1 = (x-1)(2x^3 - x - 1)$$

$$\text{ให้ } q(x) = 2x^3 - x - 1$$

เนื่องจากจำนวนเต็มหาร -1 ลงตัว คือ ± 1

และจำนวนเต็มหาร 2 ลงตัว คือ $\pm 1, \pm 2$

ดังนั้น จำนวนตรรกยะ $\frac{k}{m}$ ที่ทำให้ $q\left(\frac{k}{m}\right) = 0$ จะอยู่ในกลุ่มของจำนวนต่อไปนี้ คือ $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\text{พิจารณา } q(1) &= 2(1)^3 - 1 - 1 \\ &= 2 - 1 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

แสดงว่า $x-1$ เป็นตัวประกอบของ $q(x)$

$$\text{ดังนั้น } 2x^3 - x - 1 = (x-1)(2x^2 + 2x + 1)$$

$$\text{นั่นคือ } 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 1 = (x-1)^2(2x^2 + 2x + 1)$$

$$\text{ดังนั้น } (x-1)^2(2x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$\text{จะได้ } x=1 \text{ หรือ } 2x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\text{ถ้า } 2x^2 + 2x + 1 = 0 \text{ แล้ว } x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(2)(1)}}{2(2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$$

$$\text{ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ } \left\{ 1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$$

$$5) \text{ ให้ } p(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$$

เนื่องจากจำนวนเต็มหาร -6 ลงตัว คือ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$\begin{aligned}\text{พิจารณา } p(2) &= (2)^4 + (2)^3 - 5(2)^2 + (2) - 6 \\ &= 16 + 8 - 20 + 2 - 6 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } p(-3) &= (-3)^4 + (-3)^3 - 5(-3)^2 + (-3) - 6 \\ &= 81 - 27 - 45 - 3 - 6 \\ &= 0\end{aligned}$$

แสดงว่า $x-2$ และ $x+3$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

$$\text{ดังนั้น } x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)(x^2 + 1)$$

$$\text{นั่นคือ } (x-2)(x+3)(x^2 + 1) = 0$$

$$\text{จะได้ } x=2 \text{ หรือ } x=-3 \text{ หรือ } x^2 + 1 = 0$$

$$\text{ถ้า } x^2 + 1 = 0 \text{ แล้ว } x = \pm i$$

$$\text{ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ } \{-3, 2, i, -i\}$$

$$6) \text{ ให้ } p(x) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 - 19x - 10$$

เนื่องจากจำนวนเต็มหาร -10 ลงตัว คือ $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$

และจำนวนเต็มหาร 2 ลงตัว คือ $\pm 1, \pm 2$

ดังนั้น จำนวนตรรกยะ $\frac{k}{m}$ ที่ทำให้ $p\left(\frac{k}{m}\right) = 0$ จะอยู่ในกลุ่มของจำนวนต่อไปนี้

$$\text{คือ } \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned}\text{พิจารณา } p(2) &= 2(2)^4 + (2)^3 + 2(2)^2 - 19(2) - 10 \\ &= 32 + 8 + 8 - 38 - 10 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } p\left(-\frac{1}{2}\right) &= 2\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 19\left(-\frac{1}{2}\right) - 10 \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{19}{2} - 10 \\ &= 0\end{aligned}$$

แสดงว่า $x-2$ และ $x+\frac{1}{2}$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } p(x) &= (x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2+4x+10) \\ &= (x-2)(2x+1)(x^2+2x+5)\end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } (x-2)(2x+1)(x^2+2x+5) = 0$$

$$\text{จะได้ } x=2 \text{ หรือ } x=-\frac{1}{2} \text{ หรือ } x^2+2x+5=0$$

$$\text{ถ้า } x^2+2x+5=0 \text{ แล้ว } x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(1)(5)}}{2(1)} = -1 \pm 2i$$

$$\text{ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ } \left\{-\frac{1}{2}, 2, -1+2i, -1-2i\right\}$$

22. ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $-1 + \sqrt{3}i$ จะได้ $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

เนื่องจาก $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ และ $(-1, \sqrt{3})$ เป็นจุดในจุดภาคที่ 2

จะได้ว่า θ ค่าหนึ่งที่ทำให้ $\tan \theta = -\sqrt{3}$ คือ $\frac{2\pi}{3}$

รูปเชิงขั้วของ $-1 + \sqrt{3}i$ คือ $2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$

และ รูปเชิงขั้วของ $-1 - \sqrt{3}i$ คือ $2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$$\begin{aligned}
& \text{ดังนั้น } (-1 + \sqrt{3}i)^n + (-1 - \sqrt{3}i)^n \\
&= 2^n \left(\cos \frac{2n\pi}{3} + i \sin \frac{2n\pi}{3} \right) + 2^n \left(\cos \left(-\frac{2n\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2n\pi}{3} \right) \right) \\
&= 2^n \left(\cos \frac{2n\pi}{3} + i \sin \frac{2n\pi}{3} + \cos \left(-\frac{2n\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2n\pi}{3} \right) \right) \\
&= 2^n \left(\cos \frac{2n\pi}{3} + i \sin \frac{2n\pi}{3} + \cos \frac{2n\pi}{3} - i \sin \frac{2n\pi}{3} \right) \\
&= 2^n \left(2 \cos \frac{2n\pi}{3} \right) \\
&= 2^{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $(-1 + \sqrt{3}i)^n + (-1 - \sqrt{3}i)^n$ เป็นจำนวนจริง ทุกจำนวนเต็มบวก n

23. ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z = x + yi$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง
จะได้ $\bar{z} = x - yi$

และพิจารณา $z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x$

เนื่องจาก x เป็นจำนวนจริง จะได้ $2x$ เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น $z + \bar{z}$ เป็นจำนวนจริง

และพิจารณา $z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$

เนื่องจาก x และ y เป็นจำนวนจริง จะได้ $x^2 + y^2$ เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น $z\bar{z}$ เป็นจำนวนจริง

24. จาก $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = k^2$

จะได้ $(z - a)(\overline{z - a}) = k^2$

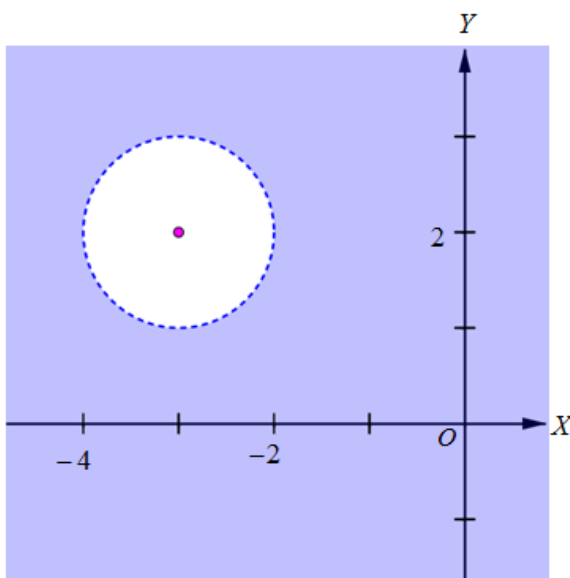
$$|z - a|^2 = k^2$$

$$|z - a| = k$$

เนื่องจาก $|z - a|$ คือ ระยะทางระหว่างจุด a และจุด z

ดังนั้น เซตของจำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมการ $|z - a| = k$ คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่มีระยะห่างจากจุด a เท่ากับ k หน่วย หรือ เซตของจุดในระนาบที่อยู่บนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด a และมีรัศมียาว k หน่วย นั่นเอง

25. 1) เนื่องจาก $|z+3-2i| = |z-(-3+2i)|$ คือระยะทางจากจุด $(-3, 2)$ ถึงจุด z ดังนั้น เซตของจุดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $|z+3-2i| > 1$ คือ เซตของจุดที่อยู่ภายนอกวงกลม (ไม่รวมจุดบนเส้นรอบวง) ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-3, 2)$ และมีรัศมียาว 1 หน่วย
จะได้ กราฟของจุดทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $|z+3-2i| > 1$ แสดงเป็นส่วนแรเงาได้ดังรูป



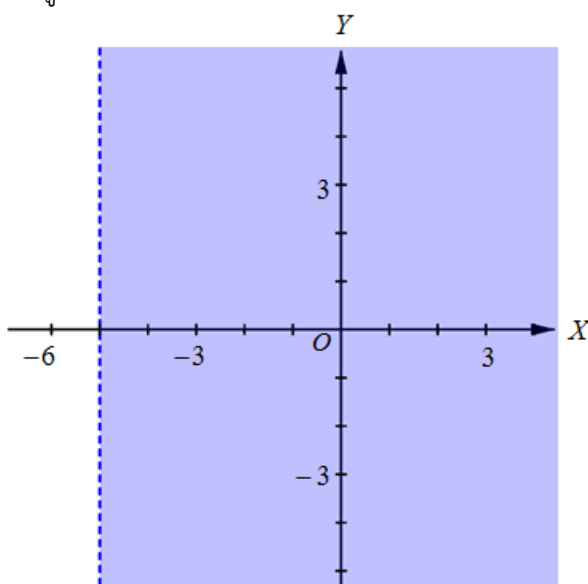
2) ให้ $z = x + yi$

$$\text{จะได้ } z - i = (x + yi) - i = x + (y - 1)i$$

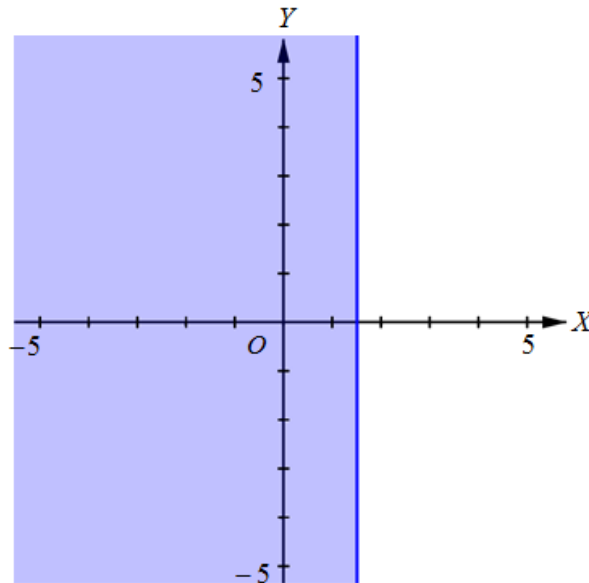
$$\text{นั่นคือ } \operatorname{Re}(z - i) = x = \operatorname{Re}(z)$$

$$\text{จาก } \operatorname{Re}(z - i) > -5 \text{ จะได้ } \operatorname{Re}(z) > -5$$

จะได้ กราฟของจุดทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $\operatorname{Re}(z - i) > -5$ แสดงเป็น
ส่วนแรเงา ดังรูป



- 3) กราฟของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $|z-3| \geq |z|$ คือ กราฟของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนที่มีระยะห่างจากจุด $(3,0)$ มากกว่าระยะห่างจากจุด $(0,0)$ จะได้ กราฟของจุดทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $|z-3| \geq |z|$ แสดงเป็นส่วนแรเงา ดังรูป



4) ให้ $z = x + yi$

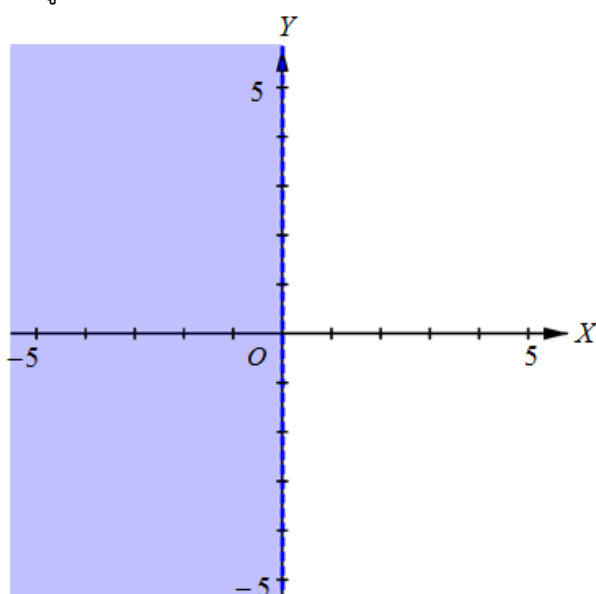
$$\text{จะได้ } z - 2 + i = (x + yi) - 2 + i = (x - 2) + (y + 1)i$$

$$\text{นั่นคือ } \operatorname{Re}(z - 2 + i) = x - 2 = \operatorname{Re}(z) - 2$$

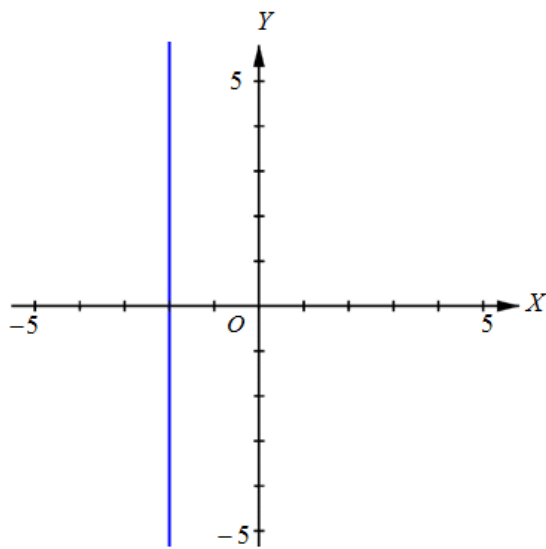
$$\text{จาก } \operatorname{Re}(z - 2 + i) < -2 \text{ จะได้ } \operatorname{Re}(z) - 2 < -2$$

$$\text{ดังนั้น } \operatorname{Re}(z) < 0$$

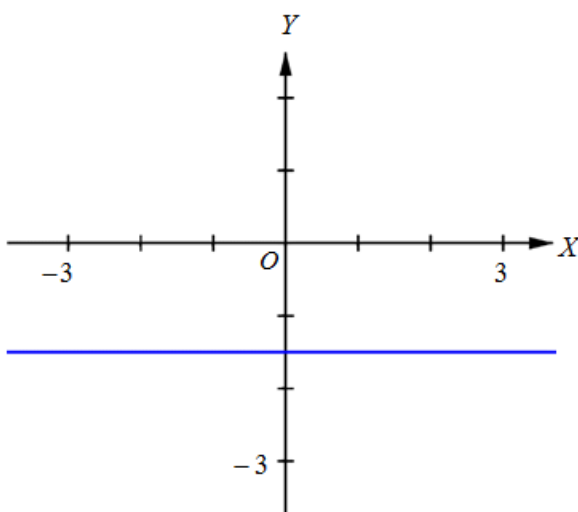
จะได้ กราฟของจุดทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $\operatorname{Re}(z - 2 + i) < -2$ แสดงเป็น
ส่วนแรเงา ดังรูป



- 5) กราฟของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับสมการ $|z+6|=|z-2|$ คือ กราฟของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนที่มีระยะห่างจากจุด $(-6,0)$ เท่ากับระยะห่างจากจุด $(2,0)$ ซึ่งก็คือ เส้นตรง $x=-2$ ดังรูป



- 6) กราฟของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับสมการ $|z-i|=|z+4i|$ คือ กราฟของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนที่มีระยะห่างจากจุด $(0,1)$ เท่ากับระยะห่างจากจุด $(0,-4)$ ซึ่งก็คือ เส้นตรง $y=-\frac{3}{2}$ ดังรูป



7) ให้จำนวนเชิงซ้อน z แทนด้วยจุด (a,b)

จาก $|\overline{z-3i}| = |z-3|$

นั่นคือ $|\overline{a+bi-3i}| = |a+bi-3|$

$$|a-bi+3i| = |a+bi-3|$$

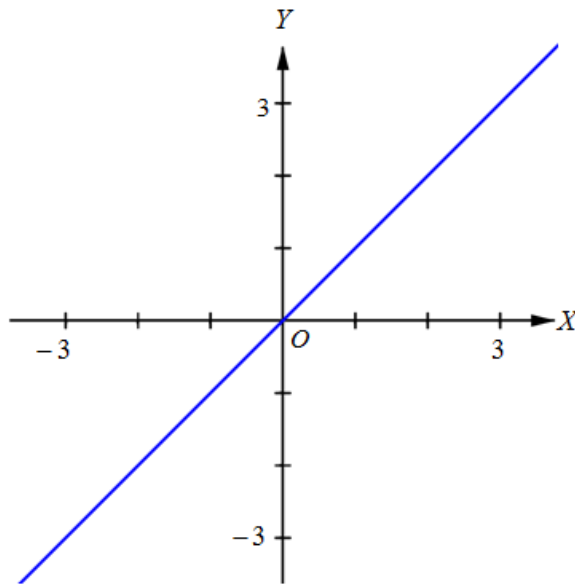
$$|a+(3-b)i| = |(a-3)+bi|$$

จะได้ $\sqrt{a^2+(3-b)^2} = \sqrt{(a-3)^2+b^2}$

$$a^2+9-6b+b^2 = a^2-6a+9+b^2$$

$$a = b$$

เขียนกราฟของจุดในระนาบ ได้เส้นตรง $y = x$ ดังรูป



8) ให้จำนวนเชิงซ้อน z แทนด้วยจุด (a, b)

$$\text{จาก} \quad |z - 2 + i| = |z - \overline{(6 + 3i)}|$$

$$\text{นั่นคือ} \quad |a + bi - 2 + i| = |a + bi - 6 + 3i|$$

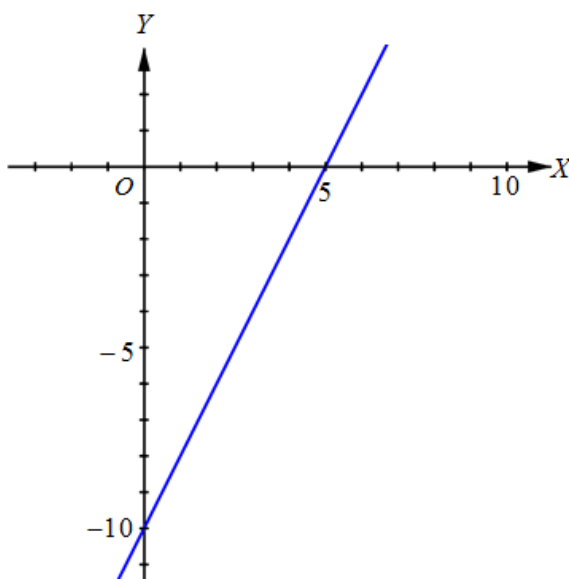
$$|(a - 2) + (b + 1)i| = |(a - 6) + (b + 3)i|$$

$$\text{จะได้} \quad \sqrt{(a - 2)^2 + (b + 1)^2} = \sqrt{(a - 6)^2 + (b + 3)^2}$$

$$a^2 - 4a + 4 + b^2 + 2b + 1 = a^2 - 12a + 36 + b^2 + 6b + 9$$

$$2a - b - 10 = 0$$

เขียนกราฟของจุดในระนาบ ได้เส้นตรง $2x - y - 10 = 0$ ดังรูป



26. จากสมการ $|z - i| = 2$

แสดงว่า z จะอยู่บนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 1)$ และรัศมียาว 2 หน่วย

กราฟจะตัดแกน Y ที่จุด $(0, 3)$ ซึ่งทำให้ $|z| = 3$ มีค่ามากที่สุด

ดังนั้น $z = 3i$ สอดคล้องกับสมการ $|z - i| = 2$ ซึ่ง $|z|$ มากที่สุด

27. ให้ $p(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 9x + 18$

จะได้ $p(-1-\sqrt{2}i)$

$$\begin{aligned} &= (-1-\sqrt{2}i)^5 + 2(-1-\sqrt{2}i)^4 - 4(-1-\sqrt{2}i)^3 - 8(-1-\sqrt{2}i)^2 - 9(-1-\sqrt{2}i) + 18 \\ &= (-1+11\sqrt{2}i) + 2(-7-4\sqrt{2}i) - 4(5-\sqrt{2}i) - 8(-1+2\sqrt{2}i) - 9(-1-\sqrt{2}i) + 18 \\ &= -1+11\sqrt{2}i - 14-8\sqrt{2}i - 20+4\sqrt{2}i + 8-16\sqrt{2}i + 9+9\sqrt{2}i + 18 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $-1-\sqrt{2}i$ เป็นคำตอบของสมการพหุนาม $x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 9x + 18 = 0$

จากทฤษฎีบท 13 จะได้ว่า $-1+\sqrt{2}i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย

เนื่องจาก $(x-(-1-\sqrt{2}i))(x-(-1+\sqrt{2}i)) = x^2 + 2x + 3$

และเมื่อนำ $x^2 + 2x + 3$ ไปหาร $p(x)$ ได้ผลหารเป็น $x^3 - 7x + 6$

ดังนั้น $x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 9x + 18 = (x^2 + 2x + 3)(x^3 - 7x + 6)$

ให้ $q(x) = x^3 - 7x + 6$

เนื่องจากจำนวนเต็มทีหาร 6 ลงตัว คือ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } q(1) &= (1)^3 - 7(1) + 6 \\ &= 1 - 7 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

แสดงว่า $x-1$ เป็นตัวประกอบของ $q(x)$

ดังนั้น $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6)$

นั่นคือ $x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 9x + 18 = (x^2 + 2x + 3)(x-1)(x^2 + x - 6)$

จะได้ $(x^2 + 2x + 3)(x-1)(x^2 + x - 6) = 0$

$$(x^2 + 2x + 3)(x-1)(x-2)(x+3) = 0$$

นั่นคือ $x=1$ หรือ $x=2$ หรือ $x=-3$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{-3, 1, 2, -1+\sqrt{2}i, -1-\sqrt{2}i\}$

28. ให้ $p(x) = x^5 + 9x^4 + 33x^3 + 55x^2 + 42x + 12$

เนื่องจาก $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

และ $x^5 + 9x^4 + 33x^3 + 55x^2 + 42x + 12 = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(x^2 + 6x + 12)$

จะได้ว่า $x^5 + 9x^4 + 33x^3 + 55x^2 + 42x + 12 = (x+1)^3(x^2 + 6x + 12)$

นั่นคือ -1 เป็นคำตอบซ้ำ 3 คำตอบของสมการพหุนาม $p(x) = 0$

และจะได้ $(x+1)^3(x^2 + 6x + 12) = 0$

นั่นคือ $(x+1)^3 = 0$ หรือ $x^2 + 6x + 12 = 0$

ถ้า $x^2 + 6x + 12 = 0$ แล้ว $x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(1)(12)}}{2(1)} = -3 \pm \sqrt{3}i$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{-1, -3 + \sqrt{3}i, -3 - \sqrt{3}i\}$

29. เนื่องจาก $3+i$ เป็นคำตอบของสมการ และจากทฤษฎีบท 13 จะได้ว่า $3-i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย

เนื่องจาก $(x - (3+i))(x - (3-i)) = x^2 - 6x + 10$

และเมื่อนำ $x^2 - 6x + 10$ ไปหาร $x^5 - 9x^4 + 24x^3 + 6x^2 - 112x + 120$ ได้ผลหารเป็น $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } x^5 - 9x^4 + 24x^3 + 6x^2 - 112x + 120 &= (x^2 - 6x + 10)(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) \\ &= (x^2 - 6x + 10)(x^2(x-3) - 4(x-3)) \\ &= (x^2 - 6x + 10)(x-3)(x^2 - 4) \\ &= (x^2 - 6x + 10)(x-3)(x-2)(x+2) \end{aligned}$$

นั่นคือ $(x^2 - 6x + 10)(x-3)(x-2)(x+2) = 0$

จะได้ $x = 3$ หรือ $x = 2$ หรือ $x = -2$

ดังนั้น เซตคำตอบทั้งหมดของสมการพหุนามนี้ คือ $\{-2, 2, 3, 3+i, 3-i\}$

บทที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น

แบบฝึกหัด 2.1

- จากหลักการบวก จะมีวิธีเลือกสิ่งอาหารได้ $12 + 8 + 5 = 25$ แบบ
- รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่เกิดจากการจัดเรียงกระเบื้องมี 3 ขนาด ได้แก่
 - ขนาดที่ 1 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่แต่ละด้านยาว 1 หน่วย มี 9 รูป
 - ขนาดที่ 2 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่แต่ละด้านยาว 2 หน่วย มี 3 รูป
 - ขนาดที่ 3 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่แต่ละด้านยาว 3 หน่วย มี 1 รูป
 จากหลักการบวก จะได้ว่า มีรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมด $9 + 3 + 1 = 13$ รูป
- การเข้าออกประตูห้างสรรพสินค้าของน้อยหน้า ประกอบด้วย 2 ขั้นตอน ดังนี้
 - ขั้นตอนที่ 1 น้อยหน้าสามารถเลือกเข้าประตูได้ 10 วิธี
 - ขั้นตอนที่ 2 น้อยหน้าสามารถเลือกออกประตูโดยไม่ให้ซ้ำกับประตูที่เข้า ได้ 9 วิธี
 จากหลักการคูณ น้อยหน้าสามารถเลือกเข้าออกประตู โดยไม่ใช้ประตูซ้ำกันได้ $10 \times 9 = 90$ วิธี
- การสร้างรูปสามเหลี่ยมจากจุด $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ และ c_3 พิจารณาได้ดังนี้
 - กรณีที่ 1 รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่บนด้าน AB, BC และ AC ด้านละจุด มี $3 \times 2 \times 3 = 18$ รูป
 - กรณีที่ 2 รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด 2 จุด อยู่บนด้าน AB มี $3 \times 5 = 15$ รูป
 - กรณีที่ 3 รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด 2 จุด อยู่บนด้าน AC มี $3 \times 5 = 15$ รูป
 - กรณีที่ 4 รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด 2 จุด อยู่บนด้าน BC มี $1 \times 6 = 6$ รูป
 จากหลักการบวก จะสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดดังกล่าวเป็นจุดยอดได้ $18 + 15 + 15 + 6 = 54$ รูป
- 1) การสร้างรูปสามเหลี่ยมจากจุด A, B, C, D, E หรือ F มี 2 กรณี ได้แก่
 - กรณีที่ 1 รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด 2 จุด อยู่บนส่วนของเส้นตรง AD
 - ขั้นตอนที่ 1 เลือกจุด 2 จุด จากจุด A, B, C, D ได้ 6 วิธี
 - ขั้นตอนที่ 2 เลือกจุด 1 จุด จากจุด E, F ได้ 2 วิธี
 จากหลักการคูณ จะสร้างรูปสามเหลี่ยมได้ $6 \times 2 = 12$ รูป
 - กรณีที่ 2 รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด 2 จุด ที่ไม่ใช่จุด C อยู่บนส่วนของเส้นตรง CF
 - ขั้นตอนที่ 1 เลือกจุด 2 จุด จากจุด E, F ได้ 1 วิธี
 - ขั้นตอนที่ 2 เลือกจุด 1 จุด จากจุด A, B, D ได้ 3 วิธี

จากหลักการคูณ จะสร้างรูปสามเหลี่ยมได้ $1 \times 3 = 3$ รูป

จากหลักการบวก จะสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีจุด A, B, C, D, E หรือ F เป็นจุดยอด ได้ทั้งหมด $12 + 3 = 15$ รูป

- 2) สังเกตว่าในการสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะต้องให้ C เป็นจุดยอด นั่นคือ การสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ประกอบด้วย 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกจุด 1 จุด จากจุด A, B, D ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกจุด 1 จุด จากจุด E, F ได้ 2 วิธี

จากหลักการคูณ จะสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีจุด A, B, C, D, E หรือ F เป็นจุดยอด ได้ทั้งหมด $3 \times 2 = 6$ รูป

- 3) การสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มี A เป็นจุดยอด และมีจุดยอดอีกสองจุดจากจุด B, C, D, E หรือ F มี 2 กรณี ได้แก่

กรณีที่ 1 จุดยอดอีกสองจุดไม่อยู่บนส่วนของเส้นตรง AD จะเลือกจุดได้ 1 วิธี คือ เลือกจุด E และ F

ดังนั้น จะสร้างรูปสามเหลี่ยมได้ 1 รูป

กรณีที่ 2 จุดยอดอีกสองจุด มี 1 จุดอยู่บนส่วนของเส้นตรง AD

ขั้นตอนที่ 1 เลือกจุด 1 จุด จากจุด B, C, D ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกจุด 1 จุด จากจุด E, F ได้ 2 วิธี

จากหลักการคูณ จะสร้างรูปสามเหลี่ยมได้ $3 \times 2 = 6$ รูป

ดังนั้น จะสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มี A เป็นจุดยอด และมีจุดยอดอีกสองจุดจากจุด B, C, D, E หรือ F ได้ทั้งหมด $1 + 6 = 7$ รูป

6. การวางกระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 2×1 ตารางหน่วย ลงในรูป ประกอบด้วย 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 วางลงในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 2×3 ตารางหน่วย ได้ 3 วิธี ดังรูป



ขั้นตอนที่ 2 วางลงในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 2×2 ตารางหน่วย ได้ 2 วิธี ดังรูป



ขั้นตอนที่ 3 วางลงในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 2×4 ตารางหน่วย ได้ 5 วิธี ดังรูป



จากหลักการคูณ จำนวนวิธีที่แตกต่างกันในการวางกระต่ายรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 2×1 จำนวน 9 ชิ้น ลงในรูปดังกล่าว เท่ากับ $3 \times 2 \times 5 = 30$ วิธี

7. การสร้างรหัสบัตรเอทีเอ็มจำนวน 4 ตัว โดยให้สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 0, 2, 4, 6 หรือ 8 เป็นหลักสุดท้าย ได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดดที่ไม่ใช่ 9 และเลขโดดที่ไม่ซ้ำกับเลขโดดหลักสุดท้าย เป็นหลักแรก ได้ 8 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดดที่เหลือเป็นหลักที่สอง ได้ 8 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดดที่เหลือเป็นหลักที่สาม ได้ 7 วิธี

จากหลักการคูณ จำนวนรหัสบัตรเอทีเอ็มที่เลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน เลขโดดในหลักแรกไม่ใช่ 9 และเลขโดดในหลักสุดท้ายเป็นจำนวนคู่ มีทั้งหมด $5 \times 8 \times 8 \times 7 = 2,240$ รหัส

8. การสร้างคำโดยไม่คำนึงถึงความหมาย ที่ประกอบด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษ 5 ตัว ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกตัวอักษร 1 ตัว เป็นตัวอักษรตัวแรก ได้ 26 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกตัวอักษร 1 ตัว ที่ไม่ซ้ำกับตัวอักษรตัวแรก เป็นตัวอักษรตัวที่สอง ได้ 25 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกตัวอักษร 1 ตัว ที่ไม่ซ้ำกับตัวอักษรตัวที่สอง เป็นตัวอักษรตัวที่สาม ได้ 25 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 เลือกตัวอักษร 1 ตัว ที่ไม่ซ้ำกับตัวอักษรตัวที่สาม เป็นตัวอักษรตัวที่สี่ ได้ 25 วิธี

ขั้นตอนที่ 5 เลือกตัวอักษร 1 ตัว ที่ไม่ซ้ำกับตัวอักษรตัวที่สี่ เป็นตัวอักษรตัวที่ห้า ได้ 25 วิธี

จากหลักการคูณ จำนวนวิธีสร้างคำที่ไม่คำนึงถึงความหมาย ซึ่งประกอบด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษ 5 ตัว โดยที่ตัวอักษร 2 ตัวที่ติดกันต้องแตกต่างกัน มีทั้งหมด

$$26 \times 25 \times 25 \times 25 \times 25 = 10,156,250 \text{ วิธี}$$

9. 1) การสร้างจำนวนเต็มบวกสามหลักที่มากกว่าหรือเท่ากับ 300 ประกอบด้วย 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 3, 4, 5 เป็นหลักร้อย ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 0, 1, 2, 3, 4, 5 เป็นหลักสิบ ได้ 6 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 0, 1, 2, 3, 4, 5 เป็นหลักหน่วย ได้ 6 วิธี

จากหลักการคูณ จะได้จำนวนเต็มบวกที่มากกว่าหรือเท่ากับ 300 ที่สร้างจากเลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 มีทั้งหมด $3 \times 6 \times 6 = 108$ จำนวน

ดังนั้น จำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 300 มีทั้งหมด $108 - 1 = 107$ จำนวน

- 2) การสร้างจำนวนเต็มบวกสามหลักที่มากกว่า 300 โดยเลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน ประกอบด้วย 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 3, 4, 5 เป็นหลักร้อย ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 0, 1, 2, 3, 4, 5 และไม่ซ้ำกับหลักร้อย เป็นหลักสิบ ได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดดที่เหลือ เป็นหลักหน่วย ได้ 4 วิธี

จากหลักการคูณ จะได้จำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 300 ที่สร้างจากเลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 โดยเลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน มีทั้งหมด $3 \times 5 \times 4 = 60$ จำนวน

10. รหัสหนังสือของห้องสมุดแห่งนี้ มีองค์ประกอบ 4 ส่วน ได้แก่

ส่วนที่ 1 ตัวอักษรภาษาอังกฤษ 2 ตัว มีได้ $26 \times 26 = 676$ วิธี

ส่วนที่ 2 เลขโดด 3 ตัว ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน มีได้ 999 วิธี

ส่วนที่ 3 ตัวอักษรภาษาอังกฤษ 1 ตัว มีได้ 26 วิธี

ส่วนที่ 4 เลขโดด 2 ตัว ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน มีได้ 99 วิธี

จากหลักการคูณ จะได้ว่า รหัสหนังสือที่เป็นไปได้ทั้งหมดมี $676 \times 999 \times 26 \times 99 = 1,738,283,976$ รหัส

11. เขียนตารางแสดงแต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกสองครั้ง ได้ดังนี้

ครั้งที่ 1 \ ครั้งที่ 2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

- 1) **วิธีที่ 1** จากตารางจะได้ว่า จำนวนวิธีที่แต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋าทั้งสองครั้งเท่ากัน เป็น 6 วิธี

วิธีที่ 2 **ขั้นตอนที่ 1** แต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋ารั้งที่ 1 มีได้ 6 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 แต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋ารั้งที่ 2 โดยให้แต้มเท่ากับการทอดลูกเต๋ารั้งที่ 1 มีได้ 1 วิธี

จากหลักการคูณ จะได้ว่า จำนวนวิธีที่แต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋าทั้งสองครั้งเท่ากัน เป็น $6 \times 1 = 6$ วิธี

- 2) **วิธีที่ 1** จากตารางจะได้ว่า จำนวนวิธีที่แต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋าทั้งสองครั้งต่างกัน เป็น 30 วิธี

วิธีที่ 2 เนื่องจาก จำนวนวิธีที่ได้แต้มจากการทอดลูกเต๋าสองครั้ง เป็น 36 วิธี

และจำนวนวิธีที่แต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋าสองครั้งเท่ากัน เป็น 6 วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีที่แต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋าสองครั้งต่างกันเป็น

$$36 - 6 = 30 \text{ วิธี}$$

วิธีที่ 3 **ขั้นตอนที่ 1** แต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋ารั้งที่ 1 มีได้ 6 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 แต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋ารั้งที่ 2 โดยให้แต้มต่างกับการทอดลูกเต๋ารั้งที่ 1 มีได้ 5 วิธี

จากหลักการคูณ จะได้ จำนวนวิธีที่แต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋าสองครั้งต่างกัน เป็น $6 \times 5 = 30$ วิธี

- 3) จากตารางจะได้ว่า จำนวนวิธีที่ผลรวมของแต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋าสองครั้งน้อยกว่า 10 เป็น 30 วิธี

12. 1) การสร้างจำนวนเต็มบวกสามหลัก มี 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว ที่ไม่ใช่ 0 เป็นหลักร้อย ได้ 9 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว เป็นหลักสิบ ได้ 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว เป็นหลักหน่วย ได้ 10 วิธี

จากหลักการคูณ จะได้ จำนวนเต็มบวกที่มีสามหลัก มีทั้งหมด $9 \times 10 \times 10 = 900$ จำนวน

- 2) การสร้างจำนวนเต็มบวกสามหลัก ที่เลขโดดในหลักแรกและหลักสุดท้ายไม่ซ้ำกัน มี 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว ที่ไม่ใช่ 0 เป็นหลักร้อย ได้ 9 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว ที่ไม่ซ้ำกับหลักร้อย เป็นหลักหน่วย ได้ 9 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว เป็นหลักสิบ ได้ 10 วิธี

จากหลักการคูณ จะได้ จำนวนเต็มบวกที่มีสามหลัก ที่เลขโดดในหลักแรกและหลักสุดท้าย ไม่ซ้ำกันมีทั้งหมด $9 \times 9 \times 10 = 810$ จำนวน

- 3) การสร้างจำนวนเต็มบวกสามหลัก ที่เลขโดดในหลักแรกและหลักสุดท้ายรวมกันได้ 10 มี 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว ที่ไม่ใช่ 0 เป็นหลักร้อย ได้ 9 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว ที่รวมกับหลักร้อยแล้วได้ 10 เป็นหลักหน่วย ได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว เป็นหลักสิบ ได้ 10 วิธี

จากหลักการคูณ จะได้ จำนวนเต็มบวกที่มีสามหลัก ที่เลขโดดในหลักแรกและหลักสุดท้าย รวมกันได้ 10 มีทั้งหมด $9 \times 1 \times 10 = 90$ จำนวน

13. การสร้างพาลินโดรมที่ประกอบด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษ 4 ตัว มี 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกตัวอักษรภาษาอังกฤษ 1 ตัว เป็นตัวที่หนึ่ง ได้ 26 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกตัวอักษรภาษาอังกฤษ 1 ตัว เป็นตัวที่สอง ได้ 26 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกตัวอักษรภาษาอังกฤษ 1 ตัว ซึ่งต้องเป็นตัวอักษรเดียวกับตัวที่สองเป็นตัวที่สาม ได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 เลือกตัวอักษรภาษาอังกฤษ 1 ตัว ซึ่งต้องเป็นตัวอักษรเดียวกับตัวที่หนึ่งเป็นตัวที่สี่ ได้ 1 วิธี

จากหลักการคูณ จะได้ พาลินโดรมที่ประกอบด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษ 4 ตัว โดยที่จะมีความหมายหรือไม่ก็ได้ มีทั้งหมด $26 \times 26 \times 1 \times 1 = 676$ คำ

14. 1) การนำผลไม้ใส่ตะกร้าโดยไม่มีเงื่อนไข มี 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 นำผลไม้ชนิดที่ 1 ใส่ในตะกร้าใดตะกร้าหนึ่ง ทำได้ 6 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 นำผลไม้ชนิดที่ 2 ใส่ในตะกร้าใดตะกร้าหนึ่ง ทำได้ 6 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 นำผลไม้ชนิดที่ 3 ใส่ในตะกร้าใดตะกร้าหนึ่ง ทำได้ 6 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 นำผลไม้ชนิดที่ 4 ใส่ในตะกร้าใดตะกร้าหนึ่ง ทำได้ 6 วิธี

จากหลักการคูณ จะได้จำนวนวิธีในการนำผลไม้ใส่ตะกร้าโดยไม่มีเงื่อนไข มีทั้งหมด $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1,296$ วิธี

- 2) การนำผลไม้ใส่ตะกร้าโดยตะกร้าแต่ละใบมีผลไม้ไม่เกิน 1 ผล มี 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 นำผลไม้ชนิดที่ 1 ใส่ในตะกร้าใดตะกร้าหนึ่ง ทำได้ 6 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 นำผลไม้ชนิดที่ 2 ใส่ในตะกร้าใบหนึ่งที่ว่างอยู่ ทำได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 นำผลไม้ชนิดที่ 3 ใส่ในตะกร้าใบหนึ่งที่ว่างอยู่ ทำได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 นำผลไม้ชนิดที่ 4 ใส่ในตะกร้าใบหนึ่งที่ว่างอยู่ ทำได้ 3 วิธี

จากหลักการคูณ จะได้จำนวนวิธีในการนำผลไม้ใส่ตะกร้าโดยตะกร้าแต่ละใบมีผลไม้ไม่เกิน 1 ผล มีทั้งหมด $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ วิธี

แบบฝึกหัด 2.2

- เนื่องจากมีหนังสือที่แตกต่างกันทั้งหมด 9 เล่ม
สามารถนำหนังสือทั้งหมดนี้มาวางเรียงบนชั้นวางหนังสือ ทำได้ทั้งหมด $9! = 362,880$ วิธี

$$\begin{aligned} 2. \quad 1) \quad P_{8,4} &= \frac{8!}{(8-4)!} \\ &= \frac{8!}{4!} \\ &= 8 \times 7 \times 6 \times 5 \\ &= 1,680 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad P_{10,2} &= \frac{10!}{(10-2)!} \\ &= \frac{10!}{8!} \\ &= 10 \times 9 \\ &= 90 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad P_{7,3} &= \frac{7!}{(7-3)!} \\ &= \frac{7!}{4!} \\ &= 7 \times 6 \times 5 \\ &= 210 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad P_{20,2} &= \frac{20!}{(20-2)!} \\ &= \frac{20!}{18!} \\ &= 20 \times 19 \\ &= 380 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad P_{5,5} &= \frac{5!}{(5-5)!} \\ &= \frac{5!}{0!} \\ &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad P_{7,0} &= \frac{7!}{(7-0)!} \\
 &= \frac{7!}{7!} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

3. จาก

$$P_{n,4} = 18 \times P_{n-1,2}$$

จะได้

$$\frac{n!}{(n-4)!} = 18 \times \frac{(n-1)!}{(n-3)!}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = 18 \times \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!}$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 18(n-1)(n-2)$$

จาก $P_{n,4}$ จึงได้ว่า $n \geq 4$ จะได้ $(n-1)(n-2) \neq 0$

นั่นคือ

$$n(n-3) = 18$$

$$n^2 - 3n - 18 = 0$$

$$(n-6)(n+3) = 0$$

จะได้ $n-6=0$ หรือ $n+3=0$

นั่นคือ $n=6$ หรือ $n=-3$

เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น $n=6$

$$\begin{aligned}
 4. \quad P_{n,1} + P_{m,1} &= \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{m!}{(m-1)!} \\
 &= \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} + \frac{m(m-1)!}{(m-1)!} \\
 &= n + m \\
 &= \frac{(n+m)(n+m-1)!}{(n+m-1)!} \\
 &= \frac{(n+m)!}{(n+m-1)!} \\
 &= P_{n+m,1}
 \end{aligned}$$

5. ในที่นี้ $n = 11$ และ $r = 5$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } P_{11,5} &= \frac{11!}{(11-5)!} \\ &= \frac{11!}{6!} \\ &= 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \\ &= 55,440\end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนวิธีในการจัดทีมผู้เล่นมีทั้งหมด 55,440 วิธี

6. **วิธีที่ 1** ในที่นี้ $n = 4$ และ $r = 3$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } P_{4,3} &= \frac{4!}{(4-3)!} \\ &= \frac{4!}{1!} \\ &= 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 24\end{aligned}$$

ดังนั้น สร้างจำนวน 3 หลัก จากเลขโดด 2, 3, 5 และ 9 โดยที่แต่ละหลักมีเลขโดดไม่ซ้ำกัน ได้ทั้งหมด 24 จำนวน

- วิธีที่ 2** การสร้างจำนวน 3 หลัก จากเลขโดด 2, 3, 5 และ 9 โดยที่แต่ละหลักมีเลขโดดไม่ซ้ำกัน มี 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว เป็นหลักร้อย ได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว เป็นหลักสิบ ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว เป็นหลักหน่วย ได้ 2 วิธี

จากหลักการคูณ สร้างจำนวน 3 หลัก จากเลขโดด 2, 3, 5 และ 9 โดยที่แต่ละหลักมีเลขโดดไม่ซ้ำกัน ได้ทั้งหมด $4 \times 3 \times 2 = 24$ จำนวน

7. รูปแบบการนั่งให้ 3 คน ไม่มีใครนั่งติดกัน มี 4 รูปแบบ คือ ให้ทั้ง 3 คน นั่งบนเก้าอี้ในตำแหน่งที่ (1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 4, 6) และ (2, 4, 6)

และในแต่ละรูปแบบ ทั้ง 3 คน สามารถนั่งสลับตำแหน่งกันได้ 3! วิธี

โดยหลักการคูณ มีวิธีที่จัดให้คน 3 คน นั่งเก้าอี้ 6 ตัว โดยที่ไม่มีใครนั่งติดกัน ได้ $4 \times 3! = 24$ วิธี

8. 1) เนื่องจากมีหนังสือรวมกัน 9 เล่ม
นำมาเรียงสับเปลี่ยน ได้ทั้งหมด $9! = 362,880$ วิธี
- 2) เนื่องจากต้องการให้หนังสือเล่มแรกและเล่มสุดท้ายเป็นหนังสือคณิตศาสตร์
จะจัดหนังสือเล่มแรกและเล่มสุดท้ายเป็นหนังสือคณิตศาสตร์ได้ $P_{2,2}$ วิธี
จากนั้นจัดหนังสือที่เหลือทั้งหมดไว้ระหว่างหนังสือคณิตศาสตร์ 2 เล่ม ได้ $7!$ วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีจัดเรียงหนังสือโดยให้หนังสือเล่มแรกและเล่มสุดท้ายเป็นหนังสือคณิตศาสตร์ได้ทั้งหมด $P_{2,2} \times 7! = 10,080$ วิธี
- 3) เนื่องจากต้องการให้หนังสือวิชาเดียวกันอยู่ติดกัน
จะพิจารณาว่าหนังสือวิชาเดียวกันมัดติดกัน โดยคิดเป็นสิ่งของ 1 ชิ้น
ดังนั้น จะมีหนังสืออยู่ 3 มัด จัดเรียงได้ $3!$ วิธี
แต่ละวิธีใน $3!$ วิธีนี้ มัดที่เป็นหนังสือเคมีที่ต่างกัน 3 เล่ม จัดเรียงได้ $3!$ วิธี
มัดที่เป็นหนังสือคณิตศาสตร์ที่ต่างกัน 2 เล่ม จัดเรียงได้ $2!$ วิธี
และมัดที่เป็นหนังสือภาษาอังกฤษที่ต่างกัน 4 เล่ม จัดเรียงได้ $4!$ วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีจัดเรียงให้หนังสือวิชาเดียวกันอยู่ติดกันได้ทั้งหมด $3!3!2!4! = 1,728$ วิธี
9. 1) การจัดคนที่มาสมัครเข้าทำงาน มี 2 ขั้นตอน ดังนี้
ขั้นตอนที่ 1 จัดผู้สมัครที่เป็นผู้ชาย ได้ $P_{6,3}$ วิธี
ขั้นตอนที่ 2 จัดผู้สมัครที่เป็นผู้หญิง ได้ $P_{5,2}$ วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีจัดคนที่มาสมัครเข้าทำงาน มีทั้งหมด $P_{6,3} \times P_{5,2} = \frac{6!}{3!} \times \frac{5!}{2!} = 2,400$ วิธี
- 2) การจัดคนที่มาสมัครเข้าทำงาน โดยมีชาติเป็นหนึ่งในผู้สมัครงาน และชาติได้เข้า
ทำงาน ทำได้โดยเลือกตำแหน่งงานที่ว่างสำหรับผู้ชายให้ชาติทำได้ 3 วิธี
นั่นคือ จะเหลือผู้สมัครที่เป็นผู้ชาย 5 คน และตำแหน่งว่าง 2 ตำแหน่ง ซึ่งจัดได้ $P_{5,2}$ วิธี
และจัดผู้สมัครที่เป็นผู้หญิงเข้าทำงานได้ $P_{5,2}$ วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีจัดคนที่มาสมัครเข้าทำงาน โดยชาติเป็นหนึ่งในผู้สมัครงานและชาติได้
เข้าทำงาน มีทั้งหมด $3 \times P_{5,2} \times P_{5,2} = 1,200$ วิธี
- 3) การจัดคนที่มาสมัครเข้าทำงาน จะจัดผู้มาสมัครที่เป็นผู้ชายได้ $P_{6,3}$ วิธี
เนื่องจากรู้ได้เข้าทำงาน จัดตำแหน่งที่ว่างงานสำหรับผู้หญิงให้รู้ทำได้ 2 วิธี
จะเหลือผู้สมัครงานที่เป็นผู้หญิง 4 คน
แต่หญิงไม่ได้เข้าทำงาน จะเหลือผู้สมัครงานที่เป็นผู้หญิงเพียง 3 คน ซึ่งจัดได้ $P_{3,1}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดคนที่มาสมัครเข้าทำงาน โดยรู้และหญิงเป็นสองคนในผู้สมัครงาน และรู้ได้เข้าทำงานแต่หญิงไม่ได้เข้าทำงาน มีทั้งหมด $P_{6,3} \times 2 \times P_{3,1} = 720$ วิธี

10. เนื่องจากต้องการให้ไม่มีผู้หญิง 2 คนใดยืนติดกัน จะแบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จัดผู้ชาย 6 คน ยืนเรียงแถวได้ $6!$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดผู้หญิง 3 คน ยืนแทรกระหว่างผู้ชายได้ 7 ตำแหน่ง จัดได้ $P_{7,3}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะจัดผู้ชาย 6 คน และผู้หญิง 3 คน ยืนเรียงแถวหน้ากระดาน โดยที่ไม่มีผู้หญิง 2 คนใดยืนติดกัน มีทั้งหมด $6! \times P_{7,3} = 151,200$ วิธี

11. 1) เนื่องจากมีหนังสือที่แตกต่างกัน 8 เล่ม จะนำหนังสือทั้งหมดมาวางเรียงเป็นแถว ได้ $8!$ วิธี

2) เนื่องจากต้องการให้หนังสือภูมิศาสตร์ไม่อยู่ติดกัน จะแบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จัดหนังสือที่ไม่ใช่หนังสือภูมิศาสตร์ก่อน ได้ $5!$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดหนังสือภูมิศาสตร์แทรกได้ 6 ตำแหน่ง ได้ $P_{6,3}$ วิธี

ดังนั้น จะนำหนังสือทั้งหมดมาวางเรียงเป็นแถว โดยที่หนังสือภูมิศาสตร์ไม่อยู่ติดกัน ได้ $5! \times P_{6,3} = 14,400$ วิธี

12. 1) เนื่องจากต้องการให้ เทียนหอม อิงฟ้า มะตูม และปั่นจั่น เข้าเส้นชัย 4 อันดับแรก จะมีได้ $4!$ รูปแบบ

เหลือผู้เข้าแข่งขันอีก 96 คน ซึ่งจะเข้าเส้นชัยเป็นอันดับใดก็ได้ใน 96 อันดับที่เหลือ มีได้ $96!$ รูปแบบ

ดังนั้น จำนวนรูปแบบการเข้าเส้นชัยของผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด โดยที่ เทียนหอม อิงฟ้า มะตูม และปั่นจั่น เข้าเส้นชัย 4 อันดับแรก คือ $4! \times 96!$ รูปแบบ

- 2) เทียนหอม เข้าเส้นชัยอันดับที่ 5 มีได้ 1 รูปแบบ

อิงฟ้า มะตูม ปั่นจั่น เข้าเส้นชัยในอันดับที่น้อยกว่าอันดับที่ 5 มีได้ $P_{4,3}$ รูปแบบ

เหลือผู้เข้าแข่งขันอีก 96 คน ซึ่งจะเข้าเส้นชัยเป็นอันดับใดก็ได้ใน 96 อันดับที่เหลือ มีได้ $96!$ รูปแบบ

ดังนั้น จำนวนรูปแบบการเข้าเส้นชัยของผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด โดยที่เทียนหอมเข้าเส้นชัย อันดับที่ 5 และ อิงฟ้า มะตูม ปั่นจั่น เข้าเส้นชัยในอันดับที่น้อยกว่าอันดับที่ 5 คือ

$$P_{4,3} \times 96! = 24 \times 96! \text{ รูปแบบ}$$

- 3) เทียนหอม และ อิงฟ้า เข้าเส้นชัย 50 อันดับแรก มีได้ $P_{50,2}$ รูปแบบ
 มะตูม และ ปั่นจั่น เข้าเส้นชัยในอันดับที่มากกว่าอันดับที่ 50 มีได้ $P_{50,2}$ รูปแบบ
 และเหลือผู้เข้าแข่งขันอีก 96 คน ซึ่งจะเข้าเส้นชัยเป็นอันดับใดก็ได้ ใน 96 อันดับที่เหลือ
 มีได้ $96!$ รูปแบบ
 ดังนั้น จำนวนรูปแบบการเข้าเส้นชัยของผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด โดยเทียนหอมและอิงฟ้า
 เข้าเส้นชัย 50 อันดับแรก มะตูมและ ปั่นจั่น เข้าเส้นชัยในอันดับที่มากกว่าอันดับที่ 50
 คือ $P_{50,2} \times P_{50,2} \times 96! = 49^2 \times 50^2 \times 96!$ รูปแบบ
- 4) เนื่องจากการแข่งขันนี้ให้รางวัลผู้เข้าเส้นชัยสามอันดับแรก และ เทียนหอมได้รางวัล
 แต่อิงฟ้าไม่ได้รางวัล จะได้ว่า รูปแบบการเข้าเส้นชัยของ เทียนหอม มีได้ 3 รูปแบบ
 รูปแบบการเข้าเส้นชัยของ อิงฟ้า มีได้ 97 รูปแบบ และเหลือผู้เข้าแข่งขันอีก 98 คน ซึ่ง
 จะเข้าเส้นชัยเป็นอันดับใดก็ได้ใน 98 อันดับที่เหลือ มีได้ $98!$ รูปแบบ
 ดังนั้น จำนวนรูปแบบการเข้าเส้นชัยของผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด โดยที่ เทียนหอมได้รางวัล
 แต่อิงฟ้าไม่ได้รางวัล คือ $3 \times 97 \times 98! = 291 \times 98!$ รูปแบบ

แบบฝึกหัด 2.3

- มีกระถางต้นไม้ทั้งหมด 9 กระถาง
 เป็นกระถางต้นมะลิ 3 กระถาง
 เป็นกระถางต้นกุหลาบ 2 กระถาง
 และเป็นกระถางต้นดาวเรือง 4 กระถาง
 ดังนั้น จะจัดวางกระถางให้เกิดรูปแบบที่แตกต่างกันได้ $\frac{9!}{3!2!4!} = 1,260$ แบบ
- มีเลขโดดทั้งหมด 7 ตัว
 มีเลขโดด 0 อยู่ 1 ตัว
 มีเลขโดด 2 อยู่ 2 ตัว
 มีเลขโดด 3 อยู่ 3 ตัว
 และมีเลขโดด 4 อยู่ 1 ตัว

วิธีที่ 1 มีเลขโดดที่ไม่รวมศูนย์ทั้งหมด 6 ตัว คือ 2, 2, 3, 3, 3 และ 4

จะสามารถจัดเรียงเลขโดดเหล่านี้ได้ $\frac{6!}{2!3!1!} = 60$ วิธี

และนำเลขโดด 0 มาแทรกระหว่างเลขโดดที่จัดเรียงแล้ว โดยไม่อยู่ตำแหน่งแรกสุด ได้ 6 ตำแหน่ง

ดังนั้น จะสร้างจำนวนที่มากกว่าหนึ่งล้านได้ทั้งหมด $60 \times 6 = 360$ จำนวน

วิธีที่ 2 สามารถจัดเรียงเลขโดดทั้ง 7 ตัวนี้ ได้ $\frac{7!}{1!2!3!1!} = 420$ จำนวน

ในจำนวนนี้ จะมีจำนวนที่น้อยกว่า 1 ล้าน นั่นคือ จำนวนที่มีเลขโดด 0 อยู่ใน

ตำแหน่งแรก อยู่ $\frac{6!}{2!3!1!} = 60$ จำนวน

ดังนั้น จะสร้างจำนวนที่มากกว่าหนึ่งล้านได้ทั้งหมด $420 - 60 = 360$ จำนวน

วิธีที่ 3 สร้างจำนวนที่มากกว่าหนึ่งล้านได้ 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 เลขโดด 2 อยู่ในหลักล้าน

จัดเลขโดดที่เหลือในหลักอื่นๆ ได้ $\frac{6!}{1!1!3!1!} = 120$ วิธี

กรณีที่ 2 เลขโดด 3 อยู่ในหลักล้าน

จัดเลขโดดที่เหลือในหลักอื่นๆ ได้ $\frac{6!}{1!2!2!1!} = 180$ วิธี

กรณีที่ 3 เลขโดด 4 อยู่ในหลักล้าน

จัดเลขโดดที่เหลือในหลักอื่นๆ ได้ $\frac{6!}{1!2!3!} = 60$ วิธี

ดังนั้น จะสร้างจำนวนที่มากกว่าหนึ่งล้านได้ $120 + 180 + 60 = 360$ จำนวน

3. 1) เนื่องจากมีหลอดไฟทั้งหมด 15 หลอด เป็นหลอดไฟสีขาว 4 หลอด หลอดไฟสีแดง 5 หลอด และหลอดไฟสีน้ำเงิน 6 หลอด

ดังนั้น จะมีวิธีประดับหลอดไฟได้แตกต่างกันทั้งหมด $\frac{15!}{4!5!6!} = 630,630$ วิธี

- 2) เนื่องจากต้องการให้หลอดไฟสีเดียวกันอยู่ติดกัน

จะพิจารณาว่าหลอดไฟสีเดียวกันมัดติดกัน โดยคิดเป็นสิ่งของ 1 ชิ้น

ดังนั้น จะมีหลอดไฟอยู่ 3 มัด จัดเรียงได้ $3!$ วิธี

เนื่องจากในแต่ละมัดหลอดไฟสีเดียวกันไม่ต่างกัน จึงถือว่าจัดเรียงได้ 1 วิธี

จะได้ว่า จะมีวิธีประดับหลอดไฟ โดยให้หลอดไฟสีเดียวกันอยู่ติดกัน ได้ 6 วิธี

- 3) เนื่องจากต้องการให้หลอดไฟสีขาวอยู่ทางซ้ายสุด และหลอดไฟสีน้ำเงินอยู่ทางขวาสุด ดังนั้นจะเหลือหลอดไฟสีขาวและสีน้ำเงินให้ระดับ 3 และ 5 หลอด ตามลำดับ นั่นคือ เหลือหลอดไฟทั้งหมด 13 หลอด เป็นหลอดไฟสีขาว 3 หลอด หลอดไฟสีแดง 5 หลอด และหลอดไฟสีน้ำเงิน 5 หลอด ดังนั้น มีวิธีระดับหลอดไฟ โดยให้หลอดไฟสีขาวอยู่ทางซ้ายสุด และหลอดไฟสีน้ำเงินอยู่ทางขวาสุด ได้ $\frac{13!}{3!5!5!} = 72,072$ วิธี

4. **วิธีที่ 1** มีตัวอักษรไม่รวมตัว O ทั้งหมด 7 ตัว

มีตัวอักษร C อยู่ 2 ตัว

มีตัวอักษร H, L, A, T และ E อย่างละ 1 ตัว

จะได้ว่ามีวิธีจัดเรียงตัวอักษรเหล่านี้ได้ $\frac{7!}{2!1!1!1!1!1!} = \frac{7!}{2!}$ วิธี

และนำตัวอักษร O มาแทรกระหว่างตัวอักษรที่จัดเรียงได้ 8 ตำแหน่ง ได้ $P_{8,2}$ วิธี

แต่เนื่องจากตัวอักษร O อยู่ 2 ตัวเหมือนกัน จะจัดเรียงได้ $\frac{P_{8,2}}{2} = 28$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดเรียงตัวอักษรดังกล่าว โดยตัวอักษร O ไม่อยู่ติดกัน มี

$$\frac{7!}{2!} \times 28 = 70,560 \text{ วิธี}$$

วิธีที่ 2 ในคำว่า CHOCOLATE มีตัวอักษรทั้งหมด 9 ตัว

มีตัวอักษร C อยู่ 2 ตัว

มีตัวอักษร O อยู่ 2 ตัว

และมีตัวอักษร H, L, A, T และ E อย่างละ 1 ตัว

สามารถจัดเรียงตัวอักษรดังกล่าวได้ $\frac{9!}{2!2!1!1!1!1!1!} = \frac{9!}{2!2!}$ วิธี

ในจำนวนนี้มีวิธีจัดเรียงตัวอักษรโดยที่อักษร O ทั้งสองอยู่ติดกันได้ $\frac{8!}{2!1!1!1!1!1!1!} = \frac{8!}{2!}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดเรียงตัวอักษรดังกล่าว โดยตัวอักษร O ไม่อยู่ติดกัน มี

$$\frac{9!}{2!2!} - \frac{8!}{2!} = 90,720 - 20,160 = 70,560 \text{ วิธี}$$

5. ให้การเดินทางไปทางทิศเหนือ 1 ช่อง แทนด้วยตัวอักษร N
และการเดินทางไปทางทิศตะวันออก 1 ช่อง แทนด้วยตัวอักษร E
- 1) การเดินทางจากจุด O ไปยังจุด P จะพิจารณาเช่นเดียวกับการจัดเรียงตัวอักษร N จำนวน 8 ตัว และตัวอักษร E จำนวน 7 ตัว ซึ่งจัดได้ $\frac{15!}{8!7!}$ วิธี
- ดังนั้น จำนวนเส้นทางทั้งหมดจากจุด O ไปยังจุด P มี $\frac{15!}{8!7!} = 6,435$ เส้นทาง
- 2) เนื่องจากต้องการผ่านจุด A จะแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอน
- ขั้นตอนที่ 1** การเดินทางจากจุด O ไปยังจุด A จะพิจารณาเช่นเดียวกับการจัดเรียงตัวอักษร N จำนวน 4 ตัว และตัวอักษร E จำนวน 4 ตัว ซึ่งจัดได้ $\frac{8!}{4!4!}$ วิธี
- ดังนั้น จำนวนเส้นทางจากจุด O ไปยังจุด A มี $\frac{8!}{4!4!}$ เส้นทาง
- ขั้นตอนที่ 2** การเดินทางจากจุด A ไปยังจุด P จะพิจารณาเช่นเดียวกับการจัดเรียงตัวอักษร N จำนวน 4 ตัว และตัวอักษร E จำนวน 3 ตัว ซึ่งจัดได้ $\frac{7!}{4!3!}$ วิธี
- ดังนั้น จำนวนเส้นทางจากจุด A ไปยังจุด P มี $\frac{7!}{4!3!}$ เส้นทาง
- จะได้ว่า จำนวนเส้นทางทั้งหมดจากจุด O ไปยังจุด P โดยผ่านจุด A มี
- $$\frac{8!}{4!4!} \times \frac{7!}{4!3!} = 2,450 \text{ เส้นทาง}$$

แบบฝึกหัด 2.4

- การจัดนักเรียนทำการแสดง โดยที่นักเรียนหญิงหนึ่งคนอยู่ตรงกลาง ทำได้ 4 วิธี และจะเหลือนักเรียนอีก 6 คน ซึ่งสามารถเข้าแถวเป็นวงกลมได้ $(6-1)! = 5!$ วิธี
ดังนั้น จะจัดนักเรียนเพื่อทำการแสดงให้เกิดรูปแบบที่แตกต่างกันทั้งหมด ได้ $4 \times 5! = 480$ วิธี
- เนื่องจากต้องการให้นักเรียนชายนั่งติดกันและนักเรียนหญิงนั่งติดกัน จะพิจารณามัดคนนั่งติดกันเป็นของ 1 มัด
ดังนั้น จะมีของอยู่ 2 มัด จัดเรียงเป็นวงกลมได้ $(2-1)!$ วิธี
ในแต่ละวิธีนี้ มัดที่เป็นนักเรียนชาย 3 คนนั้น จัดเรียงได้ $3!$ วิธี และมัดที่เป็นนักเรียนหญิง จัดเรียงได้ $3!$ วิธี
ดังนั้น จะจัดนักเรียนนั่งรอบโต๊ะกลม โดยที่นักเรียนชายนั่งติดกันและนักเรียนหญิงนั่งติดกัน ได้ $(2-1)! \times 3! \times 3! = 36$ แบบ

3. 1) จัดสมาชิกครอบครัวนี้ซึ่งมี 6 คน นั่งรอบโต๊ะกลม ได้ทั้งหมด $(6-1)! = 5! = 120$ แบบ
- 2) เนื่องจากต้องการให้พ่อและแม่นั่งติดกัน จะพิจารณามัดพ่อแม่เป็นของ 1 มัด
 ดังนั้น จะมีคนทั้งหมด 5 คน นั่งโต๊ะเป็นวงกลมได้ $(5-1)!$ แบบ
 ในแต่ละวิธีนี้ พ่อและแม่สามารถนั่งสลับได้ 2 แบบ
 ดังนั้น จะจัดสมาชิกครอบครัวนี้นั่งโต๊ะกลม โดยที่พ่อและแม่นั่งติดกัน ได้
 $(5-1)! \times 2 = 48$ แบบ
- 3) **วิธีที่ 1** เนื่องจากต้องการให้พ่อและแม่ไม่นั่งติดกัน จะสามารถทำได้ 2 ขั้นตอน ดังนี้
ขั้นตอนที่ 1 จัดลูก 4 คน นั่งรอบโต๊ะกลม ได้ $(4-1)!$ วิธี
ขั้นตอนที่ 2 จัดพ่อและแม่นั่งแทรกลูกทั้ง 4 คน ซึ่งมี 4 ตำแหน่ง ได้ $P_{4,2}$ วิธี
 ดังนั้น จะจัดสมาชิกครอบครัวนี้นั่งโต๊ะกลม โดยที่พ่อและแม่ไม่นั่งติดกัน ได้
 $(4-1)! \times P_{4,2} = 72$ วิธี
- วิธีที่ 2** เนื่องจากมีวิธีจัดสมาชิกครอบครัวนี้ นั่งรอบโต๊ะกลมได้ 120 วิธี
 และจากข้อ 2) จะมีวิธีจัดสมาชิกครอบครัวนี้ นั่งรอบโต๊ะกลม โดยให้พ่อ
 และแม่นั่ง ติดกัน ได้ 48 วิธี
 ดังนั้น จะจัดสมาชิกครอบครัวนี้นั่งโต๊ะกลม โดยที่พ่อและแม่ไม่นั่งติดกัน
 ได้ $120 - 48 = 72$ วิธี
4. จัดให้นักเรียนชาย 4 คน นั่งเป็นวงกลมก่อน ได้ $(4-1)!$ วิธี
 ต่อมาจัดนักเรียนหญิง 3 คน นั่งแทรกระหว่างนักเรียนชายซึ่งมีที่ว่าง 4 ตำแหน่ง ได้ $P_{4,3}$ วิธี
 ดังนั้น จะจัดนักเรียนชายและนักเรียนหญิงนั่งเป็นวงกลม โดยไม่ให้นักเรียนหญิงสองคนใด
 นั่งติดกัน ได้ $(4-1)! \times P_{4,3} = 144$ วิธี

แบบฝึกหัด 2.5

- ต้องการเลือกตัวแทนนักเรียน 5 คน จากนักเรียนกลุ่มหนึ่งซึ่งมี 8 คน ทำได้ $C_{8,5} = \frac{8!}{3!5!} = 56$ วิธี
- ต้องการเลือกทำข้อสอบ 4 ข้อ จากข้อสอบ 6 ข้อ ทำได้ $C_{6,4} = \frac{6!}{2!4!} = 15$ วิธี

3. 1) เนื่องจากมีผลไม้ในตะกร้าทั้งหมด 14 ผล
 ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกหยิบผลไม้ 4 ผล จากผลไม้ 14 ผล ในตะกร้า เป็น

$$\binom{14}{4} = 1,001 \text{ วิธี}$$
- 2) เนื่องจากต้องการหยิบได้เงาะทั้งสี่ผล จะได้
 หยิบเงาะ 4 ผล จากเงาะ 8 ผล ทำได้ $\binom{8}{4} = 70$ วิธี
 ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกหยิบผลไม้ 4 ผล จากตะกร้า โดยที่หยิบได้เงาะทั้งสี่ผล
 เป็น 70 วิธี
- 3) เนื่องจากต้องการให้หยิบไม่ได้ส้มเลย
 นั่นคือ หยิบผลไม้ 4 ผล จากผลไม้ 10 ผลที่ไม่ใช่ส้ม ในตะกร้า ทำได้ $\binom{10}{4} = 210$ วิธี
 ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกหยิบผลไม้ 4 ผล จากตะกร้า โดยที่หยิบไม่ได้ส้มเลย
 เป็น 210 วิธี
4. เนื่องจากต้องการหยิบลูกบอล 3 ลูก โดยที่ได้ลูกบอลทุกสี นั่นคือ หยิบได้สีละลูก
 หยิบลูกบอลสีแดง 1 ลูก จากลูกบอลสีแดง 5 ลูก ได้ $\binom{5}{1}$ วิธี
 หยิบลูกบอลสีขาวยellow 1 ลูก จากลูกบอลสีขาวยellow 3 ลูก ได้ $\binom{3}{1}$ วิธี
 และหยิบลูกบอลสีน้ำเงิน 1 ลูก จากลูกบอลสีน้ำเงิน 3 ลูก ได้ $\binom{3}{1}$ วิธี
 ดังนั้น จำนวนวิธีการหยิบลูกบอล โดยที่ได้ลูกบอลครบทุกสี เท่ากับ $\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{3}{1} = 45$ วิธี
5. 1) เนื่องจากมีไฟสีแดงและไฟสีดำอย่างละ 26 ใบ
 การหยิบไฟใบแรกได้ไฟสีแดงและใบที่สองได้ไฟสีดำ สามารถทำได้ดังนี้
ขั้นตอนที่ 1 เลือกไฟสีแดง 1 ใบ จากไฟสีแดง 26 ใบ ทำได้ $\binom{26}{1}$ วิธี
ขั้นตอนที่ 2 เลือกไฟสีดำ 1 ใบ จากไฟสีดำ 26 ใบ ทำได้ $\binom{26}{1}$ วิธี
 ดังนั้น จำนวนวิธีที่หยิบไฟใบแรกได้ไฟสีแดงและใบที่สองได้ไฟสีดำ เท่ากับ

$$\binom{26}{1}\binom{26}{1} = 676 \text{ วิธี}$$

- 2) เนื่องจากมีไฟ K ทั้งหมด 4 ใบ
การหยิบไฟได้ไฟ K ทั้งสองใบ สามารถทำได้ดังนี้
- ขั้นตอนที่ 1 เลือกไฟ K 1 ใบ จากไฟ K ทั้งหมด 4 ใบ ทำได้ $\binom{4}{1} = 4$ วิธี
- ขั้นตอนที่ 2 เลือกไฟ K 1 ใบ จากไฟ K ที่เหลือ 3 ใบ ทำได้ $\binom{3}{1} = 3$ วิธี
- ดังนั้น จำนวนวิธีที่หยิบไฟ K ทั้งสองใบ ทำได้ $4 \times 3 = 12$ วิธี
6. 1) เนื่องจากปรกรณ์ต้องได้รับเลือกให้เป็นกรรมการ
นั้นคือจะสามารถเลือกกรรมการได้อีก 2 คน จากสมาชิก 19 คน ซึ่งทำได้ $\binom{19}{2} = 171$ วิธี
- ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกกรรมการ โดยที่ปรกรณ์ต้องได้รับเลือกให้เป็นกรรมการ
เท่ากับ 171 วิธี
- 2) เลือกสามี หรือ ภรรยามาเป็นกรรมการได้ 2 วิธี
- แล้วจะสามารถเลือกกรรมการได้อีก 2 คน จากสมาชิก 18 คน ซึ่งทำได้ $\binom{18}{2}$ วิธี
- ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกกรรมการ โดยที่สามีภรรยาคู่หนึ่ง ได้รับเลือกเป็นกรรมการ
เพียงหนึ่งคน เท่ากับ $2 \times \binom{18}{2} = 306$ วิธี
7. วิธีที่ 1 การเลือกผู้แทน 3 คน จากคน 9 คน โดยต้องมีผู้ชายอย่างน้อย 1 คน แบ่งเป็น
3 กรณี ดังนี้
- กรณีที่ 1 มีผู้ชาย 1 คน
- เลือกผู้ชาย 1 คน จากผู้ชาย 4 คน ได้ $\binom{4}{1}$ วิธี
- เลือกผู้หญิง 2 คน จากผู้หญิง 5 คน ได้ $\binom{5}{2}$ วิธี
- ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกได้ผู้ชาย 1 คน เท่ากับ $\binom{4}{1} \binom{5}{2} = 40$ วิธี

กรณีที่ 2 มีผู้ชาย 2 คน

เลือกผู้ชาย 2 คน จากผู้ชาย 4 คน ได้ $\binom{4}{2}$ วิธี

เลือกผู้หญิง 1 คน จากผู้หญิง 5 คน ได้ $\binom{5}{1}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกได้ผู้ชาย 2 คน เท่ากับ $\binom{4}{2}\binom{5}{1} = 30$ วิธี

กรณีที่ 3 มีผู้ชาย 3 คน

เลือกผู้ชาย 3 คน จากผู้ชาย 4 คน ได้ $\binom{4}{3}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกได้ผู้ชาย 3 คน เท่ากับ $\binom{4}{3} = 4$ วิธี

จะได้ จำนวนวิธีเลือกผู้แทน 3 คน โดยต้องมีผู้ชายอย่างน้อย 1 คน เท่ากับ
 $40 + 30 + 4 = 74$ วิธี

วิธีที่ 2 วิธีเลือกผู้แทน 3 คน จากคน 9 คน ทำได้ $\binom{9}{3} = 84$

มีวิธีการเลือกผู้แทน 3 คน โดยเป็นผู้หญิงทั้งสามคน ได้ $\binom{5}{3} = 10$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกผู้แทน 3 คน โดยต้องมีผู้ชายอย่างน้อย 1 คน เท่ากับ
 $84 - 10 = 74$ วิธี

8. เนื่องจากต้องการให้มีมะละกอและละมุดรวมอยู่ด้วย

จึงจะพิจารณาว่าเลือกผลไม้ 2 ชนิด จาก 4 ชนิดที่เหลือ คือ แก้วมังกร ชมพู ฝรั่ง และน้อยหน่า

ซึ่งทำได้ $\binom{4}{2} = 6$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกผลไม้ 4 ชนิด ที่มีมะละกอและละมุดรวมอยู่ด้วย เท่ากับ 6 วิธี

9. การสร้างรูปหลายเหลี่ยมจากจุดบนวงกลม 6 จุด ทำได้ 4 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 สร้างรูปสามเหลี่ยม

$$\text{เลือกจุด 3 จุด จากจุด 6 จุด ได้ } \binom{6}{3} = 20 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 2 สร้างรูปสี่เหลี่ยม

$$\text{เลือกจุด 4 จุด จากจุด 6 จุด ได้ } \binom{6}{4} = 15 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 3 สร้างรูปห้าเหลี่ยม

$$\text{เลือกจุด 5 จุด จากจุด 6 จุด ได้ } \binom{6}{5} = 6 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 4 สร้างรูปหกเหลี่ยม

$$\text{เลือกจุด 6 จุด จากจุด 6 จุด ได้ } \binom{6}{6} = 1 \text{ วิธี}$$

ดังนั้น จำนวนวิธีสร้างรูปหลายเหลี่ยมแนบในวงกลมโดยใช้จุดเหล่านี้เป็นจุดยอด เท่ากับ
 $20 + 15 + 6 + 1 = 42$ วิธี

10. จากโจทย์ จะได้ว่ามีส้ม 6 ผล มังคุด 3 ผล และมะม่วง 1 ผล

การหยิบได้ผลไม้ชนิดละ 1 ผล ทำได้โดย

$$\text{หยิบส้ม 1 ผล จากส้ม 6 ผล ได้ } \binom{6}{1} \text{ วิธี}$$

$$\text{หยิบมังคุด 1 ผล จากมังคุด 3 ผล ได้ } \binom{3}{1} \text{ วิธี}$$

$$\text{หยิบมะม่วง 1 ผล จากมะม่วง 1 ผล ได้ } \binom{1}{1} \text{ วิธี}$$

ดังนั้น จำนวนวิธีหยิบผลไม้จากตะกร้าใบนี้จำนวน 3 ผล โดยหยิบผลไม้ได้ชนิดละ 1 ผล

$$\text{เท่ากับ } \binom{6}{1} \binom{3}{1} \binom{1}{1} = 18 \text{ วิธี}$$

แบบฝึกหัด 2.6

$$\begin{aligned}
 1. \quad 1) \quad (2x+3y)^5 &= \binom{5}{0}(2x)^5 + \binom{5}{1}(2x)^4(3y) + \binom{5}{2}(2x)^3(3y)^2 + \binom{5}{3}(2x)^2(3y)^3 \\
 &\quad + \binom{5}{4}(2x)(3y)^4 + \binom{5}{5}(3y)^5 \\
 &= (2x)^5 + 5(2x)^4(3y) + 10(2x)^3(3y)^2 + 10(2x)^2(3y)^3 \\
 &\quad + 5(2x)(3y)^4 + (3y)^5 \\
 &= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad (2x^2 - y)^5 &= (2x^2 + (-y))^5 \\
 &= \binom{5}{0}(2x^2)^5 + \binom{5}{1}(2x^2)^4(-y) + \binom{5}{2}(2x^2)^3(-y)^2 + \binom{5}{3}(2x^2)^2(-y)^3 \\
 &\quad + \binom{5}{4}(2x^2)(-y)^4 + \binom{5}{5}(-y)^5 \\
 &= (2x^2)^5 - 5(2x^2)^4y + 10(2x^2)^3y^2 - 10(2x^2)^2y^3 + 5(2x^2)y^4 - y^5 \\
 &= 32x^{10} - 80x^8y + 80x^6y^2 - 40x^4y^3 + 10x^2y^4 - y^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \left(3x - \frac{2}{y}\right)^7 &= \left(3x + \left(-\frac{2}{y}\right)\right)^7 \\
 &= \binom{7}{0}(3x)^7 + \binom{7}{1}(3x)^6\left(-\frac{2}{y}\right) + \binom{7}{2}(3x)^5\left(-\frac{2}{y}\right)^2 + \binom{7}{3}(3x)^4\left(-\frac{2}{y}\right)^3 \\
 &\quad + \binom{7}{4}(3x)^3\left(-\frac{2}{y}\right)^4 + \binom{7}{5}(3x)^2\left(-\frac{2}{y}\right)^5 + \binom{7}{6}(3x)\left(-\frac{2}{y}\right)^6 + \binom{7}{7}\left(-\frac{2}{y}\right)^7 \\
 &= (3x)^7 - 7(3x)^6\left(\frac{2}{y}\right) + 21(3x)^5\left(\frac{2}{y}\right)^2 - 35(3x)^4\left(\frac{2}{y}\right)^3 + 35(3x)^3\left(\frac{2}{y}\right)^4 \\
 &\quad - 21(3x)^2\left(\frac{2}{y}\right)^5 + 7(3x)\left(\frac{2}{y}\right)^6 - \left(\frac{2}{y}\right)^7 \\
 &= 2187x^7 - \frac{10206x^6}{y} + \frac{20412x^5}{y^2} - \frac{22680x^4}{y^3} + \frac{15120x^3}{y^4} - \frac{6048x^2}{y^5} \\
 &\quad + \frac{1344x}{y^6} - \frac{128}{y^7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{y}\right)^4 &= \binom{4}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^3\left(\frac{3}{y}\right) + \binom{4}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{3}{y}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{y}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(\frac{3}{y}\right)^4 \\
 &= \left(\frac{x}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{x}{2}\right)^3\left(\frac{3}{y}\right) + 6\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{3}{y}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{y}\right)^3 + \left(\frac{3}{y}\right)^4 \\
 &= \frac{x^4}{16} + \frac{3x^3}{2y} + \frac{27x^2}{2y^2} + \frac{54x}{y^3} + \frac{81}{y^4}
 \end{aligned}$$

2. จากทฤษฎีบททวินาม พจน์ที่มี x^6y^4 คือ

$$\begin{aligned}
 \binom{10}{4}(2x)^6(3y)^4 &= 210(2x)^6(3y)^4 \\
 &= (210)2^63^4x^6y^4
 \end{aligned}$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ x^6y^4 คือ $(210)2^63^4$

3. จากทฤษฎีบททวินาม พจน์ที่มี x^5y^{16} คือ

$$\begin{aligned}
 \binom{13}{8}(x)^5(2y^2)^8 &= 1287(x)^5(2y^2)^8 \\
 &= (1287)2^8x^5y^{16}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ x^5y^{16} คือ $(1287)2^8$

4. จากทฤษฎีบททวินาม พจน์ที่มี x^9y^{14} คือ

$$\begin{aligned}
 \binom{10}{7}(x^3)^3(-3y^2)^7 &= -120(x^3)^3(3y^2)^7 \\
 &= -(120)3^7x^9y^{14}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ x^9y^{14} คือ $-(120)3^7$

5. จากทฤษฎีบททวินาม พจน์ที่มี x^7 คือ

$$\begin{aligned}
 \binom{10}{3}(2x)^7(-3)^3 &= -120(2x)^7(3)^3 \\
 &= -(120)2^73^3x^7
 \end{aligned}$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ x^7 คือ $-(120)2^73^3$

6. จากทฤษฎีบททวินาม พจน์ที่ $k+1$ คือ

$$\begin{aligned} \binom{6}{k} \left(\frac{x^2}{4} \right)^{6-k} \left(-\frac{3}{x} \right)^k &= \binom{6}{k} \cdot \frac{x^{12-2k}}{4^{6-k}} \cdot \frac{(-3)^k}{x^k} \\ &= \binom{6}{k} \cdot \frac{(-3)^k}{4^{6-k}} \cdot x^{12-2k-k} \\ &= \binom{6}{k} \cdot \frac{(-3)^k}{4^{6-k}} \cdot x^{12-3k} \end{aligned}$$

ให้ $12-3k=0$ จะได้ $k=4$

ดังนั้น พจน์ที่ไม่มี x คือ พจน์ที่ 5

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } \binom{6}{4} \left(\frac{x^2}{4} \right)^2 \left(-\frac{3}{x} \right)^4 &= 15 \left(\frac{x^2}{4} \right)^2 \left(\frac{3}{x} \right)^4 \\ &= 15 \left(\frac{1}{16} \right) (3^4) \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ไม่มี x คือ $\frac{1215}{16}$

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เกิดจากการเรียงกระเบื้องข้างต้น มี 6 ขนาด ได้แก่

ขนาดที่ 1	รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า		มีทั้งหมด 6 รูป
ขนาดที่ 2	รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า		มีทั้งหมด 3 รูป
ขนาดที่ 3	รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า		มีทั้งหมด 6 รูป
ขนาดที่ 4	รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า		มีทั้งหมด 3 รูป
ขนาดที่ 5	รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า		มีทั้งหมด 2 รูป
ขนาดที่ 6	รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า		มีทั้งหมด 2 รูป

ดังนั้น การจัดเรียงกระเบื้องข้างต้น มีรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งหมด $6+3+6+3+2+2=22$ รูป

2. ผู้โดยสารจะลงเรือข้ามฟากเที่ยวไปและเที่ยวกลับ มี 2 ขั้นตอน คือ
 - ขั้นตอนที่ 1 ผู้โดยสารลงเรือข้ามฟากเที่ยวไป ได้ 3 วิธี
 - ขั้นตอนที่ 2 ผู้โดยสารลงเรือข้ามฟากเที่ยวกลับโดยไม่ซ้ำกับเที่ยวไป ได้ 2 วิธี
 ดังนั้น จำนวนวิธีที่ผู้โดยสารจะข้ามฟากโดยที่เที่ยวไปและเที่ยวกลับลงเรือไม่ซ้ำลำกัน เท่ากับ $3 \times 2 = 6$ วิธี
3. หมายเลขที่นั่งในสนามกีฬาแห่งนี้ มีองค์ประกอบ 3 ส่วน
 - ส่วนที่ 1 ระบุโซนที่นั่ง มี 20 โซน
 - ส่วนที่ 2 ระบุแถวในโซน มี 26 แถว
 - ส่วนที่ 3 ระบุตำแหน่งที่นั่งในแถว มี 30 ที่นั่ง
 ดังนั้น จำนวนที่นั่งทั้งหมดในสนามกีฬาแห่งนี้ เท่ากับ $20 \times 26 \times 30 = 15,600$ ที่นั่ง
4.
 - 1) การตกทายระหว่างผู้แทนไทยและเจ้าภาพจีนเกิดขึ้นทั้งหมด $25 \times 15 = 375$ ครั้ง
 - 2) การตกทายระหว่างผู้แทนไทยและเจ้าภาพญี่ปุ่นเกิดขึ้นทั้งหมด $24 \times 10 = 240$ ครั้ง
 - 3) การตกทายตลอดการเดินทางเกิดขึ้นทั้งหมด $375 + 240 = 615$ ครั้ง
5.
 - 1) รหัสประจำตัวพนักงาน มีองค์ประกอบ 2 ส่วน ดังนี้
 - ส่วนที่ 1 ตัวอักษรภาษาอังกฤษ 1 ตัว มีได้ 26 ตัว
 - ส่วนที่ 2 เลขโดด 3 ตัว ที่ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด โดยเลขโดดซ้ำกันได้ มี 999 จำนวน
 ดังนั้น รหัสประจำตัวของพนักงานบริษัทแห่งนี้มีได้ทั้งหมด $26 \times 999 = 25,974$ รหัส
 - 2) รหัสประจำตัวพนักงาน มีองค์ประกอบ 2 ส่วน ดังนี้
 - ส่วนที่ 1 ตัวอักษรภาษาอังกฤษ 1 ตัว มีได้ 26 ตัว
 - ส่วนที่ 2 เลขโดด 3 ตัว ที่ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด โดยไม่มีเลขโดดที่ซ้ำกัน มีได้ $10 \times 9 \times 8 = 720$ จำนวน
 ดังนั้น รหัสประจำตัวของพนักงานบริษัทแห่งนี้มีได้ทั้งหมด $26 \times 720 = 18,720$ รหัส
6. หมายเลขทะเบียนรถยนต์นั่งส่วนบุคคลในกรุงเทพมหานคร ประกอบด้วย 3 ส่วน ดังนี้
 - ส่วนที่ 1 เลขโดดที่ไม่ใช่ 0 มีได้ 9 ตัว
 - ส่วนที่ 2 พยัญชนะไทย 2 ตัว ที่ไม่ใช่ ง จ น ศ พ ตด มีได้ $(35 \times 35) - 4$ แบบ
 - ส่วนที่ 3 จำนวนเต็มบวกที่ไม่เกิน 4 หลัก มีได้ 9,999 จำนวน
 ดังนั้น หมายเลขทะเบียนรถยนต์นั่งส่วนบุคคลในกรุงเทพมหานคร มีได้สูงสุด $9 \times ((35 \times 35) - 4) \times 9,999 = 109,879,011$ หมายเลข
7. เนื่องจากข้อสอบแต่ละข้อ นักเรียนสามารถตอบได้ 2 วิธี
 ดังนั้น จำนวนวิธีที่นักเรียนคนนี้ทำข้อสอบชุดนี้ โดยตอบคำถามครบทุกข้อ เท่ากับ $2^{10} = 1,024$ วิธี

8. เนื่องจากจุด 1 จุด สามารถแทนการปรากฏของจุดนูนและแทนการไม่ปรากฏของจุดนูน นั่นคือจุด 1 จุด มีลักษณะที่เป็นไปได้ 2 รูปแบบ
 จะได้ว่า ลักษณะของเซลล์ที่เป็นไปได้มีทั้งหมด 2^6 รูปแบบ
 แต่อักษรเบรลล์แต่ละเซลล์ต้องมีจุดนูนอย่างน้อย 1 ตำแหน่ง
 ซึ่งรูปแบบที่ทั้ง 6 จุด ไม่มีจุดนูน มี 1 รูปแบบ
 ดังนั้น รูปแบบที่เป็นไปได้สำหรับแต่ละเซลล์ เท่ากับ $2^6 - 1 = 63$ รูปแบบ
9. เขียนตารางแสดงแต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกสองครั้ง ได้ดังนี้

ครั้งที่ 1 \ ครั้งที่ 2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

- 1) จากตาราง จำนวนวิธีที่ผลรวมของแต้มเท่ากับเจ็ด เป็น 6 วิธี
- 2) **วิธีที่ 1** จากตาราง จำนวนวิธีที่ผลรวมของแต้มไม่เท่ากับเจ็ด เป็น 30 วิธี
วิธีที่ 2 เนื่องจาก จำนวนวิธีที่ได้แต้มจากการทอดลูกเต๋าสองครั้ง เป็น 36 วิธี
 และจำนวนวิธีที่ผลรวมของแต้มเท่ากับเจ็ด เป็น 6 วิธี
 ดังนั้น จำนวนวิธีที่ผลรวมของแต้มไม่เท่ากับเจ็ด เป็น $36 - 6 = 30$ วิธี
10. จำนวนวิธีในการเรียงหนังสือ 4 เล่ม จาก 6 เล่ม เป็นแถวบนชั้นวางหนังสือชั้นหนึ่ง
 เป็น $P_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$ วิธี
11. จำนวนวิธีในการเลือกกรรมการชุดนี้ 4 คน เพื่อทำหน้าที่ต่างกัน จากผู้เข้าสมัคร 50 คน
 เป็น $P_{50,4} = \frac{50!}{(50-4)!} = 5,527,200$ วิธี
12. มีตัวอักษรทั้งหมด 11 ตัว
 มีตัวอักษร M, A และ T อย่างละ 2 ตัว
 และมีตัวอักษร H, E, I, C และ S อย่างละ 1 ตัว

- 1) เนื่องจากต้องการให้ตัวอักษรตัวแรกและตัวสุดท้ายเป็นสระเดียวกัน และเนื่องจากสระที่มี 2 ตัว คือ ตัวอักษร A จะจัด A ให้อยู่ในตำแหน่งแรกและตำแหน่งสุดท้ายได้ 1 วิธี จะได้ว่าเหลือตัวอักษรที่นำมาเรียงระหว่าง A ทั้งสองตัว 9 ตัว ดังนั้น จำนวนวิธีการเรียงตัวอักษร โดยที่อักษรตัวแรกและอักษรตัวสุดท้ายเป็นสระเดียวกัน เท่ากับ $\frac{9!}{2!2!1!1!1!1!1!} = 90,720$ วิธี

- 2) เนื่องจากต้องการให้พยัญชนะเดียวกันอยู่ติดกัน จึงพิจารณาว่าพยัญชนะเดียวกันเป็นตัวอักษร 1 ตัว ดังนั้น จะมีตัวอักษรอยู่ 9 ตัว โดยมีเพียงตัวอักษร A ที่มี 2 ตัว ดังนั้น จำนวนวิธีการจัดเรียงตัวอักษร โดยที่พยัญชนะเหมือนกันอยู่ติดกัน เท่ากับ $\frac{9!}{2!1!1!1!1!1!1!1!} = 181,440$ วิธี

- 3) เนื่องจากตัวอักษรตัวแรกเป็นสระ จะมี 3 กรณี คือ
- กรณีที่ 1** ตัวอักษรตัวแรกเป็น A

จะได้ว่า มีวิธีจัดเรียงตัวอักษรที่เหลือทั้งหมด $\frac{10!}{2!2!1!1!1!1!1!1!} = 907,200$ วิธี

- กรณีที่ 2** ตัวอักษรตัวแรกเป็น E

จะได้ว่า มีวิธีจัดเรียงตัวอักษรที่เหลือทั้งหมด $\frac{10!}{2!2!2!1!1!1!1!1!} = 453,600$ วิธี

- กรณีที่ 3** ตัวอักษรตัวแรกเป็น I

จะได้ว่า มีวิธีจัดเรียงตัวอักษรที่เหลือทั้งหมด $\frac{10!}{2!2!2!1!1!1!1!1!} = 453,600$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีการเรียงตัวอักษร โดยที่ตัวอักษรตัวแรกเป็นสระ เท่ากับ

$$907,200 + 453,600 + 453,600 = 1,814,400 \text{ วิธี}$$

13. 1)

หลักแสน	หลักหมื่น	หลักพัน	หลักร้อย	หลักสิบ	หลักหน่วย

เลขโดดในหลักแสนต้องเป็นเลข 4

และจัดเรียงเลขโดดที่เหลือได้ $\frac{5!}{1!1!3!} = 20$ วิธี

ดังนั้น สร้างจำนวน 6 หลัก ที่อยู่ระหว่าง 400,000 ถึง 500,000 ได้ 20 จำนวน

- 2) เลขโดดในหลักแสนต้องเป็นเลข 5

และจัดเรียงเลขโดดที่เหลือได้ $\frac{5!}{1!2!2!} = 30$ วิธี

ดังนั้น สร้างจำนวน 6 หลัก ที่มากกว่า 500,000 ได้ 30 จำนวน

- 3) การสร้างจำนวนที่มากกว่า 400,000 และเป็นจำนวนคู่ มี 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 เลขโดดในหลักแสนเป็นเลข 4

เลขโดดในหลักหน่วยเป็นเลข 0 หรือ 4 ได้ 2 วิธี

และจัดเรียงเลขโดดที่เหลือได้ $\frac{4!}{3!1!}$ วิธี

ดังนั้น สร้างจำนวนดังกล่าวได้ $2 \times \frac{4!}{3!1!} = 8$ จำนวน

กรณีที่ 2 เลขโดดในหลักแสนเป็นเลข 5

กรณีย่อยที่ 2.1 เลขโดดในหลักหน่วยเป็น 0

จัดเรียงเลขโดดที่เหลือได้ $\frac{4!}{2!2!}$ วิธี

ดังนั้น สร้างจำนวนดังกล่าวได้ $\frac{4!}{2!2!} = 6$ วิธี

กรณีย่อยที่ 2.2 เลขโดดในหลักหน่วยเป็น 4

จัดเรียงเลขโดดที่เหลือได้ $\frac{4!}{2!1!1!}$ วิธี

ดังนั้น สร้างจำนวนดังกล่าวได้ $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$ วิธี

ดังนั้น สร้างจำนวนดังกล่าวได้ $6 + 12 = 18$ จำนวน

จะได้ว่า สร้างจำนวน 6 หลัก ที่มากกว่า 400,000 และเป็นจำนวนคู่ได้ $8 + 18 = 26$ จำนวน

14. เนื่องจากต้องการให้หลอดไฟสีเดียวกันอยู่ติดกัน

จะพิจารณาว่าหลอดไฟสีเดียวกันมัดติดกัน และคิดเป็นสิ่งของ 1 ชิ้น

ดังนั้น จะมีหลอดไฟอยู่ 3 มัด จัดเรียงเป็นวงกลมได้ $(3-1)!$ วิธี

ในแต่ละวิธีนี้ มัดที่เป็นหลอดไฟสีแดงที่ต่างกัน 2 หลอด จัดเรียงได้ $2!$ วิธี

มัดที่เป็นหลอดไฟสีเหลืองที่ต่างกัน 3 หลอด จัดเรียงได้ $3!$

และมัดที่เป็นหลอดไฟสีน้ำเงินที่ต่างกัน 4 หลอด จัดเรียงได้ $4!$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดหลอดไฟเป็นวงกลมโดยให้หลอดไฟสีเดียวกันอยู่ติดกัน เท่ากับ

$$(3-1)!2!3!4! = 576 \text{ วิธี}$$

15. เนื่องจากต้องการให้หลอดไฟสีแดงอยู่ติดกัน
จะพิจารณาว่าหลอดไฟสีแดงทั้ง 3 หลอดมัดรวมกัน เป็นสิ่งของ 1 มัด
ดังนั้น จะมีหลอดไฟอยู่ทั้งหมด 7 หลอด จัดเรียงได้ $\frac{7!}{1!4!2!}$ วิธี
ในแต่ละวิธี มัดที่เป็นหลอดไฟสีแดงที่ต่างกัน จัดเรียงได้ 3! วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีจัดหลอดไฟทั้งหมดโดยให้หลอดไฟสีแดงอยู่ติดกัน เท่ากับ $\frac{7!}{1!4!2!} \times 3! = 630$ วิธี
16. 1) เนื่องจากต้องการให้กุล กิ่ง และกึ่งนั่งติดกัน
จะพิจารณาว่าทั้งสามคนมัดติดกัน โดยคิดเป็นนักเรียน 1 คน
ดังนั้น จะมีนักเรียนอยู่ 8 คน ซึ่งจัดเรียงเป็นวงกลมได้ $(8-1)!$ วิธี
แต่ละวิธีนี้ ทั้งสามคน จะจัดเรียงได้ 3! วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีจัดนักเรียนทั้ง 10 คน นั่งรอบโต๊ะกลม โดยที่กุล กิ่ง และกึ่งนั่งติดกัน
เท่ากับ $(8-1)! \times 3! = 30,240$ วิธี
- 2) จัดนักเรียน 7 คน นั่งเป็นวงกลมก่อน ได้ $(7-1)!$ วิธี
ต่อมาจัดกุล กิ่ง และกึ่ง ให้นั่งแทรกระหว่างนักเรียน 7 คนนั้น ซึ่งมีตำแหน่งที่แทรกได้
7 ที่นั่ง จะจัดได้ $P_{7,3}$ วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีจัดนักเรียนทั้ง 10 คน นั่งรอบโต๊ะกลม โดยที่ไม่มีสองคนใดในกุล กิ่ง
และกึ่ง นั่งติดกัน เท่ากับ $(7-1)! \times P_{7,3} = 151,200$ วิธี
- 3) จัดนักเรียน 7 คน นั่งเป็นวงกลมก่อน ได้ $(7-1)!$ วิธี
เนื่องจากต้องการให้กุลและกึ่งนั่งติดกัน จะพิจารณาให้ทั้งสองคนนี้มัดติดกันโดยคิด
เป็นนักเรียน 1 คน ซึ่งจะจัดแทรกระหว่างนักเรียน 7 คน ได้ $P_{7,2}$ วิธี
แต่ละวิธีนี้ กุลและกึ่งนั่งสลับที่กันได้อีก 2! วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีจัดนักเรียนทั้ง 10 คน นั่งรอบโต๊ะกลม โดยที่กุลและกึ่งนั่งติดกัน
แต่กึ่งไม่นั่งติดกับทั้งกุลและกิ่ง เท่ากับ $(7-1)! \times P_{7,2} \times 2 = 60,480$ วิธี
17. เลือกจุด 2 จุด จากจุด 10 จุด ทำได้ $\binom{10}{2} = 45$ แบบ
ดังนั้น สามารถลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด 2 จุด จากจุด 10 จุด ได้ 45 เส้น

18. 1) เนื่องจากชมรมหมากรุกมีสมาชิกทั้งหมด 10 คน

การจับคู่เล่นหมากรุกจะต้องเลือกคนมา 2 คน จาก 10 คนนี้ ทำได้ $\binom{10}{2} = 45$ แบบ

ดังนั้น จำนวนวิธีการจับคู่เล่นหมากรุก เท่ากับ 45 วิธี

2) เนื่องจากต้องการให้เพศตรงข้ามห้ามจับคู่กัน แบ่งได้ 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 ผู้ชายจับคู่กับผู้ชาย

เลือกชาย 2 คน จากชาย 6 คน ทำได้ $\binom{6}{2} = 15$ วิธี

กรณีที่ 2 ผู้หญิงจับคู่กับผู้หญิง

เลือกหญิง 2 คน จากหญิง 4 คน ทำได้ $\binom{4}{2} = 6$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีในการจับคู่เล่นหมากรุก โดยที่เพศตรงข้ามกันห้ามจับคู่กัน เท่ากับ

$$15 + 6 = 21 \text{ วิธี}$$

19. ต้องการเลือกคณะกรรมการ โดยต้องมีผู้ชายอย่างน้อย 2 คน แบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 มีผู้ชาย 2 คน

เลือกผู้ชาย 2 คน จากผู้ชาย 4 คน ได้ $\binom{4}{2}$ วิธี

และเลือกผู้หญิง 1 คน จากผู้หญิง 5 คน ได้ $\binom{5}{1}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกคณะกรรมการ 3 คน โดยมีผู้ชาย 2 คน เท่ากับ

$$\binom{4}{2} \binom{5}{1} = 30 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 2 มีผู้ชาย 3 คน

เลือกผู้ชาย 3 คน จากผู้ชาย 4 คน ได้ $\binom{4}{3}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกคณะกรรมการเป็นผู้ชาย 3 คน เท่ากับ 4 วิธี

จะได้ จำนวนวิธีในการเลือกคณะกรรมการ 3 คน โดยต้องมีผู้ชายอย่างน้อย 2 คน เท่ากับ

$$30 + 4 = 34 \text{ วิธี}$$

20. ต้องการเลือกนักเรียน 10 คน มาเป็นวงกลม ทำได้ 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกนักเรียน 10 คน จากนักเรียน 40 คน ทำได้ $\binom{40}{10}$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดนักเรียน 10 คนที่เลือกมา เป็นวงกลม ทำได้ $(10-1)!$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีการจัดนักเรียน 10 คน มาเป็นวงกลม เท่ากับ

$$\binom{40}{10} \times (10-1)! = \binom{40}{10} \times 9! \text{ วิธี}$$

21. การจอดรถของฝนและฝัน โดยให้จอดห่างกันหนึ่งช่อง แบ่งเป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 ถ้าฝนจอดช่องที่ 1, 2, 9 หรือ 10 ฝันจะจอดได้เพียง 1 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจอดรถห่างกันหนึ่งช่อง เท่ากับ 4 วิธี

กรณีที่ 2 ถ้าฝนจอดช่องที่ 3, 4, 5, 6, 7 หรือ 8 ฝันจะจอดได้ 2 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจอดรถห่างกันหนึ่งช่อง เท่ากับ 12 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีการจอดรถของฝนและฝัน โดยต้องการจอดห่างกันหนึ่งช่อง เท่ากับ

$$4 + 12 = 16 \text{ แบบ}$$

22. เนื่องจากคะแนนเต็ม 10 คะแนน ถ้าต้องการได้คะแนนสอบ 70% จะต้องทำได้ 7 คะแนน ซึ่งแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 ตอบข้อ 1 หรือข้อ 6 ถูก อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ทำได้ $\binom{2}{1} = 2$ วิธี

และทำข้ออื่นๆ ถูกอีก 4 ข้อ ทำได้ $\binom{4}{4} = 1$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่ทำคะแนนได้ 7 คะแนน เท่ากับ $2 \times 1 = 2$ วิธี

กรณีที่ 2 ตอบข้อ 1 และข้อ 6 ถูกทั้งสองข้อ ทำได้ 1 วิธี

และทำข้ออื่นๆ ถูกอีกเพียง 1 ข้อ ทำได้ $\binom{4}{1} = 4$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่ทำคะแนนได้ 7 คะแนน เท่ากับ 4 วิธี

จะได้ จำนวนวิธีที่นักเรียนคนหนึ่งจะได้คะแนนสอบของวิชานี้ 70% พอดี เท่ากับ $2 + 4 = 6$ วิธี

23. เนื่องจากมีนักกีฬา 3 สาย สายละ 4 คน

ในแต่ละสาย จัดการแข่งขันแบบพบกันหมด ซึ่งจะจัดการแข่งขันได้ $\binom{4}{2} = 6$ คู่

จะได้ว่า ในรอบคัดเลือก จะมีการแข่งขันทั้งหมด $3 \times 6 = 18$ คู่

เนื่องจากในรอบคัดเลือก ทำการแข่งขันวันละ 6 คู่

จะได้ว่า การแข่งขันในรอบคัดเลือกใช้เวลา $18 \div 6 = 3$ วัน

และจะมีผู้ที่เข้ารอบต่อไปเพียง 6 คน ซึ่งจะจัดการแข่งขันได้ $\binom{6}{2} = 15$ คู่

เนื่องจากในรอบที่สองนี้ ทำการแข่งขันวันละ 3 คู่

จะได้ว่า การแข่งขันในรอบที่สองใช้เวลา $15 \div 3 = 5$ วัน

ดังนั้น การแข่งขันแบบมินตันครั้งนี้จะต้องใช้เวลาทั้งหมด $3 + 5 = 8$ วัน จึงจะได้ผู้ชนะเลิศ

24. 1) จำนวนวิธีที่นักท่องเที่ยวนั่งรถโดยสารไปเที่ยวน้ำตก เท่ากับ $\frac{9!}{2!2!5!} = 756$ วิธี

2) เนื่องจากจำนวนที่นั่งว่างของรถโดยสารทั้งสามคันมี 10 ที่ ซึ่งมีจำนวนมากกว่านักท่องเที่ยว นั่นคือ จะมีที่นั่งว่างเหลือ 1 ที่ ในรถโดยสารคันใดคันหนึ่ง ซึ่งพิจารณาได้ 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 รถโดยสารคันที่ 1 เหลือที่ว่าง 1 ที่

จะได้ว่า จำนวนวิธีที่นักท่องเที่ยวนั่งรถโดยสาร เท่ากับ

$$\frac{9!}{1!3!5!} = 504 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 2 รถโดยสารคันที่ 2 เหลือที่ว่าง 1 ที่

จะได้ว่า จำนวนวิธีที่นักท่องเที่ยวนั่งรถโดยสาร เท่ากับ

$$\frac{9!}{2!2!5!} = 756 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 3 รถโดยสารคันที่ 3 เหลือที่ว่าง 1 ที่

จะได้ว่า จำนวนวิธีที่นักท่องเที่ยวนั่งรถโดยสาร เท่ากับ

$$\frac{9!}{2!3!4!} = 1,260 \text{ วิธี}$$

ดังนั้น จำนวนวิธีที่นักท่องเที่ยวนั่งรถโดยสารไปเที่ยวน้ำตก เท่ากับ

$$504 + 756 + 1,260 = 2,520 \text{ วิธี}$$

25. การจัดเรียงลูกบอล 4 ลูก มาเรียงในแนวเส้นตรง แบ่งเป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 มีลูกบอลสีดำ 1 ลูก

จะได้ว่า มีลูกบอลสีดำ สีแดง สีขาว และสีเหลือง อย่างละ 1 ลูก

นำมาจัดเรียงในแนวเส้นตรงได้ $4! = 24$ วิธี

กรณีที่ 2 มีลูกบอลสีดำ 2 ลูก

เลือกสีลูกบอลเป็นลูกบอลสีดำ 2 ลูกและลูกบอลสีอื่นอีก 2 ลูก ได้ $1 \times \binom{3}{2} = 3$ วิธี

จะได้ว่า มีลูกบอลสีดำ 2 ลูก และสีอื่นๆ 2 สี สีละ 1 ลูก

นำมาจัดเรียงในแนวเส้นตรงได้ $\frac{4!}{2!1!1!}$ วิธี

ดังนั้น จะจัดเรียงลูกบอลในแนวเส้นตรงได้ $3 \times \frac{4!}{2!1!1!} = 36$ วิธี

กรณีที่ 3 มีลูกบอลสีดำ 3 ลูก

เลือกสีลูกบอลเป็นลูกบอลสีดำ 3 ลูกและลูกบอลสีอื่นอีก 1 ลูก ได้ $1 \times \binom{3}{1} = 3$ วิธี

จะได้ว่า มีลูกบอลสีดำ 3 ลูก และสีอื่นๆ 1 สี อีก 1 ลูก

นำมาจัดเรียงในแนวเส้นตรงได้ $\frac{4!}{3!1!}$ วิธี

ดังนั้น จะจัดเรียงลูกบอลในแนวเส้นตรงได้ $3 \times \frac{4!}{3!1!} = 12$ วิธี

จะได้ จำนวนวิธีในการนำลูกบอล 4 ลูก มาจัดเรียงในแนวเส้นตรง เท่ากับ $24 + 36 + 12 = 72$ วิธี

26. การสร้างรหัสผ่านอีเมล ประกอบด้วย 2 ส่วน ได้แก่

ส่วนที่ 1 ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก

มีตัวอักษรทั้งหมด 8 ตัว

มีตัวอักษร p, i, n และ g อย่างละ 2 ตัว

สามารถสร้างรหัสได้ $\frac{8!}{2!2!2!2!} = 2,520$ วิธี

ส่วนที่ 2 เลขโดด 2 ตัวท้าย มีได้ $10 \times 10 = 100$ จำนวน

ดังนั้น ปังปังมีวิธีการสร้างรหัสผ่านอีเมลได้ทั้งหมด $2,520 \times 100 = 252,000$ วิธี

27. การนั่งรับประทานอาหารให้ตรงกับเงื่อนไข แบ่งเป็นกรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ไม่มีสามภรรยาคนใดนั่งติดกัน นั่นคือ ทุกคู่นั่งตรงข้ามกัน

มัดแต่ละคู่ให้เป็น 1 คน จะสามารถจัดได้ 5! วิธี

ในแต่ละคู่สามภรรยาสามารถนั่งสลับกันได้ 2 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีในการนั่ง มี $5! \times 2^5 = 3,840$ วิธี

กรณีที่ 2 มีสามภรณยานั่งติดกัน 2 คู่ นั่นคือ มี 3 คู่ ที่นั่งตรงข้ามกัน

เลือกสามภรรยา 2 คู่ จาก 5 คู่ มานั่งติดกันได้ $\binom{5}{2}$ วิธี

คู่สามภรรยา 2 คู่ ที่นั่งติดกัน นั่งได้ 4 ตำแหน่ง และสลับกันได้ 2 วิธี

เลือกตำแหน่งที่ว่างให้สามภรรยาที่นั่งตรงข้ามกัน ได้ 3! วิธี

ในแต่ละคู่สามภรรยาสามารถนั่งสลับกันได้ 2 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีในการนั่ง มี $\binom{5}{2} \times 4 \times 2 \times 3! \times 2^5 = 15,360$ วิธี

กรณีที่ 3 มีสามภรรยาที่นั่งติดกัน 4 คู่ นั่นคือ มี 1 คู่ นั่งตรงข้ามกัน

เลือกสามภรรยา 4 คู่ จาก 5 คู่ มานั่งติดกันได้ $\binom{5}{4}$ วิธี

คู่สามภรรยาที่นั่งติดกัน 4 คู่ นั่งได้ 3 ตำแหน่ง และสลับกันได้ 4! วิธี

เลือกตำแหน่งที่ว่างในสามภรณยานั่งตรงข้ามกันได้ 1 วิธี

ในแต่ละคู่สามภรรยาสามารถนั่งสลับกันได้ 2 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีในการนั่ง มี $\binom{5}{4} \times 3 \times 4! \times 2^5 = 11,520$ วิธี

จะได้ว่า จำนวนวิธีในการนั่งรับประทานอาหารทั้งหมด มี $3,840 + 15,360 + 11,520 = 30,720$ วิธี

28. เนื่องจากประเทศไทยมี 76 จังหวัด และดารณีนมีเพื่อนสนิทอยู่ 12 จังหวัด

จะได้ว่า จังหวัดที่ดารณีนไม่มีเพื่อนสนิทอยู่มี 64 จังหวัด

1) ไปเที่ยวจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่ 2 จังหวัด และจังหวัดที่ไม่มีเพื่อนสนิทอยู่อีก 3 จังหวัด

เลือกจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่ 2 จังหวัด จาก 12 จังหวัด ได้ $\binom{12}{2}$ วิธี

เลือกจังหวัดที่ไม่มีเพื่อนสนิทอยู่ 3 จังหวัด จาก 64 จังหวัด ได้ $\binom{64}{3}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีการเลือกจังหวัดที่ดารณีนไปเที่ยวมีเพื่อนสนิทอยู่ 2 จังหวัด เท่ากับ

$$\binom{12}{2} \binom{64}{3} = 2,749,824 \text{ วิธี}$$

- 2) **วิธีที่ 1** ต้องการไปเที่ยวจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่อย่างน้อย 1 จังหวัด แบ่งได้ 5 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ไปเที่ยวจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่ 1 จังหวัด และจังหวัดที่ไม่มีเพื่อนสนิทอยู่อีก 4 จังหวัด
เลือกจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่ 1 จังหวัด จาก 12 จังหวัด ได้ 12 วิธี
เลือกจังหวัดที่ไม่มีเพื่อนสนิทอยู่ 4 จังหวัด จาก 64 จังหวัด ได้ $\binom{64}{4}$ วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีการเลือกจังหวัดที่ดารณีไปเที่ยวมีเพื่อนสนิทอยู่ 1 จังหวัด เท่ากับ $12\binom{64}{4}$ วิธี

กรณีที่ 2 ไปเที่ยวจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่ 2 จังหวัด และจังหวัดที่ไม่มีเพื่อนสนิทอยู่อีก 3 จังหวัด
เลือกจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่ 2 จังหวัด จาก 12 จังหวัด ได้ $\binom{12}{2}$ วิธี
เลือกจังหวัดที่ไม่มีเพื่อนสนิทอยู่ 3 จังหวัด จาก 64 จังหวัด ได้ $\binom{64}{3}$ วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีการเลือกจังหวัดที่ดารณีไปเที่ยวมีเพื่อนสนิทอยู่ 2 จังหวัด เท่ากับ $\binom{12}{2}\binom{64}{3}$ วิธี

กรณีที่ 3 ไปเที่ยวจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่ 3 จังหวัด และจังหวัดที่ไม่มีเพื่อนสนิทอยู่อีก 2 จังหวัด
เลือกจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่ 3 จังหวัด จาก 12 จังหวัด ได้ $\binom{12}{3}$ วิธี
เลือกจังหวัดที่ไม่มีเพื่อนสนิทอยู่ 2 จังหวัด จาก 64 จังหวัด ได้ $\binom{64}{2}$ วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีการเลือกจังหวัดที่ดารณีไปเที่ยวมีเพื่อนสนิทอยู่ 3 จังหวัด เท่ากับ $\binom{12}{3}\binom{64}{2}$ วิธี

กรณีที่ 4 ไปเที่ยวจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่ 4 จังหวัด และจังหวัดที่ไม่มีเพื่อนสนิทอยู่อีก 1 จังหวัด

เลือกจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่ 4 จังหวัด จาก 12 จังหวัด ได้ $\binom{12}{4}$ วิธี

เลือกจังหวัดที่ไม่มีเพื่อนสนิทอยู่ 1 จังหวัด จาก 64 จังหวัด ได้ 64 วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีการเลือกจังหวัดที่เดินทางไปเที่ยวมีเพื่อนสนิทอยู่

4 จังหวัด เท่ากับ $64 \binom{12}{4}$ วิธี

กรณีที่ 5 ไปเที่ยวจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่ 5 จังหวัด

เลือกจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่ 5 จังหวัด จาก 12 จังหวัด ได้ $\binom{12}{5}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีการเลือกจังหวัดที่เดินทางไปเที่ยวมีเพื่อนสนิทอยู่

5 จังหวัด เท่ากับ $\binom{12}{5}$ วิธี

จะได้ จำนวนวิธีการเลือกจังหวัดที่เดินทางไปเที่ยว โดยมีเพื่อนสนิทอยู่อย่างน้อย 1 จังหวัด เท่ากับ

$$12 \binom{64}{4} + \binom{12}{2} \binom{64}{3} + \binom{12}{3} \binom{64}{2} + 64 \binom{12}{4} + \binom{12}{5} = 10,850,328 \text{ วิธี}$$

วิธีที่ 2 เลือกไปเที่ยว 5 จังหวัด จาก 76 จังหวัดได้ $\binom{76}{5}$ วิธี

เลือกไปเที่ยวจังหวัดที่ไม่มีเพื่อนสนิทอยู่ 5 จังหวัด จาก 64 จังหวัด ได้ $\binom{64}{5}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีการเลือกจังหวัดที่เดินทางไปเที่ยว โดยมีเพื่อนสนิทอยู่อย่างน้อย 1 จังหวัด

$$\text{เท่ากับ } \binom{76}{5} - \binom{64}{5} = 10,850,328 \text{ วิธี}$$

- 3) เนื่องจากกรณีมีเพื่อนสนิทอยู่ในจังหวัดที่อยู่ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ 3 จังหวัด ต้องการไปเที่ยวจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่ทุกจังหวัด และอย่างน้อย 2 จังหวัดในนั้นอยู่ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ แบ่งได้ 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ไปเที่ยวจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่ และอยู่ในภาคตะวันออกเฉียงเหนือ 2 จังหวัด
เลือกจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่ และอยู่ในภาคตะวันออกเฉียงเหนือ 2 จังหวัด
จาก 3 จังหวัด ได้ $\binom{3}{2}$ วิธี

และเลือกจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่ แต่ไม่อยู่ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ 3 จังหวัด จาก 9 จังหวัด ได้ $\binom{9}{3}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีการเลือกจังหวัดที่ดารณีไปเที่ยวมีเพื่อนสนิทอยู่ และอยู่ในภาคตะวันออกเฉียงเหนือ 2 จังหวัด เท่ากับ $\binom{3}{2}\binom{9}{3}$ วิธี

กรณีที่ 2 ไปเที่ยวจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่ และอยู่ในภาคตะวันออกเฉียงเหนือ 3 จังหวัด เลือกจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่ และอยู่ในภาคตะวันออกเฉียงเหนือ 3 จังหวัด จาก 3 จังหวัด ได้ $\binom{3}{3}$ วิธี

และเลือกจังหวัดที่มีเพื่อนสนิทอยู่ แต่ไม่อยู่ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ 2 จังหวัด จาก 9 จังหวัด ได้ $\binom{9}{2}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีการเลือกจังหวัดที่ดารณีไปเที่ยวมีเพื่อนสนิทอยู่ และอยู่ในภาคตะวันออกเฉียงเหนือ 3 จังหวัด เท่ากับ $\binom{3}{3}\binom{9}{2}$ วิธี

จะได้ จำนวนวิธีการเลือกจังหวัดที่ดารณีไปเที่ยวมีเพื่อนสนิทอยู่ทุกจังหวัด และอย่างน้อย 2 จังหวัดในนั้นอยู่ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ เท่ากับ $\binom{3}{2}\binom{9}{3} + \binom{3}{3}\binom{9}{2} = 288$ วิธี

29. เลขโดด 0, 1, 2, 3 และ 4 มีผลรวมเป็น 9 แบ่งเป็นกรณี ดังนี้

กรณีที่มีเลขโดด 0

กรณีที่ 1 มีเลขโดด 0, 4, 4 และ 1 สามารถจัดเรียงได้ $\frac{3!}{2!1!} \times 3 = 9$ วิธี

กรณีที่ 2 มีเลขโดด 0, 2, 3 และ 4 สามารถจัดเรียงได้ $3! \times 3 = 18$ วิธี

กรณีที่ 3 มีเลขโดด 0, 3, 3, และ 3 สามารถจัดเรียงได้ 3 วิธี

ดังนั้น หมายเลขในกรณีนี้มี $9 + 18 + 3 = 30$ จำนวน

กรณีที่ไม่มีเลขโดด 0

กรณีที่ 4 มีเลขโดด 1, 1, 3 และ 4 สามารถจัดเรียงได้ $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$ วิธี

กรณีที่ 5 มีเลขโดด 1, 2, 2 และ 4 สามารถจัดเรียงได้ $\frac{4!}{1!2!1!} = 12$ วิธี

กรณีที่ 6 มีเลขโดด 1, 2, 3 และ 3 สามารถจัดเรียงได้ $\frac{4!}{1!1!2!} = 12$ วิธี

กรณีที่ 7 มีเลขโดด 2, 2, 2 และ 3 สามารถจัดเรียงได้ $\frac{4!}{3!1!} = 4$ วิธี

ดังนั้น หมายเลขในกรณีนี้มี $12 + 12 + 12 + 4 = 40$ จำนวน

จะได้ จำนวนหมายเลขทั้งหมดที่บุญช่วยเชื่อว่าจะนำโชคมาให้ เท่ากับ $30 + 40 = 70$ จำนวน

30. 1) สับเซตของ U ที่มีสมาชิก 2 ตัว คือ เซตที่มีสมาชิก 2 ตัว และสมาชิกละตัวอยู่ใน U

เนื่องจาก เลือกสมาชิก 2 ตัว ใน U จาก 100 ตัว ได้ $\binom{100}{2}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนสับเซตของ U ที่มีสมาชิก 2 ตัว มี $\binom{100}{2} = 4,950$ สับเซต

- 2) ให้สับเซตของ U ที่มีสมาชิก 2 ตัว อยู่ในรูป $\{a, b\}$ โดยที่ $a < b$

ต้องการให้ $b - a \leq 7$ นั่นคือ $b \leq a + 7$ แบ่งกรณีได้ ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $a \in \{1, 2, 3, \dots, 93\}$ จะเลือก b ได้ 7 วิธี

กรณีที่ 2 ถ้า $a = 94$ จะเลือก b ได้ 6 วิธี จาก 95, 96, 97, 98, 99 และ 100

กรณีที่ 3 ถ้า $a = 95$ จะเลือก b ได้ 5 วิธี จาก 96, 97, 98, 99 และ 100

กรณีที่ 4 ถ้า $a = 96$ จะเลือก b ได้ 4 วิธี จาก 97, 98, 99 และ 100

กรณีที่ 5 ถ้า $a = 97$ จะเลือก b ได้ 3 วิธี จาก 98, 99 และ 100

กรณีที่ 6 ถ้า $a = 98$ จะเลือก b ได้ 2 วิธี จาก 99 และ 100

กรณีที่ 7 ถ้า $a = 99$ จะเลือก b ได้ 1 วิธี คือ $b = 100$

ดังนั้น จำนวนสับเซต U ที่มีสมาชิก 2 ตัว ซึ่งทั้งสองจำนวนต่างกันไม่เกิน 7 มี

$(93 \times 7) + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 672$ สับเซต

31. ให้ $f = \{(x, y) \in A \times A \mid y - 1 \leq x, x \in A\}$ โดยที่ $A = \{2, 3, 4, 5\}$

สังเกตว่า $f \in S$ และสามารถสร้าง f จาก 4 ขั้นตอน คือ

ขั้นตอนที่ 1 ถ้า $x = 2$ จะมี y ได้ 2 จำนวน จาก 2 และ 3

ขั้นตอนที่ 2 ถ้า $x = 3$ จะมี y ได้ 3 จำนวน จาก 2, 3 และ 4

ขั้นตอนที่ 3 ถ้า $x = 4$ จะมี y ได้ 4 จำนวน จาก 2, 3, 4 และ 5

ขั้นตอนที่ 4 ถ้า $x = 5$ จะมี y ได้ 4 จำนวน จาก 2, 3, 4 และ 5

ดังนั้น จำนวนฟังก์ชันทั้งหมดที่เป็นสมาชิกของ S มี $2 \times 3 \times 4 \times 4 = 96$ ฟังก์ชัน

32. 1) เนื่องจากมีหนังสือนิยาย 3 เล่ม และหนังสือประเภทอื่นๆ อีก 3 เล่ม
จะได้ว่า ถ้าหยิบหนังสือมาอย่างน้อย 1 เล่ม แล้วต้องการให้หยิบได้หนังสือนิยาย
อย่างน้อย 1 เล่ม แบ่งเป็นกรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 หยิบหนังสือ 1 เล่ม แล้วได้หนังสือนิยาย 1 เล่ม ทำได้ $\binom{3}{1} = 3$ วิธี

กรณีที่ 2 หยิบหนังสือ 2 เล่ม

หยิบได้หนังสือนิยาย 1 เล่ม และหยิบหนังสือประเภทอื่น ๆ อีก 1 เล่ม

ทำได้ $\binom{3}{1}\binom{3}{1}$ วิธี

หยิบได้หนังสือนิยาย 2 เล่ม ทำได้ $\binom{3}{2}$ วิธี

ดังนั้น หยิบหนังสือ 2 เล่ม แล้วได้หนังสือนิยายอย่างน้อย 1 เล่ม ทำได้

$\binom{3}{1}\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 12$ วิธี

กรณีที่ 3 หยิบหนังสือ 3 เล่ม

หยิบได้หนังสือนิยาย 1 เล่ม และหยิบหนังสือประเภทอื่น ๆ อีก 2 เล่ม

ทำได้ $\binom{3}{1}\binom{3}{2}$ วิธี

หยิบได้หนังสือนิยาย 2 เล่ม และหยิบหนังสือประเภทอื่น ๆ อีก 1 เล่ม

ทำได้ $\binom{3}{2}\binom{3}{1}$ วิธี

หยิบได้หนังสือนิยาย 3 เล่ม ทำได้ $\binom{3}{3}$ วิธี

ดังนั้น หยิบหนังสือ 3 เล่ม แล้วได้หนังสือนิยายอย่างน้อย 1 เล่ม ทำได้

$\binom{3}{1}\binom{3}{2} + \binom{3}{2}\binom{3}{1} + \binom{3}{3} = 19$ วิธี

กรณีที่ 4 หยิบหนังสือ 4 เล่ม

หยิบได้หนังสือนิยาย 1 เล่ม และหยิบหนังสือประเภทอื่น ๆ อีก 3 เล่ม

ทำได้ $\binom{3}{1}\binom{3}{3}$ วิธี

หยิบได้หนังสือนิยาย 2 เล่ม และหยิบหนังสือประเภทอื่น ๆ อีก 2 เล่ม

ทำได้ $\binom{3}{2}\binom{3}{2}$ วิธี

หยิบได้หนังสือนิยาย 3 เล่ม และหยิบหนังสือประเภทอื่น ๆ อีก 1 เล่ม

ทำได้ $\binom{3}{3}\binom{3}{1}$ วิธี

ดังนั้น หยิบหนังสือ 4 เล่ม แล้วได้หนังสือนิยายอย่างน้อย 1 เล่ม ทำได้

$$\binom{3}{1}\binom{3}{3} + \binom{3}{2}\binom{3}{2} + \binom{3}{3}\binom{3}{1} = 15 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 5 หยิบหนังสือ 5 เล่ม

หยิบได้หนังสือนิยาย 2 เล่ม และหยิบหนังสือประเภทอื่น ๆ อีก 3 เล่ม

ทำได้ $\binom{3}{2}\binom{3}{3}$ วิธี

หยิบได้หนังสือนิยาย 3 เล่ม และหยิบหนังสือประเภทอื่น ๆ อีก 2 เล่ม

ทำได้ $\binom{3}{3}\binom{3}{2}$ วิธี

ดังนั้น หยิบหนังสือ 5 เล่ม แล้วได้หนังสือนิยายอย่างน้อย 1 เล่ม ทำได้

$$\binom{3}{2}\binom{3}{3} + \binom{3}{3}\binom{3}{2} = 6 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 6 หยิบหนังสือ 6 เล่ม

หยิบได้หนังสือนิยาย 3 เล่ม และหยิบหนังสือประเภทอื่น ๆ อีก 3 เล่ม

ทำได้ $\binom{3}{3}\binom{3}{3}$ วิธี

ดังนั้น หยิบหนังสือ 6 เล่ม แล้วได้หนังสือนิยายอย่างน้อย 1 เล่ม ทำได้

$$\binom{3}{3}\binom{3}{3} = 1 \text{ วิธี}$$

จะได้ว่า จำนวนวิธีที่นักเรียนคนนี้สุ่มหยิบหนังสือมาอ่านอย่างน้อย 1 เล่ม แล้วได้หนังสือนิยายอย่างน้อย 1 เล่ม เท่ากับ $3 + 12 + 19 + 15 + 6 + 1 = 56$ วิธี

- 2) เนื่องจากมีหนังสือสารคดี 2 เล่ม และหนังสือประเภทอื่นๆ อีก 4 เล่ม
จะได้ว่า ถ้าหยิบหนังสือมาอย่างน้อย 1 เล่ม แล้วต้องการให้หยิบได้หนังสือสารคดี
อย่างน้อย 1 เล่ม แบ่งเป็นกรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 หยิบหนังสือ 1 เล่ม แล้วได้หนังสือสารคดี 1 เล่ม ทำได้ $\binom{2}{1} = 2$ วิธี

กรณีที่ 2 หยิบหนังสือ 2 เล่ม

หยิบได้หนังสือสารคดี 1 เล่ม และหยิบหนังสือประเภทอื่น ๆ อีก 1 เล่ม

ทำได้ $\binom{2}{1}\binom{4}{1}$ วิธี

หยิบได้หนังสือสารคดี 2 เล่ม ทำได้ $\binom{2}{2}$ วิธี

ดังนั้น หยิบหนังสือ 2 เล่ม แล้วได้หนังสือสารคดีอย่างน้อย 1 เล่ม ทำได้

$$\binom{2}{1}\binom{4}{1} + \binom{2}{2} = 9 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 3 หยิบหนังสือ 3 เล่ม

หยิบได้หนังสือสารคดี 1 เล่ม และหยิบหนังสือประเภทอื่น ๆ อีก 2 เล่ม

ทำได้ $\binom{2}{1}\binom{4}{2}$ วิธี

หยิบได้หนังสือสารคดี 2 เล่ม และหยิบหนังสือประเภทอื่น ๆ อีก 1 เล่ม

ทำได้ $\binom{2}{2}\binom{4}{1}$ วิธี

ดังนั้น หยิบหนังสือ 3 เล่ม แล้วได้หนังสือสารคดีอย่างน้อย 1 เล่ม ทำได้

$$\binom{2}{1}\binom{4}{2} + \binom{2}{2}\binom{4}{1} = 16 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 4 หยิบหนังสือ 4 เล่ม

หยิบได้หนังสือสารคดี 1 เล่ม และหยิบหนังสือประเภทอื่น ๆ อีก 3 เล่ม

ทำได้ $\binom{2}{1}\binom{4}{3}$ วิธี

หยิบได้หนังสือสารคดี 2 เล่ม และหยิบหนังสือประเภทอื่น ๆ อีก 2 เล่ม

ทำได้ $\binom{2}{2}\binom{4}{2}$ วิธี

ดังนั้น หยิบหนังสือ 4 เล่ม แล้วได้หนังสือสารคดีอย่างน้อย 1 เล่ม ทำได้

$$\binom{2}{1}\binom{4}{3} + \binom{2}{2}\binom{4}{2} = 14 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 5 หยิบหนังสือ 5 เล่ม

หยิบได้หนังสือสารคดี 1 เล่ม และหยิบหนังสือประเภทอื่น ๆ อีก 4 เล่ม

ทำได้ $\binom{2}{1}\binom{4}{4}$ วิธี

หยิบได้หนังสือสารคดี 2 เล่ม และหยิบหนังสือประเภทอื่น ๆ อีก 3 เล่ม

ทำได้ $\binom{2}{2}\binom{4}{3}$ วิธี

ดังนั้น หยิบหนังสือ 5 เล่ม แล้วได้หนังสือสารคดีอย่างน้อย 1 เล่ม ทำได้

$$\binom{2}{1}\binom{4}{4} + \binom{2}{2}\binom{4}{3} = 6 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 6 หยิบหนังสือ 6 เล่ม

หยิบได้หนังสือสารคดี 2 เล่ม และหยิบหนังสือประเภทอื่น ๆ อีก 4 เล่ม

ทำได้ $\binom{2}{2}\binom{4}{4}$ วิธี

ดังนั้น หยิบหนังสือ 6 เล่ม แล้วได้หนังสือสารคดีอย่างน้อย 1 เล่ม ทำได้

$$\binom{2}{2}\binom{4}{4} = 1 \text{ วิธี}$$

จะได้ จำนวนวิธีที่นักเรียนคนนี้สุ่มหยิบหนังสือมาอ่านอย่างน้อย 1 เล่ม แล้วได้หนังสือสารคดีอย่างน้อย 1 เล่ม เท่ากับ $2 + 9 + 16 + 14 + 6 + 1 = 48$ วิธี

3) เนื่องจากมีหนังสือการ์ตูน 1 เล่ม และหนังสือประเภทอื่น ๆ อีก 5 เล่ม

จะได้ว่า ถ้าหยิบหนังสือมาอย่างน้อย 1 เล่ม แล้วต้องการให้หยิบได้หนังสือการ์ตูนอย่างน้อย 1 เล่ม แบ่งเป็นกรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 หยิบหนังสือ 1 เล่ม แล้วได้หนังสือการ์ตูน 1 เล่ม ทำได้ $\binom{1}{1} = 1$ วิธี

กรณีที่ 2 หยิบหนังสือ 2 เล่ม แล้วได้หนังสือการ์ตูน 1 เล่ม และได้หนังสือประเภทอื่น ๆ

อีก 1 เล่ม ทำได้ $\binom{1}{1}\binom{5}{1} = 5$ วิธี

กรณีที่ 3 หยิบหนังสือ 3 เล่ม แล้วได้หนังสือการ์ตูน 1 เล่ม และได้หนังสือประเภทอื่น ๆ

$$\text{อีก 2 เล่มทำได้ } \binom{1}{1} \binom{5}{2} = 10 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 4 หยิบหนังสือ 4 เล่ม แล้วได้หนังสือการ์ตูน 1 เล่ม และได้หนังสือประเภทอื่น ๆ

$$\text{อีก 3 เล่มทำได้ } \binom{1}{1} \binom{5}{3} = 10 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 5 หยิบหนังสือ 5 เล่ม แล้วได้หนังสือการ์ตูน 1 เล่ม และได้หนังสือประเภทอื่น ๆ

$$\text{อีก 4 เล่มทำได้ } \binom{1}{1} \binom{5}{4} = 5 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 6 หยิบหนังสือ 6 เล่ม แล้วได้หนังสือการ์ตูน 1 เล่ม และได้หนังสือประเภทอื่น ๆ

$$\text{อีก 5 เล่มทำได้ } \binom{1}{1} \binom{5}{5} = 1 \text{ วิธี}$$

จะได้ จำนวนวิธีที่นักเรียนคนนี้สุ่มหยิบหนังสือมาอ่านอย่างน้อย 1 เล่ม แล้วได้หนังสือการ์ตูนอย่างน้อย 1 เล่ม เท่ากับ $1+5+10+10+5+1=32$ วิธี

- 4) ถ้าหยิบหนังสือมาอย่างน้อย 1 เล่ม แล้วต้องการให้หยิบได้หนังสือครบทุกประเภท นั่นคือต้องหยิบหนังสือมาอย่างน้อย 3 เล่ม ซึ่งแบ่งเป็นกรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 หยิบหนังสือ 3 เล่ม แล้วได้หนังสือครบทุกประเภท ทำได้ $\binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{1}{1} = 6$ วิธี

กรณีที่ 2 หยิบหนังสือ 4 เล่ม

หยิบได้หนังสือนิยายและหนังสือการ์ตูน อย่างละ 1 เล่ม และหนังสือสารคดี

$$2 \text{ เล่ม ทำได้ } \binom{3}{1} \binom{2}{2} \binom{1}{1} \text{ วิธี}$$

หยิบได้หนังสือสารคดีและหนังสือการ์ตูน อย่างละ 1 เล่ม และหนังสือนิยาย

$$2 \text{ เล่ม ทำได้ } \binom{3}{2} \binom{2}{1} \binom{1}{1} \text{ วิธี}$$

ดังนั้น หยิบหนังสือ 4 เล่ม แล้วได้หนังสือครบทุกประเภท ทำได้

$$\binom{3}{1} \binom{2}{2} \binom{1}{1} + \binom{3}{2} \binom{2}{1} \binom{1}{1} = 9 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 3 หยิบหนังสือ 5 เล่ม

หยิบได้หนังสือสารคดีและหนังสือการ์ตูน อย่างละ 1 เล่ม และหนังสือนิยาย

3 เล่ม ทำได้ $\binom{3}{3}\binom{2}{1}\binom{1}{1}$ วิธี

หยิบได้หนังสือนิยายและหนังสือสารคดี อย่างละ 2 เล่ม และหนังสือการ์ตูน

1 เล่ม ทำได้ $\binom{3}{2}\binom{2}{2}\binom{1}{1}$ วิธี

ดังนั้น หยิบหนังสือ 5 เล่ม แล้วได้หนังสือครบทุกประเภท ทำได้

$$\binom{3}{3}\binom{2}{1}\binom{1}{1} + \binom{3}{2}\binom{2}{2}\binom{1}{1} = 5 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 4 หยิบหนังสือ 6 เล่ม แล้วได้หนังสือครบทุกประเภท ทำได้ 1 วิธี

จะได้ จำนวนวิธีที่นักเรียนคนนี้สุ่มหยิบหนังสือมาอ่านอย่างน้อย 1 เล่ม แล้วได้หนังสือ

ครบทุกประเภท เท่ากับ $6 + 9 + 5 + 1 = 21$ วิธี

33. จากทฤษฎีบททวินาม พจน์ที่มี $p^{12}q^{16}$ คือ

$$\begin{aligned} \binom{12}{8}(p^3)^4(-5q^2)^8 &= 495(p^3)^4(5q^2)^8 \\ &= (495)5^8 p^{12}q^{16} \end{aligned}$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ $p^{12}q^{16}$ คือ $(495)5^8$

34. พิจารณาการกระจาย $(x-1)^8$

จากทฤษฎีบททวินาม พจน์ที่มี x^4 คือ

$$\binom{8}{4}x^4(-1)^4 = 70x^4$$

จะได้ สัมประสิทธิ์ของ x^4 จากการกระจาย $(x-1)^8$ คือ 70

พิจารณาการกระจาย $(x+1)^4$

จากทฤษฎีบททวินาม พจน์ที่มี x^4 คือ

$$\begin{aligned} \binom{4}{0}x^4 &= 1x^4 \\ &= x^4 \end{aligned}$$

จะได้ สัมประสิทธิ์ของ x^4 จากการกระจาย $(x+1)^4$ คือ 1

พิจารณาการกระจาย $(x^2+1)^5$

จากทฤษฎีบททวินาม พจน์ที่มี x^4 คือ

$$\begin{aligned}\binom{5}{3}(x^2)^2(1)^3 &= 10(x^2)^2 \\ &= 10x^4\end{aligned}$$

จะได้ สัมประสิทธิ์ของ x^4 จากการกระจาย $(x^2+1)^5$ คือ 10

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ x^4 จากการกระจาย $(x-1)^8 + (x+1)^4 - (x^2+1)^5$ คือ
 $70+1-10=61$

35. จากทฤษฎีบททวินาม พจน์ที่ $k+1$ คือ

$$\begin{aligned}\binom{15}{k}\left(\frac{12}{x^3}\right)^{15-k}\left(\frac{x^2}{3}\right)^k &= \binom{15}{k} \cdot \frac{12^{15-k}}{x^{45-3k}} \cdot \frac{x^{2k}}{3^k} \\ &= \binom{15}{k} \cdot \frac{12^{15-k}}{3^k} x^{2k-45+3k} \\ &= \binom{15}{k} \cdot \frac{12^{15-k}}{3^k} x^{5k-45}\end{aligned}$$

ให้ $5k-45=0$ จะได้ $k=9$

ดังนั้น พจน์ที่ไม่มี x คือ พจน์ที่ 10

จะได้ พจน์ที่ไม่มี x คือ

$$\begin{aligned}\binom{15}{9}\left(\frac{12}{x^3}\right)^6\left(\frac{x^2}{3}\right)^9 &= (5,005)\left(\frac{12}{x^3}\right)^6\left(\frac{x^2}{3}\right)^9 \\ &= (5,005)\frac{12^6}{3^9}\end{aligned}$$

36. เนื่องจาก $(1.1)^{400} = (1+0.1)^{400}$

$$= \binom{400}{0}(1)^{400} + \binom{400}{1}(1)^{399}(0.1) + \binom{400}{2}(1)^{398}(0.1)^2 + \dots + \binom{400}{400}(0.1)^{400}$$

$$\begin{aligned}\text{พิจารณา } \binom{400}{2}(1)^{398}(0.1)^2 &= (79,800)(1)^{398}(0.1)^2 \\ &= 798\end{aligned}$$

เนื่องจาก ทุกพจน์ที่ได้จากการกระจาย $(1+0.1)^{400}$ เป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ว่า $(1.1)^{400} > 798$

ดังนั้น $(1.1)^{400}$ มีค่ามากกว่า 700

$$37. \text{ เนื่องจาก } (x+y^2)^6 = \binom{6}{0}x^6 + \binom{6}{1}x^5y^2 + \binom{6}{2}x^4(y^2)^2 + \cdots + \binom{6}{6}(y^2)^6$$

ดังนั้น ผลรวมของสัมประสิทธิ์จากการกระจาย $(x+y^2)^6$ คือ

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \cdots + \binom{6}{6} = 2^6 = 64$$

$$\begin{aligned} 38. \text{ เนื่องจาก } (15)^{20} &= (14+1)^{20} \\ &= \binom{20}{0}14^{20} + \binom{20}{1}14^{19}(1) + \cdots + \binom{20}{19}14(1)^{19} + \binom{20}{20}(1)^{20} \\ &= \binom{20}{0}14^{20} + \binom{20}{1}14^{19} + \cdots + \binom{20}{19}14 + 1 \\ &= 14 \left(\binom{20}{0}14^{19} + \binom{20}{1}14^{18} + \cdots + \binom{20}{19} \right) + 1 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\binom{20}{0}14^{19} + \binom{20}{1}14^{18} + \cdots + \binom{20}{19}$ เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น เศษจากการหาร $(15)^{20}$ ด้วย 14 คือ 1

39. จากทฤษฎีบททวินาม พจน์ที่มี x^2 คือ

$$\binom{n}{n-2}(2x)^2(1)^{n-2} = \binom{n}{n-2}(4x^2)$$

$$\text{จะได้ } 4\binom{n}{n-2} = 312$$

$$\frac{4n!}{(n-2)!(n-(n-2))!} = 312$$

$$\frac{4n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!} = 312$$

$$n(n-1) = 156$$

$$\text{นั่นคือ } n = 13$$

40. เนื่องจาก $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \binom{n}{2}x^{n-2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \cdots + \binom{n}{n}\left(\frac{1}{x}\right)^n$
 จะได้ผลรวมของสัมประสิทธิ์จากการกระจาย $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ คือ $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$

เนื่องจาก $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

จะได้ $2,048 = 2^n$

ดังนั้น $n = 11$

41. กิ่งแก้วต้องการเชิญเพื่อนสนิทมาร่วมงานแต่งงานอย่างน้อย 1 คน แบ่งเป็นกรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 มีเพื่อนสนิทมาร่วมงาน 1 คน ได้ $\binom{10}{1}$ วิธี

กรณีที่ 2 มีเพื่อนสนิทมาร่วมงาน 2 คน ได้ $\binom{10}{2}$ วิธี

กรณีที่ 3 มีเพื่อนสนิทมาร่วมงาน 3 คน ได้ $\binom{10}{3}$ วิธี

⋮

กรณีที่ 10 มีเพื่อนสนิทมาร่วมงาน 10 คน ได้ $\binom{10}{10}$ วิธี

จะได้ จำนวนวิธีที่จะมีเพื่อนสนิทมาร่วมงานอย่างน้อย 1 คน เท่ากับ $\binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \cdots + \binom{10}{10}$

เนื่องจาก $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \cdots + \binom{10}{10} = 2^{10}$

จะได้ $\binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \cdots + \binom{10}{10} = 2^{10} - \binom{10}{0}$
 $= 2^{10} - 1$
 $= 1,023$

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะมีเพื่อนสนิทมาร่วมงานอย่างน้อย 1 คน เท่ากับ 1,023 วิธี

บทที่ 3 ความน่าจะเป็น

แบบฝึกหัด 3.1

1. ให้ S_1, S_2, S_3, S_4 และ S_5 เป็นปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มในข้อ 1), 2), 3), 4) และ 5) ตามลำดับ
 - 1) เนื่องจากในการหยิบลูกอม 1 เม็ด จากถุงที่กำหนดให้ จะหยิบได้ลูกอมรสส้ม รสอู่น รสมะนาว หรือรสกาแฟ
ดังนั้น $S_1 = \{\text{ลูกอมรสส้ม, ลูกอมรสอู่น, ลูกอมรสมะนาว, ลูกอมรสกาแฟ}\}$
 - 2) เนื่องจากในการทำข้อสอบแบบถูกผิด 10 ข้อ ข้อละ 1 คะแนน คะแนนสอบที่เป็นไปได้ คือ 0, 1, 2, 3, ..., 10
ดังนั้น $S_2 = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$
 - 3) เนื่องจากในการแข่งขันวอลเลย์บอลแต่ละครั้ง ผลของการแข่งขันที่อาจเป็นไปได้ คือ ชนะ หรือ แพ้
ให้ผลการแข่งขันที่ชนะแทนด้วย “ช” และผลการแข่งขันที่แพ้แทนด้วย “พ”
จะได้ผลลัพธ์ของการแข่งขันวอลเลย์บอลไทย 2 นัด ที่อาจเป็นไปได้ คือ ชช ชพ พช พพ หรือ พพ
ดังนั้น $S_3 = \{\text{ชช, ชพ, พช, พพ}\}$
 - 4) เนื่องจากการทอดลูกเต๋านี้หนึ่งลูกหนึ่งครั้ง แต้มบนหน้าลูกเต๋าที่อาจเกิดขึ้น คือ 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6
จะได้ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าที่อาจเกิดขึ้นในการทอดลูกเต๋าสามลูกหนึ่งครั้ง คือ 3, 4, 5, ..., 18
ดังนั้น $S_4 = \{3, 4, 5, \dots, 18\}$
 - 5) เนื่องจากในการขายพัดลม 5 เครื่อง จำนวนพัดลมที่ขายได้อาจเป็น 0, 1, 2, 3, 4 หรือ 5 เครื่อง
ดังนั้น $S_5 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

2. ให้ H แทนเหรียญขึ้นหัว

และ T แทนเหรียญขึ้นก้อย

จะได้ ผลลัพธ์ที่ได้จากการโยนเหรียญหนึ่งเหรียญสองครั้งที่เป็นไปได้ คือ HH, HT, TH หรือ TT

1) ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่ม

จะได้ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

2) ให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัวทั้งสองครั้ง

จะได้ $E_1 = \{HH\}$

3) ให้ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหน้าต่างกัน

จะได้ $E_2 = \{HT, TH\}$

3. ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

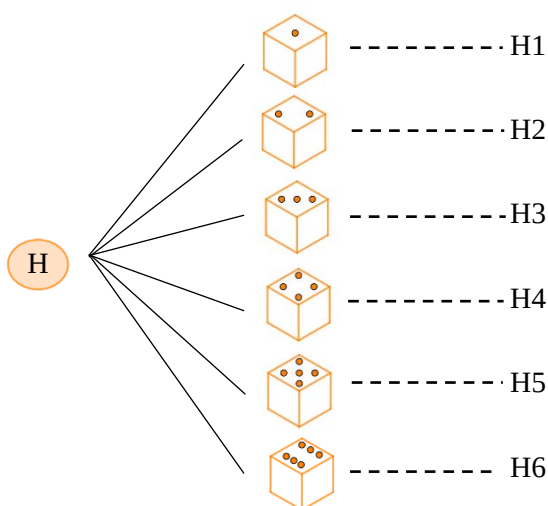
H แทนเหรียญขึ้นหัว

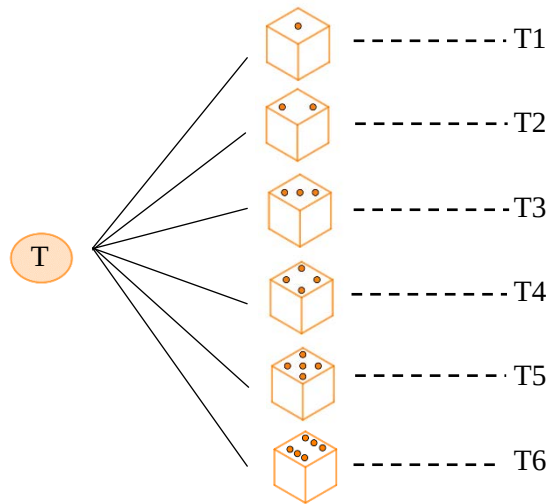
และ T แทนเหรียญขึ้นก้อย

ให้เลขโดด 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 แทนลูกเต๋าขึ้นหน้า 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 ตามลำดับ

สามารถเขียนแผนภาพแสดงผลลัพธ์ของการทดลองสุ่มได้ดังนี้

หน้าของเหรียญ แต้มบนหน้าลูกเต๋า





โดยที่สัญลักษณ์ H_i หมายถึง เหรียญขึ้นหัวและลูกเต๋ารับแต้ม i

T_i หมายถึง เหรียญขึ้นก้อยและลูกเต๋ารับแต้ม i

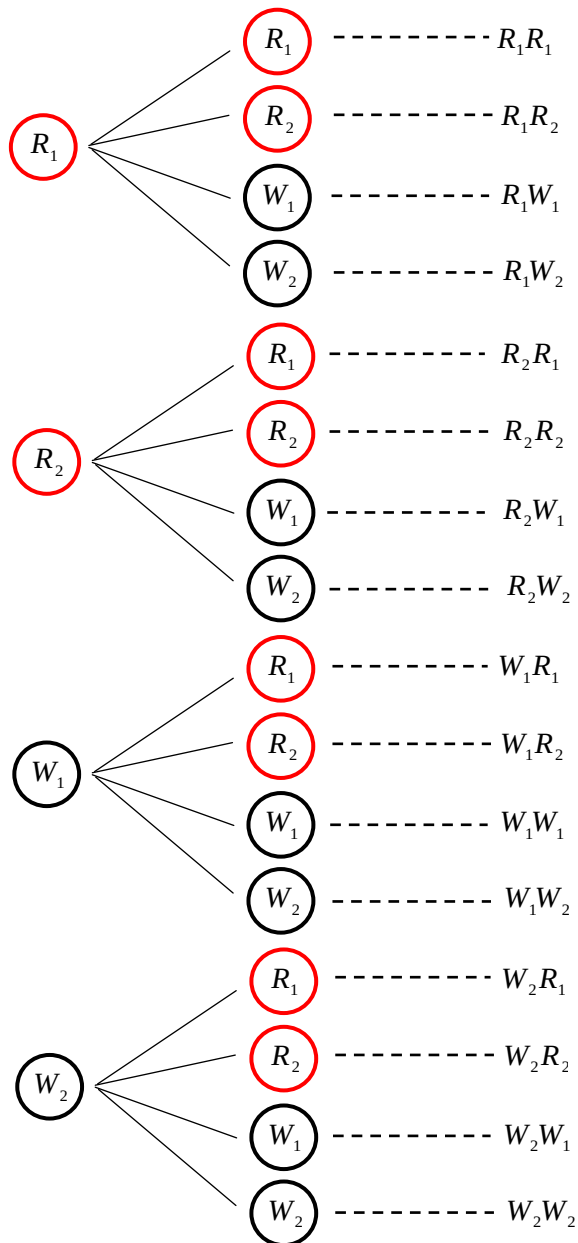
เมื่อ $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นก้อยและแต้มบนหน้าลูกเต๋ารับแต้มเป็นจำนวนคู่
จะได้ $E_1 = \{T1, T3, T5\}$
 - 2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัวและแต้มบนหน้าลูกเต๋ารับแต้มเป็นจำนวนคู่
จะได้ $E_2 = \{H2, H4, H6\}$
 - 3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่แต้มบนหน้าลูกเต๋ารับแต้มเป็นจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว
จะได้ $E_3 = \{H3, H6, T3, T6\}$
 - 4) ให้ E_4 แทนเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นก้อยและแต้มบนหน้าลูกเต๋ารับแต้มเป็นจำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัว
เนื่องจากไม่มีแต้มใดบนหน้าลูกเต๋ารับแต้มเป็นจำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัว
จะได้ $E_4 = \emptyset$
 - 5) ให้ E_5 แทนเหตุการณ์ที่แต้มบนหน้าลูกเต๋ารับแต้มเป็นจำนวนที่หารด้วย 7 ไม่ลงตัว
เนื่องจากแต้มบนหน้าลูกเต๋ารับแต้มเป็นจำนวนที่หารด้วย 7 ไม่ลงตัว
จะได้ $E_5 = \{H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$
4. ให้ R_1 และ R_2 แทนลูกบอลสีแดงลูกที่ 1 และลูกที่ 2 ตามลำดับ
 W_1 และ W_2 แทนลูกบอลสีขาวลูกที่ 1 และลูกที่ 2 ตามลำดับ

จะได้ ผลลัพธ์จากการหยิบลูกบอล 2 ลูก โดยการหยิบทีละ 1 ลูก และให้คืนลูกแรกลงไป ก่อนที่จะหยิบลูกที่สอง ดังแผนภาพ

ลูกบอลลูกที่หนึ่ง

ลูกบอลลูกที่สอง



ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } S = \{R_1R_1, R_1R_2, R_1W_1, R_1W_2, R_2R_1, R_2R_2, R_2W_1, R_2W_2, W_1R_1, W_1R_2, W_1W_1, W_1W_2, \\ W_2R_1, W_2R_2, W_2W_1, W_2W_2\}$$

และให้ E แทนเหตุการณ์ที่ได้ลูกบอลสีขาวทั้งสองลูก

$$\text{จะได้ } E = \{W_1W_1, W_1W_2, W_2W_1, W_2W_2\}$$

แบบฝึกหัด 3.2

1. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = 30$$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่จับสลากได้ชื่อของนักเรียนชาย

จะมีวิธีเลือกนักเรียนชาย 1 คน จากนักเรียนชาย 18 คน ได้ 18 วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E_1) = 18$$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่สลากที่ได้เป็นชื่อของนักเรียนชาย เท่ากับ $\frac{3}{5}$

- 2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่จับสลากได้ชื่อของนักเรียนหญิง

จะมีวิธีเลือกนักเรียนหญิง 1 คน จากนักเรียนหญิง 12 คน ได้ 12 วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E_2) = 12$$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่สลากที่ได้เป็นชื่อของนักเรียนหญิง เท่ากับ $\frac{2}{5}$

2. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = 20$$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกปิงปองสีแดง

เนื่องจากมีลูกปิงปองสีแดงอยู่ 15 ลูก

ดังนั้น จะมีวิธีหยิบลูกปิงปองสีแดงได้ 15 วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E_1) = 15$$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกปิงปองสีแดง เท่ากับ $\frac{3}{4}$

- 2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่จะหยิบไม่ได้ลูกปิงปองสีดำ

เนื่องจากมีลูกปิงปองที่ไม่ใช่สีดำอยู่ 19 ลูก

ดังนั้น จะมีวิธีหยิบไม่ได้ลูกปิงปองสีดำ 19 วิธี

นั่นคือ $n(E_2) = 19$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{19}{20}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบไม่ได้ลูกปิงปองสีดำ เท่ากับ $\frac{19}{20}$

- 3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่จะหยิบได้ลูกปิงปองสีดำหรือสีขาว

กรณีที่ 1 หยิบได้ลูกปิงปองสีดำ

เนื่องจากมีลูกปิงปองสีดำอยู่ 1 ลูก จะมีวิธีหยิบลูกปิงปองสีดำได้ 1 วิธี

กรณีที่ 2 หยิบได้ลูกปิงปองสีขาว

เนื่องจากมีลูกปิงปองสีขาวอยู่ 1 ลูก จะมีวิธีหยิบลูกปิงปองสีขาวได้ 1 วิธี

โดยหลักการบวก จะมีวิธีหยิบได้ลูกปิงปองสีดำหรือสีขาว $1+1=2$ วิธี

นั่นคือ $n(E_3) = 2$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกปิงปองสีดำหรือสีขาว เท่ากับ $\frac{1}{10}$

3. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S) = 13$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่จะหยิบได้ลูกแก้วสีเหลือง

เนื่องจากมีลูกแก้วสีเหลืองอยู่ 3 ลูก จะมีวิธีหยิบลูกแก้วสีเหลืองได้ 3 วิธี

นั่นคือ $n(E_1) = 3$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{13}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกแก้วสีเหลือง เท่ากับ $\frac{3}{13}$

- 2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกแก้วที่ไม่ใช่สีแดง
 เนื่องจากมีลูกแก้วที่ไม่ใช่สีแดงอยู่ 7 ลูก จะมีวิธีหยิบได้ลูกแก้วที่ไม่ใช่สีแดง 7 วิธี
 นั่นคือ $n(E_2) = 7$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{7}{13}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกแก้วที่ไม่ใช่สีแดง เท่ากับ $\frac{7}{13}$

4. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้
 จะได้ $n(S) = 52$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่ได้ไพ่หมายเลข 7
 เนื่องจากมีไพ่หมายเลข 7 อยู่ 4 ใบ
 จะมีวิธีที่หยิบไพ่หมายเลข 7 ได้ 4 วิธี
 นั่นคือ $n(E_1) = 4$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ได้ไพ่หมายเลข 7 เท่ากับ $\frac{1}{13}$

- 2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่ได้ไพ่ J, Q หรือ K
 เนื่องจากมีไพ่ J, Q หรือ K อยู่ 12 ใบ
 จะมีวิธีที่หยิบไพ่ J, Q หรือ K ได้ 12 วิธี
 นั่นคือ $n(E_2) = 12$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้ไพ่ J, Q หรือ K เท่ากับ $\frac{3}{13}$

- 3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่ได้ไฟดอกจิก

เนื่องจากมีไฟดอกจิกอยู่ 13 ใบ จะมีวิธีหยิบได้ไฟดอกจิก 13 วิธี

นั่นคือ $n(E_3) = 13$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้ไฟดอกจิก เท่ากับ $\frac{1}{4}$

- 4) ให้ E_4 แทนเหตุการณ์ที่ได้ไฟ A โฟแดง

เนื่องจากมีไฟ A โฟแดงอยู่ 1 ใบ จะมีวิธีที่ได้ไฟ A โฟแดง 1 วิธี

นั่นคือ $n(E_4) = 1$

$$\text{จะได้ } P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S)} = \frac{1}{52}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้ไฟ A โฟแดง เท่ากับ $\frac{1}{52}$

5. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S) = 6$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่ได้เบี้ยที่มีหมายเลขเป็นจำนวนเฉพาะ

เนื่องจากเบี้ยที่มีหมายเลขเป็นจำนวนเฉพาะมี 3 อัน คือ เบี้ยหมายเลข 3, 7 และ 11

จะมีวิธีหยิบเบี้ยที่มีหมายเลขเป็นจำนวนเฉพาะได้ 3 วิธี นั่นคือ $n(E_1) = 3$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้เบี้ยที่มีหมายเลขเป็นจำนวนเฉพาะ เท่ากับ $\frac{1}{2}$

- 2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่ได้เบี้ยที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว

เนื่องจากเบี้ยที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว มี 2 อัน คือ เบี้ยหมายเลข 3 และ 9

จะมีวิธีหยิบเบี้ยที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัวได้ 2 วิธี

นั่นคือ $n(E_2) = 2$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้เบี้ยที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว เท่ากับ $\frac{1}{3}$

- 3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่ได้เบี้ยที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 6 ลงตัว

เนื่องจากไม่มีเบี้ยที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 6 ลงตัว

จะมีวิธีหยิบเบี้ยที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 6 ลงตัวได้ 0 วิธี

นั่นคือ $n(E_3) = 0$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้เบี้ยที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 6 ลงตัว เท่ากับ 0

- 4) ให้ E_4 แทนเหตุการณ์ที่ได้เบี้ยที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์

เนื่องจากเบี้ยที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์มี 2 อัน คือ เบี้ยหมายเลข

4 และ 9

จะมีวิธีหยิบเบี้ยที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้ 2 วิธี

นั่นคือ $n(E_4) = 2$

$$\text{จะได้ } P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้เบี้ยที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์

เท่ากับ $\frac{1}{3}$

6. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S) = 100$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่จะได้เหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนเต็มบวก

เนื่องจากมีวิธีหยิบเหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนเต็มบวก 100 วิธี

นั่นคือ $n(E_1) = 100$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{100}{100} = 1$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้เหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนเต็มบวก เท่ากับ 1

- 2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่จะได้เหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนคู่

เนื่องจากเหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนคู่มี 50 เหรียญ ได้แก่ เหรียญที่มีหมายเลข 2, 4, 6, ..., 100

จะมีวิธีหยิบเหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนคู่ได้ 50 วิธี

นั่นคือ $n(E_2) = 50$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้เหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนคู่ เท่ากับ $\frac{1}{2}$

- 3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่จะได้เหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 5 ลงตัว
เนื่องจากเหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 5 ลงตัว มี 20 เหรียญ ได้แก่ เหรียญ
ที่มีหมายเลข 5, 10, 15, ..., 100

จะมีวิธีหยิบเหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 5 ลงตัว ได้ 20 วิธี
นั่นคือ $n(E_3) = 20$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้เหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 5 ลงตัว เท่ากับ $\frac{1}{5}$

- 4) ให้ E_4 แทนเหตุการณ์ที่จะได้เหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 5 ไม่ลงตัว
เนื่องจากเหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 5 ลงตัว มี 20 เหรียญ
ดังนั้น มีเหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 5 ไม่ลงตัว 80 เหรียญ

จะมีวิธีหยิบเหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 5 ไม่ลงตัว ได้ 80 วิธี
นั่นคือ $n(E_4) = 80$

$$\text{จะได้ } P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S)} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้เหรียญที่มีหมายเลขเป็นจำนวนที่หารด้วย 5 ไม่ลงตัว
เท่ากับ $\frac{4}{5}$

7. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

ให้ “ช” แทนผู้ชาย และ “ญ” แทนผู้หญิง

จะได้ $S = \{\text{ชช, ชญ, ญช, ญญ}\}$

นั่นคือ $n(S) = 4$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่สามีภรรยามีลูกเป็นผู้ชายทั้งคู่หรือผู้หญิงทั้งคู่

จะได้ $E_1 = \{\text{ชช, ญญ}\}$

นั่นคือ $n(E_1) = 2$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่สามีภรรยามีลูกเป็นผู้ชายทั้งคู่หรือผู้หญิงทั้งคู่ เท่ากับ $\frac{1}{2}$

- 2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่สามีภรรยามีลูกเป็นผู้หญิงอย่างน้อย 1 คน

$$\text{จะได้ } E_2 = \{\text{ชญ, ญช, ญญ}\}$$

$$\text{นั่นคือ } n(E_2) = 3$$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่สามีภรรยามีลูกเป็นผู้หญิงอย่างน้อย 1 คน เท่ากับ $\frac{3}{4}$

8. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = C_{5,2} = 10$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่จะได้หลอดดี 1 หลอด และหลอดเสีย 1 หลอด

ขั้นตอนที่ 1 หยิบหลอดไฟดี 1 หลอด จากหลอดดีทั้งหมด 3 หลอด ได้ $C_{3,1} = 3$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 หยิบหลอดไฟเสีย 1 หลอด จากหลอดเสียทั้งหมด 2 หลอด ได้ $C_{2,1} = 2$ วิธี

$$\text{ดังนั้น } n(E) = 3 \times 2 = 6$$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดดี 1 หลอด และหลอดเสีย 1 หลอด เท่ากับ $\frac{3}{5}$

9. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = C_{4,2} = 6$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่จะได้ถุงเท้าทั้งสองคู่เป็นสีเดียวกัน

กรณีที่ 1 หยิบได้ถุงเท้าทั้งสองคู่เป็นสีดำ มีได้ $C_{2,2} = 1$ วิธี

กรณีที่ 2 หยิบได้ถุงเท้าทั้งสองคู่เป็นสีขาว มีได้ $C_{2,2} = 1$ วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้ถุงเท้าทั้งสองคู่เป็นสีเดียวกัน เท่ากับ $\frac{1}{3}$

10. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = 6 \times 6 = 36$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ผลคูณของแต้มเป็นจำนวนคู่

วิธีที่ 1 ในการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรงสองลูกหนึ่งครั้ง ผลคูณของแต้มเป็นจำนวนคู่เป็นได้ 3 กรณี

กรณีที่ 1 ลูกเต๋าทิ้งสองลูกได้แต้มเป็นจำนวนคู่

แต้มที่ได้จากลูกเต๋าลูกที่ 1 เป็นได้ 3 วิธี คือ 2, 4 และ 6

แต้มที่ได้จากลูกเต๋าลูกที่ 2 เป็นได้ 3 วิธี คือ 2, 4 และ 6

จะมีจำนวนวิธีที่ผลคูณของแต้มเป็นจำนวนคู่เป็น $3 \times 3 = 9$ วิธี

กรณีที่ 2 ลูกเต๋าลูกที่ 1 ได้แต้มเป็นจำนวนคู่เพียงลูกเดียว

แต้มที่ได้จากลูกเต๋าลูกที่ 1 เป็นได้ 3 วิธี คือ 2, 4 และ 6

แต้มที่ได้จากลูกเต๋าลูกที่ 2 เป็นได้ 3 วิธี คือ 1, 3 และ 5

จะมีจำนวนวิธีที่ผลคูณของแต้มเป็นจำนวนคู่เป็น $3 \times 3 = 9$ วิธี

กรณีที่ 3 ลูกเต๋าลูกที่ 2 ได้แต้มเป็นจำนวนคู่เพียงลูกเดียว

แต้มที่ได้จากลูกเต๋าลูกที่ 1 เป็นได้ 3 วิธี คือ 1, 3 และ 5

แต้มที่ได้จากลูกเต๋าลูกที่ 2 เป็นได้ 3 วิธี คือ 2, 4 และ 6

จะมีจำนวนวิธีที่ผลคูณของแต้มเป็นจำนวนคู่เป็น $3 \times 3 = 9$ วิธี

โดยหลักการบวก จะมีวิธีทอดลูกเต๋าทีที่ผลคูณของแต้มที่ได้เป็นจำนวนคู่ $9 + 9 + 9 = 27$ วิธี

นั่นคือ $n(E) = 27$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผลคูณของแต้มเป็นจำนวนคู่ เท่ากับ $\frac{3}{4}$

วิธีที่ 2 ในการทอดลูกเต๋าทีที่เที่ยงตรงสองลูกหนึ่งครั้ง ผลคูณของแต้มที่เป็นจำนวนคี่จะ

เกิดขึ้น เมื่อแต้มบนหน้าของลูกเต๋าทิ้งสองลูกเป็นจำนวนคี่ ดังนี้

แต้มบนหน้าของลูกเต๋าลูกที่ 1 เป็นได้ 3 วิธี คือ 1, 3 และ 5

แต้มบนหน้าของลูกเต๋าลูกที่ 2 เป็นได้ 3 วิธี คือ 1, 3 และ 5

จะมีจำนวนวิธีที่ผลคูณของแต้มเป็นจำนวนคี่เป็น $3 \times 3 = 9$ วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีทอดลูกเต๋าที่ผลคูณของแต้มที่ได้เป็นจำนวนคู่ $36 - 9 = 27$ วิธี

นั่นคือ $n(E) = 27$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผลคูณของแต้มเป็นจำนวนคู่ เท่ากับ $\frac{3}{4}$

11. 1) ให้ S_1 แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S_1) = C_{4,2} = 6$$

ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงและสีเขียวอย่างละ 1 ลูก

$$\text{นั่นคือ } n(E_1) = C_{2,1} \times C_{2,1} = 2 \times 2 = 4$$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S_1)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงและสีเขียวอย่างละ 1 ลูก เมื่อหยิบลูกบอล 2 ลูกพร้อมกัน เท่ากับ $\frac{2}{3}$

- 2) ให้ S_2 แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S_2) = C_{4,1} \times C_{3,1} = 4 \times 3 = 12$$

ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงและสีเขียวอย่างละ 1 ลูก

กรณีที่ 1 หยิบได้ลูกบอลสีแดงเป็นลูกแรก

มีวิธีหยิบลูกบอลลูกแรกได้สีแดง 2 วิธี

มีวิธีหยิบลูกบอลลูกที่สองได้สีเขียว 2 วิธี

ดังนั้น มีวิธีหยิบลูกบอลลูกแรกได้สีแดง และลูกบอลลูกที่สองได้สีเขียว

$$2 \times 2 = 4 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 2 หยิบได้ลูกบอลสีเขียวเป็นลูกแรก

มีวิธีหยิบลูกบอลลูกแรกได้สีเขียว 2 วิธี

มีวิธีหยิบลูกบอลลูกที่สองได้สีแดง 2 วิธี

ดังนั้น มีวิธีหยิบลูกบอลลูกแรกได้สีเขียว และลูกบอลลูกที่สองได้สีแดง

$$2 \times 2 = 4 \text{ วิธี}$$

โดยหลักการบวก จะได้จำนวนวิธีหยิบได้ลูกบอลสีแดงและสีเขียวอย่างละ 1 ลูก

$$4 + 4 = 8 \text{ วิธี}$$

นั่นคือ $n(E_2) = 8$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S_2)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงและสีเขียวอย่างละ 1 ลูก เมื่อหยิบลูกบอลทีละลูกโดยไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง เท่ากับ $\frac{2}{3}$

3) ให้ S_3 แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S_3) = C_{4,1} \times C_{4,1} = 4 \times 4 = 16$$

ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงและสีเขียวอย่างละ 1 ลูก

กรณีที่ 1 หยิบได้ลูกบอลสีแดงเป็นลูกแรก

มีวิธีหยิบลูกบอลลูกแรกได้สีแดง 2 วิธี

มีวิธีหยิบลูกบอลลูกที่สองได้สีเขียว 2 วิธี

ดังนั้น มีวิธีหยิบลูกบอลลูกแรกได้สีแดง และลูกบอลลูกที่สองได้สีเขียว

$$2 \times 2 = 4 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 2 หยิบได้ลูกบอลสีเขียวเป็นลูกแรก

มีวิธีหยิบลูกบอลลูกแรกได้สีเขียว 2 วิธี

มีวิธีหยิบลูกบอลลูกที่สองได้สีแดง 2 วิธี

ดังนั้น มีวิธีหยิบลูกบอลลูกแรกได้สีเขียว และลูกบอลลูกที่สองได้สีแดง

$$2 \times 2 = 4 \text{ วิธี}$$

โดยหลักการบวก จะได้จำนวนวิธีหยิบได้ลูกบอลสีแดงและสีเขียวอย่างละ 1 ลูก

$$4 + 4 = 8 \text{ วิธี}$$

นั่นคือ $n(E_3) = 8$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S_3)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงและสีเขียวอย่างละ 1 ลูก เมื่อหยิบลูกบอลทีละลูกโดยไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง เท่ากับ $\frac{1}{2}$

12. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S) = 5 \times 4 = 20$

1) ให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่นักกีฬาคนนี้จะสวมเสื้อและกางเกงสีเดียวกัน

นั่นคือ สวมเสื้อสีขาวและกางเกงสีขาวเท่านั้น

ขั้นตอนที่ 1 มีวิธีเลือกสวมเสื้อสีขาวได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มีวิธีเลือกสวมกางเกงสีขาวได้ 1 วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีสวมเสื้อและกางเกงสีเดียวกัน $3 \times 1 = 3$ วิธี

นั่นคือ $n(E_1) = 3$

จะได้ $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{20}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักกีฬาคนนี้จะสวมเสื้อและกางเกงสีเดียวกัน เท่ากับ $\frac{3}{20}$

2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่นักกีฬาคนนี้จะสวมเสื้อและกางเกงสีต่างกัน

กรณีที่ 1 สวมเสื้อสีขาวและกางเกงสีเทา

มีวิธีเลือกสวมเสื้อสีขาวได้ 3 วิธี

มีวิธีเลือกสวมกางเกงสีเทาได้ 3 วิธี

ดังนั้น มีวิธีสวมเสื้อและกางเกงสีต่างกัน $3 \times 3 = 9$ วิธี

กรณีที่ 2 สวมเสื้อสีฟ้าและกางเกงสีใดก็ได้

มีวิธีเลือกสวมเสื้อสีฟ้าได้ 2 วิธี

มีวิธีเลือกสวมกางเกงสีขาวหรือสีเทาได้ 4 วิธี

ดังนั้น มีวิธีสวมเสื้อและกางเกงสีต่างกัน $2 \times 4 = 8$ วิธี

โดยหลักการบวก จะมีวิธีเลือกสวมเสื้อและกางเกงสีต่างกัน $9 + 8 = 17$ วิธี

นั่นคือ $n(E_2) = 17$

จะได้ $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{17}{20}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักกีฬาคนนี้จะสวมเสื้อและกางเกงสีต่างกัน เท่ากับ $\frac{17}{20}$

3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่นักกีฬาคนนี้จะสวมเสื้อสีฟ้า

ขั้นตอนที่ 1 มีวิธีเลือกสวมเสื้อสีฟ้าได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มีวิธีเลือกสวมกางเกงสีใดก็ได้ ได้ 4 วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีสวมเสื้อสีฟ้า $2 \times 4 = 8$ วิธี

นั่นคือ $n(E_3) = 8$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักกีฬาคนนี้จะสวมเสื้อสีฟ้า เท่ากับ $\frac{2}{5}$

13. ให้ S_1 แทนปริภูมิตัวอย่างของการหยิบลูกบอลครั้งละ 1 ลูก 2 ครั้ง จากกล่องใบหนึ่งซึ่งมีลูกบอล 30 ลูก โดยหยิบลูกบอลลูกแรกแล้วไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง

$$\text{จะได้ } n(S_1) = C_{30,1} \times C_{29,1} = 30 \times 29 = 870$$

และให้ S_2 แทนปริภูมิตัวอย่างของการหยิบลูกบอลครั้งละ 1 ลูก 2 ครั้ง จากกล่องใบหนึ่งซึ่งมีลูกบอล 30 ลูก โดยหยิบลูกบอลลูกแรกแล้วใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง

$$\text{จะได้ } n(S_2) = C_{30,1} \times C_{30,1} = 30 \times 30 = 900$$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลลูกแรกเป็นสีแดงและลูกบอลลูกที่สองเป็นสีเหลือง เมื่อกำหนดให้หยิบลูกบอลลูกแรกแล้วไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง

ขั้นตอนที่ 1 หยิบครั้งที่ 1 ได้ลูกบอลสีแดง 1 ลูก จากลูกบอลสีแดง 10 ลูก ทำได้ 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 หยิบครั้งที่ 2 ได้ลูกบอลสีเหลือง 1 ลูก จากลูกบอลสีเหลือง 10 ลูก ทำได้ 10 วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีหยิบได้ลูกบอลสีแดง 1 ลูก และสีเหลือง 1 ลูก ตามลำดับ $10 \times 10 = 100$ วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E_1) = 100$$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S_1)} = \frac{100}{870} = \frac{10}{87}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลลูกแรกเป็นสีแดงและลูกบอลลูกที่สองเป็นสีเหลือง เมื่อกำหนดให้หยิบลูกบอลลูกแรกแล้วไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง เท่ากับ $\frac{10}{87}$

- 2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลลูกแรกเป็นสีแดงและลูกบอลลูกที่สองเป็นสีเหลือง เมื่อกำหนดให้หยิบลูกบอลลูกแรกแล้วใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง

ขั้นตอนที่ 1 หยิบครั้งที่ 1 ได้ลูกบอลสีแดง 1 ลูก จากลูกบอลสีแดง 10 ลูก ทำได้ 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 หยิบครั้งที่ 2 ได้ลูกบอลสีเหลือง 1 ลูก จากลูกบอลสีเหลือง 10 ลูก ทำได้ 10 วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีหยิบได้ลูกบอลสีแดง 1 ลูก และสีเหลือง 1 ลูก ตามลำดับ $10 \times 10 = 100$ วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E_2) = 100$$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S_2)} = \frac{100}{900} = \frac{1}{9}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลลูกแรกเป็นสีแดงและลูกบอลลูกที่สองเป็นสีเหลือง เมื่อกำหนดให้หยิบลูกบอลลูกแรกแล้วใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง เท่ากับ $\frac{1}{9}$

- 3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีเขียวทั้งสองครั้ง เมื่อกำหนดให้หยิบลูกบอลลูกแรกแล้วใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง

ขั้นตอนที่ 1 หยิบครั้งที่ 1 ได้ลูกบอลสีเขียว 1 ลูก จากลูกบอลสีเขียว 10 ลูก ทำได้ 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 หยิบครั้งที่ 2 ได้ลูกบอลสีเขียว 1 ลูก จากลูกบอลสีเขียว 10 ลูก ทำได้ 10 วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีหยิบได้ลูกบอลสีเขียว 2 ลูก $10 \times 10 = 100$ วิธี

นั่นคือ $n(E_3) = 100$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S_2)} = \frac{100}{900} = \frac{1}{9}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีเขียวทั้งสองครั้ง เมื่อกำหนดให้หยิบลูกบอลลูกแรกแล้วใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สองเท่ากับ $\frac{1}{9}$

- 4) ให้ E_4 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีเขียวทั้งสองครั้ง เมื่อกำหนดให้หยิบลูกบอลลูกแรกแล้วไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง

ขั้นตอนที่ 1 หยิบครั้งที่ 1 ได้ลูกบอลสีเขียว 1 ลูก จากลูกบอลสีเขียว 10 ลูก ทำได้ 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 หยิบครั้งที่ 2 ได้ลูกบอลสีเขียว 1 ลูก จากลูกบอลสีเขียวที่เหลือ 9 ลูก ทำได้ 9 วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีหยิบได้ลูกบอลสีเขียว 2 ลูก $10 \times 9 = 90$ วิธี

นั่นคือ $n(E_4) = 90$

$$\text{จะได้ } P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S_1)} = \frac{90}{870} = \frac{3}{29}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีเขียวทั้งสองครั้ง เมื่อกำหนดให้หยิบลูกบอลลูกแรกแล้วไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง เท่ากับ $\frac{3}{29}$

- 5) ให้ E_5 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก เมื่อกำหนดให้หยิบลูกบอลลูกแรกแล้วไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง

วิธีที่ 1 หยิบได้ลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก แบ่งเป็นกรณีดังนี้

กรณีที่ 1 หยิบได้ลูกบอลสีแดง 1 ลูก ในครั้งที่ 1

ขั้นตอนที่ 1 หยิบครั้งที่ 1 ได้ลูกบอลสีแดง 1 ลูก จากลูกบอลสีแดง 10 ลูก ทำได้ 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 หยิบครั้งที่ 2 ได้ลูกบอลสีอื่นที่ไม่ใช่สีแดง 1 ลูก จากลูกบอลสีอื่นที่ไม่ใช่สีแดง 20 ลูก ทำได้ 20 วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีหยิบได้ลูกบอลสีแดง 1 ลูก $10 \times 20 = 200$ วิธี

กรณีที่ 2 หยิบได้ลูกบอลสีแดง 1 ลูก ในครั้งที่ 2

ขั้นตอนที่ 1 หยิบครั้งที่ 1 ได้ลูกบอลสีอื่นที่ไม่ใช่สีแดง 1 ลูก จากลูกบอลสีอื่นที่ไม่ใช่สีแดง 20 ลูก ทำได้ 20 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 หยิบครั้งที่ 2 ได้ลูกบอลสีแดง 1 ลูก จากลูกบอลสีแดง 10 ลูก ทำได้ 10 วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีหยิบได้ลูกบอลสีแดง 1 ลูก $20 \times 10 = 200$ วิธี

กรณีที่ 3 หยิบได้ลูกบอลสีแดง 2 ลูก

ขั้นตอนที่ 1 หยิบครั้งที่ 1 ได้ลูกบอลสีแดง 1 ลูก จากลูกบอลสีแดง 10 ลูก ทำได้ 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 หยิบครั้งที่ 2 ได้ลูกบอลสีแดง 1 ลูก จากลูกบอลสีแดงที่เหลือ 9 ลูก ทำได้ 9 วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีหยิบได้ลูกบอลสีแดง 2 ลูก $10 \times 9 = 90$ วิธี

จะได้ว่า มีวิธีหยิบได้ลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก $200 + 200 + 90 = 490$ วิธี
นั่นคือ $n(E_5) = 490$

$$\text{จะได้ } P(E_5) = \frac{n(E_5)}{n(S_1)} = \frac{490}{870} = \frac{49}{87}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ได้ลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก เมื่อกำหนดให้หยิบลูกบอลลูกแรกแล้วไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง เท่ากับ $\frac{49}{87}$

วิธีที่ 2 หยิบไม่ได้ลูกบอลสีแดง

ขั้นตอนที่ 1 หยิบครั้งที่ 1 ได้ลูกบอลสีอื่นที่ไม่ใช่สีแดง 1 ลูก

จากลูกบอลสีอื่นที่ไม่ใช่สีแดง 20 ลูก ได้ 20 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 หยิบครั้งที่ 2 ได้ลูกบอลสีอื่นที่ไม่ใช่สีแดง 1 ลูก

จากลูกบอลสีอื่นที่ไม่ใช่สีแดงที่เหลือ 19 ลูก ได้ 19 วิธี

โดยหลักการคูณ จะมีวิธีหยิบได้ลูกบอลสีอื่นที่ไม่ใช่สีแดง 2 ลูก เท่ากับ

$$20 \times 19 = 380 \text{ วิธี}$$

จะได้ว่า จะมีวิธีหยิบได้ลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก $870 - 380 = 490$ วิธี

นั่นคือ $n(E_5) = 490$

$$\text{จะได้ } P(E_5) = \frac{n(E_5)}{n(S_1)} = \frac{490}{870} = \frac{49}{87}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ได้ลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก เมื่อกำหนดให้หยิบ

ลูกบอลลูกแรกแล้วไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง เท่ากับ $\frac{49}{87}$

- 6) ให้ E_6 แทนเหตุการณ์ที่หยิบไม่ได้ลูกบอลสีแดง เมื่อกำหนดให้หยิบลูกบอลลูกแรกแล้วใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง

ขั้นตอนที่ 1 หยิบครั้งที่ 1 ได้ลูกบอลสีอื่นที่ไม่ใช่สีแดง 1 ลูก จากลูกบอลสีอื่นที่ไม่ใช่สีแดง 20 ลูก ได้ 20 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 หยิบครั้งที่ 2 ได้ลูกบอลสีอื่นที่ไม่ใช่สีแดง 1 ลูก จากลูกบอลสีอื่นที่ไม่ใช่สีแดง 20 ลูก ได้ 20 วิธี

ดังนั้น มีวิธีหยิบไม่ได้ลูกบอลสีแดง $20 \times 20 = 400$ วิธี

นั่นคือ $n(E_6) = 400$

$$\text{จะได้ } P(E_6) = \frac{n(E_6)}{n(S_2)} = \frac{400}{900} = \frac{4}{9}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ไม่ได้ลูกบอลสีแดง เมื่อกำหนดให้หยิบลูกบอลลูกแรกแล้วใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง เท่ากับ $\frac{4}{9}$

14. ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = C_{52,3} = 22,100$$

1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่ได้ไพ่ J, Q, K อย่างละใบ

ขั้นตอนที่ 1 หยิบได้ไพ่ J 1 ใบ จากไพ่ J 4 ใบ ได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 หยิบได้ไพ่ Q 1 ใบ จากไพ่ Q 4 ใบ ได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 หยิบได้ไพ่ K 1 ใบ จากไพ่ K 4 ใบ ได้ 4 วิธี

จะได้ว่า จำนวนวิธีที่ได้ไพ่ J, Q, K อย่างละใบ ได้ $4 \times 4 \times 4 = 64$ วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E_1) = 64$$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{64}{22,100} = \frac{16}{5,525}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ได้ไพ่ J, Q และ K อย่างละใบ เท่ากับ $\frac{16}{5,525}$

2) ให้ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ไพ่ที่มีหน้าสีแดง 2 ใบ

เนื่องจากมีไพ่หน้าสีแดง และไพ่หน้าสีดำ อย่างละ 26 ใบ

ขั้นตอนที่ 1 หยิบได้ไพ่หน้าสีแดง 2 ใบ จากไพ่หน้าสีแดง 26 ใบ ได้ $C_{26,2}$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 หยิบได้ไพ่หน้าสีดำ 1 ใบ จากไพ่หน้าสีดำ 26 ใบ ได้ $C_{26,1}$ วิธี

จะได้ว่า จำนวนวิธีหยิบไพ่ที่มีหน้าสีแดง 2 ใบ ได้ $C_{26,2} \times C_{26,1} = 8,450$

$$\text{นั่นคือ } n(E_2) = 8,450$$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{8,450}{22,100} = \frac{13}{34}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ได้ไพ่ที่มีหน้าสีแดง 2 ใบ เท่ากับ $\frac{13}{34}$

3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่ได้ไพ่ที่มีหมายเลขเดียวกันหรือตัวอักษรเดียวกันทั้งสามใบ

ขั้นตอนที่ 1 เลือกหมายเลขหรือตัวอักษร 1 ตัว จาก 13 ตัว ได้ 13 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกไพ่ 3 ใบ จากไพ่ที่มีหมายเลขหรือตัวอักษรเดียวกันซึ่งมี 4 ใบ
ได้ $C_{4,3} = 4$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่ได้ไพ่หมายเลขเดียวกันหรือตัวอักษรเดียวกันทั้งสามใบ $13 \times 4 = 52$ วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E_3) = 52$$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{52}{22,100} = \frac{1}{425}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ได้ไฟที่มีหมายเลขหรือตัวอักษรเดียวกันทั้งสามใบ เท่ากับ $\frac{1}{425}$

- 4) ให้ E_4 แทนเหตุการณ์ที่ได้ไฟที่มีหมายเลขหรือตัวอักษรต่างกันทั้งสามใบ

ขั้นตอนที่ 1 เลือกหมายเลขหรือตัวอักษร 3 ตัว จาก 13 ตัว ได้ $C_{13,3}$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกไฟ 1 ใบ จากหมายเลขหรือตัวอักษรตัวที่ 1 จากหมายเลขหรือตัวอักษรที่เลือกในขั้นที่ 1 ซึ่งมี 4 ใบ ได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกไฟ 1 ใบ จากหมายเลขหรือตัวอักษรตัวที่ 2 จากหมายเลขหรือตัวอักษรที่เลือกในขั้นที่ 1 ซึ่งมี 4 ใบ ได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 เลือกไฟ 1 ใบ จากหมายเลขหรือตัวอักษรตัวที่ 3 จากหมายเลขหรือตัวอักษรที่เลือกในขั้นที่ 1 ซึ่งมี 4 ใบ ได้ 4 วิธี

จะได้ว่า จำนวนวิธีที่ได้ไฟหมายเลขหรือตัวอักษรต่างกันทั้งสามใบ $C_{13,3} \times 4 \times 4 \times 4 = 18,304$ วิธี

นั่นคือ $n(E_4) = 18,304$

$$\text{จะได้ } P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S)} = \frac{18,304}{22,100} = \frac{352}{425}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ได้ไฟที่มีหมายเลขหรือตัวอักษรต่างกันทั้งสามใบ เท่ากับ $\frac{352}{425}$

15. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ผู้เข้าแข่งขัน 2 คน สุ่มได้หัวข้อเดียวกัน และอีกคนได้หัวข้ออื่น

ขั้นตอนที่ 1 เลือกผู้เข้าแข่งขันที่แต่งกลอนหัวข้อเดียวกัน 2 คน จาก 3 คน ได้ $C_{3,2} = 3$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกหัวข้อ 1 หัวข้อ จากหัวข้อบังคับ 5 หัวข้อ ได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกหัวข้อ 1 หัวข้อ จากหัวข้อบังคับที่เหลือ 4 หัวข้อ ได้ 4 วิธี

จะได้ว่า มีจำนวนวิธีที่ผู้เข้าแข่งขัน 2 คน สุ่มได้หัวข้อเดียวกัน และอีกคนได้หัวข้ออื่น

$$3 \times 5 \times 4 = 60 \text{ วิธี}$$

นั่นคือ $n(E) = 60$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{60}{125} = \frac{12}{25}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้าแข่งขัน 2 คน สุ่มได้หัวข้อเดียวกัน และอีกคนได้หัวข้ออื่น เท่ากับ $\frac{12}{25}$

16. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = P_{6,3} \times P_{5,2} = 2,400$$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่ศิวัชจะได้เข้าทำงาน

ขั้นตอนที่ 1 เลือกตำแหน่งที่ว่างสำหรับผู้ชาย ให้ศิวัช ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดผู้ชายที่เหลือ 5 คน เข้าทำงานในตำแหน่งที่ว่าง 2 ตำแหน่ง ได้ $P_{5,2} = 20$ วิธี

ขั้นตอนที่ 3 จัดผู้หญิง 5 คน เข้าทำงานในตำแหน่งที่ว่าง 2 ตำแหน่ง ได้ $P_{5,2} = 20$ วิธี

จะได้ว่า จำนวนวิธีในการจัดผู้เข้าสมัครเข้าทำงาน โดยที่ศิวัชได้เข้าทำงาน เป็น $3 \times 20 \times 20 = 1,200$ วิธี

นั่นคือ $n(E_1) = 1200$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{1,200}{2,400} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ศิวัชจะได้เข้าทำงานที่บริษัทนี้ เท่ากับ $\frac{1}{2}$

- 2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่สร้อยได้เข้าทำงานแต่ปลายฟ้าไม่ได้เข้าทำงาน

ขั้นตอนที่ 1 เลือกตำแหน่งที่ว่างสำหรับผู้หญิง ให้สร้อย ได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดผู้หญิง 3 คนที่เหลือที่ไม่ใช่ปลายฟ้า เข้าทำงานในตำแหน่งที่ว่าง 1 ตำแหน่ง ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 จัดผู้ชาย 6 คน เข้าทำงานในตำแหน่งที่ว่าง 3 ตำแหน่ง ได้ $P_{6,3} = 120$ วิธี

จะได้ว่า จำนวนวิธีในการจัดผู้เข้าสมัครเข้าทำงาน โดยที่สร้อยได้เข้าทำงาน แต่ปลายฟ้าไม่ได้เข้าทำงาน เป็น $2 \times 3 \times 120 = 720$ วิธี

นั่นคือ $n(E_2) = 720$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{720}{2,400} = \frac{3}{10}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่สร้อยได้เข้าทำงาน แต่ปลายฟ้าไม่ได้เข้าทำงาน เท่ากับ $\frac{3}{10}$

17. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = 8! = 40,320$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนชายและนักเรียนหญิงยืนสลับกัน

กรณีที่ 1 นักเรียนชายยืนหัวแถว

จัดนักเรียนชายยืนก่อนได้ 4! วิธี

จัดนักเรียนหญิงยืนแทรกนักเรียนชายซึ่งมี 4 ตำแหน่ง ได้ 4! วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีจัดนักเรียนชายและนักเรียนหญิงยืนสลับกัน โดยนักเรียนชาย

ยืนหัวแถว $4!4! = 576$ วิธี

กรณีที่ 2 นักเรียนหญิงยืนหัวแถว

จัดนักเรียนหญิงยืนก่อนได้ 4! วิธี

จัดนักเรียนชายยืนแทรกนักเรียนหญิงซึ่งมี 4 ตำแหน่ง ได้ 4! วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีจัดนักเรียนชายและนักเรียนหญิงยืนสลับกัน โดยนักเรียนหญิง

ยืนหัวแถว $4!4! = 576$ วิธี

โดยหลักการบวก จะมีวิธีจัดให้นักเรียนชายและนักเรียนหญิงยืนสลับกันได้ $576 + 576 = 1,152$ วิธี

นั่นคือ $n(E) = 1,152$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1,152}{40,320} = \frac{1}{35}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักเรียนชายและนักเรียนหญิงยืนสลับกัน เท่ากับ $\frac{1}{35}$

18. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = 5! = 120$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ไอศกรีมลูกบนสุดเป็นรสวานิลลาและไอศกรีมลูกกลางเป็นรสชาเขียว

เนื่องจากต้องการให้ไอศกรีมลูกบนสุดเป็นรสวานิลลาและไอศกรีมลูกกลางเป็นรสชาเขียว

แสดงว่าเหลือดักไอศกรีมใส่โคนครั้งที่ 1, 2 และ 4 เป็นอีกสามรสที่เหลือ ซึ่งทำได้ $3! = 6$ วิธี

นั่นคือ $n(E) = 6$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ไอศกรีมลูกบนสุดเป็นรสวานิลลาและไอศกรีมลูกกลางเป็นรสชาเขียว เท่ากับ $\frac{1}{20}$

19. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S) = \frac{10!}{6!3!1!}$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่รหัสของผู้ที่ได้รับรางวัลใหญ่ขึ้นต้นด้วย 1 และลงท้ายด้วย 2

เนื่องจากต้องการให้รหัสขึ้นต้นด้วย 1 และลงท้ายด้วย 2

จะมีตัวเลขที่เหลือในการเรียง 8 ตัว คือ ตัวเลข 1 จำนวน 5 ตัว และตัวเลข 0 จำนวน 3 ตัว

ซึ่งจัดเรียงได้ $\frac{8!}{5!3!}$ วิธี

นั่นคือ $n(E) = \frac{8!}{5!3!}$

จะได้ $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{8!}{5!3!} \times \frac{6!3!1!}{10!} = \frac{1}{15}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่รหัสของผู้ที่ได้รับรางวัลใหญ่ขึ้นต้นด้วย 1 และลงท้ายด้วย 2

เท่ากับ $\frac{1}{15}$

20. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S) = 9!$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่หนังสือคณิตศาสตร์วางในตำแหน่งหัวแถวและท้ายแถว

ขั้นตอนที่ 1 เลือกหนังสือคณิตศาสตร์ 2 เล่ม จากหนังสือคณิตศาสตร์ 2 เล่ม มาวางในตำแหน่งหัวแถวและท้ายแถว ได้ 2! วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดหนังสือ 7 เล่มที่เหลือแทรกหว่างหนังสือคณิตศาสตร์ได้ 7! วิธี

ดังนั้น มีวิธีในการจัดหนังสือคณิตศาสตร์วางในตำแหน่งหัวแถวและท้ายแถวได้ 2!7! วิธี

นั่นคือ $n(E_1) = 2!7!$

จะได้ $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{2!7!}{9!} = \frac{1}{36}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หนังสือคณิตศาสตร์วางในตำแหน่งหัวแถวและท้ายแถว เท่ากับ $\frac{1}{36}$

2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่หนังสือวิชาเดียวกันอยู่ติดกัน

ขั้นตอนที่ 1 มัดหนังสือวิชาเดียวกันเป็น 3 มัด ซึ่งจัดเรียงได้ 3! วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มัดที่เป็นหนังสือเคมีที่ต่างกัน 3 เล่ม จัดเรียงได้ 3! วิธี

ขั้นตอนที่ 3 มัดที่เป็นหนังสือคณิตศาสตร์ที่ต่างกัน 2 เล่ม จัดเรียงได้ 2! วิธี

ขั้นตอนที่ 4 มัดที่เป็นหนังสือภาษาอังกฤษที่ต่างกัน 4 เล่ม จัดเรียงได้ 4! วิธี

จะได้ว่า จำนวนวิธีจัดเรียงให้หนังสือวิชาเดียวกันอยู่ติดกันได้ $3!3!2!4!$ วิธี

นั่นคือ $n(E_2) = 3!3!2!4!$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{3!3!2!4!}{9!} = \frac{1}{210}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หนังสือวิชาเดียวกันอยู่ติดกัน เท่ากับ $\frac{1}{210}$

21. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

เนื่องจากต้องการจำนวนคี่ที่มีสามหลักที่เลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน จะได้ว่า

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 1, 3, 5, 7 หรือ 9 เป็นหลักหน่วย ได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดดที่ไม่ใช่ 0 และไม่ซ้ำกับหลักหน่วย
เป็นหลักร้อย ได้ 8 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดดที่เหลือเป็นหลักสิบ ได้ 8 วิธี

ดังนั้น จะมีจำนวนคี่ที่มีสามหลักที่เลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน $5 \times 8 \times 8 = 320$ จำนวน

จะได้ $n(S) = 320$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่สุ่มได้จำนวนคี่ที่มีสามหลักที่เลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน และมากกว่า 300 แต่น้อยกว่า 900

กรณีที่ 1 หลักหน่วยเป็นเลขโดด 1 หรือ 9

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 1 หรือ 9 เป็นหลักหน่วย ได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 3, 4, 5, ..., 8 เป็นหลักร้อย ได้ 6 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดดที่เหลือเป็นหลักสิบได้ 8 วิธี

ดังนั้น จะมีจำนวนคี่ที่ต้องการในกรณีนี้ทั้งหมด $2 \times 6 \times 8 = 96$ จำนวน

กรณีที่ 2 หลักหน่วยเป็นเลขโดด 3, 5 หรือ 7

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 3, 5 หรือ 7 เป็นหลักหน่วย ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 3, 4, 5, ..., 8 และไม่ซ้ำกับหลักหน่วย เป็นหลักร้อย ได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดดที่เหลือเป็นหลักสิบได้ 8 วิธี

ดังนั้น จะมีจำนวนที่ต้องการในกรณีนี้ทั้งหมด $3 \times 5 \times 8 = 120$ จำนวน

โดยหลักการบวก จะมีจำนวนที่สามหลักที่เลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกันและมีค่ามากกว่า 300 แต่น้อยกว่า 900 ทั้งหมด $96 + 120 = 216$ จำนวน

นั่นคือ $n(E) = 216$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{216}{320} = \frac{27}{40}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จำนวนคี่นี้มากกว่า 300 แต่น้อยกว่า 900 เท่ากับ $\frac{27}{40}$

22. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = \frac{15!}{4!5!6!} = 630,630$$

1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่หลอดไฟสีเดียวกันอยู่ติดกันทั้งหมด

จะพิจารณาว่าหลอดไฟสีเดียวกันมัดติดกันเป็นสิ่งของ 1 ชิ้น

ดังนั้น จะมีหลอดไฟอยู่ 3 มัด จัดเรียงได้ 3! วิธี

เนื่องจากหลอดไฟสีเดียวกันไม่ต่างกัน จะได้ในแต่ละมัด จัดเรียงได้ 1 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดเรียงให้หลอดไฟสีเดียวกันอยู่ติดกันทั้งหมด ได้ $3! = 6$ วิธี

นั่นคือ $n(E_1) = 6$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{6}{630,630} = \frac{1}{105,105}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟสีเดียวกันอยู่ติดกันทั้งหมด เท่ากับ $\frac{1}{105,105}$

2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่หลอดไฟสีขาวอยู่ทางซ้ายสุด และหลอดไฟสีน้ำเงินอยู่ทางขวาสุด

เนื่องจากต้องการให้หลอดไฟสีขาวอยู่ทางซ้ายสุด และหลอดไฟสีน้ำเงินอยู่ทางขวาสุด

จะเหลือหลอดไฟที่ต้องจัดเรียง ได้แก่ หลอดไฟสีขาว 3 หลอด สีแดง 5 หลอด และสีน้ำเงิน

5 หลอด ซึ่งจัดเรียงได้ $\frac{13!}{3!5!5!} = 72,072$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จัดหลอดไฟสีขาวอยู่ทางซ้ายสุด และหลอดไฟสีน้ำเงินอยู่ทางขวาสุด ได้ 72,072 วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E_2) = 72,072$$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{72,072}{630,630} = \frac{4}{35}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟสีขาวอยู่ทางซ้ายสุด และหลอดไฟสีน้ำเงินอยู่ทางขวาสุด เท่ากับ $\frac{4}{35}$

23. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = C_{11,3} = 165$$

1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลครบทุกสี

ขั้นตอนที่ 1 หยิบลูกบอลสีแดง 1 ลูก จากลูกบอลสีแดง 5 ลูก ได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 หยิบลูกบอลสีขาว 1 ลูก จากลูกบอลสีขาว 3 ลูก ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 หยิบลูกบอลสีน้ำเงิน 1 ลูก จากลูกบอลสีน้ำเงิน 3 ลูก ได้ 3 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีหยิบได้ลูกบอลครบทุกสี มี $5 \times 3 \times 3 = 45$ วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E_1) = 45$$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{45}{165} = \frac{3}{11}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลครบทุกสี เท่ากับ $\frac{3}{11}$

2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก

วิธีที่ 1 หยิบได้ลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก แบ่งเป็นกรณีดังนี้

กรณีที่ 1 หยิบได้ลูกบอลสีแดง 1 ลูก

หยิบลูกบอลสีแดง 1 ลูก จากลูกบอลสีแดง 5 ลูก ได้ 5 วิธี

หยิบลูกบอลสีอื่นอีก 2 ลูก จากลูกบอลสีอื่นที่ไม่ใช่สีแดง 6 ลูก

ได้ $C_{6,2} = 15$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีแดง 1 ลูก และสีอื่นอีก 2 ลูก

มี $5 \times 15 = 75$ วิธี

กรณีที่ 2 หยิบได้ลูกบอลสีแดง 2 ลูก

หยิบลูกบอลสีแดง 2 ลูก จากลูกบอลสีแดง 5 ลูก ได้ $C_{5,2} = 10$ วิธี

หยิบลูกบอลสีอื่นที่ไม่ใช่สีแดงอีก 1 ลูก จากลูกบอลสีอื่นที่ไม่ใช่สีแดง 6 ลูก ได้ 6 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีแดง 2 ลูก และสีอื่นอีก 1 ลูก มี $10 \times 6 = 60$ วิธี

กรณีที่ 3 หยิบได้ลูกบอลสีแดง 3 ลูก

หยิบลูกบอลสีแดง 3 ลูก จากลูกบอลสีแดง 5 ลูก ได้ $C_{5,3} = 10$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีแดง 3 ลูก มี 10 วิธี

โดยหลักการบวก จะได้ว่า จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก มี

$$75 + 60 + 10 = 145 \text{ วิธี}$$

นั่นคือ $n(E_2) = 145$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{145}{165} = \frac{29}{33}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก เท่ากับ $\frac{29}{33}$

วิธีที่ 2 หยิบไม่ได้ลูกบอลสีแดง

หยิบลูกบอลสีอื่นที่ไม่ใช่สีแดง 3 ลูก จากลูกบอลสีอื่น 6 ลูก ได้ $C_{6,3} = 20$ วิธี

จะได้ว่า จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก มี $165 - 20 = 145$ วิธี

นั่นคือ $n(E_2) = 145$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{145}{165} = \frac{29}{33}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก เท่ากับ $\frac{29}{33}$

3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีน้ำเงินอย่างน้อย 1 ลูก และไม่ได้ลูกบอลสีขาว

กรณีที่ 1 หยิบได้ลูกบอลสีน้ำเงิน 1 ลูก

หยิบลูกบอลสีน้ำเงิน 1 ลูก จากลูกบอลสีน้ำเงิน 3 ลูก ได้ 3 วิธี

หยิบลูกบอลสีแดง 2 ลูก จากลูกบอลสีแดง 5 ลูก ได้ $C_{5,2} = 10$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีน้ำเงิน 1 ลูก และสีแดงอีก 2 ลูก มี

$$3 \times 10 = 30 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 2 หยิบได้ลูกบอลสีน้ำเงิน 2 ลูก

หยิบลูกบอลสีน้ำเงิน 2 ลูก จากลูกบอลสีน้ำเงิน 3 ลูก ได้ $C_{3,2} = 3$ วิธี

หยิบลูกบอลสีแดง 1 ลูก จากลูกบอลสีแดง 5 ลูก ได้ 5 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีน้ำเงิน 2 ลูก และสีแดง 1 ลูก มี $3 \times 5 = 15$ วิธี

กรณีที่ 3 หยิบได้ลูกบอลสีน้ำเงิน 3 ลูก

หยิบลูกบอลสีน้ำเงิน 3 ลูก จากลูกบอลสีน้ำเงิน 3 ลูก ได้ $C_{3,3} = 1$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีน้ำเงิน 3 ลูก มี 1 วิธี

โดยหลักการบวก จะได้ จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีน้ำเงินอย่างน้อย 1 ลูก และไม่ได้ลูกบอลสีขาว มี $30 + 15 + 1 = 46$ วิธี

นั่นคือ $n(E_3) = 46$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{46}{165}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีน้ำเงินอย่างน้อย 1 ลูก และไม่ได้ลูกบอลสีขาว

$$\text{เท่ากับ } \frac{46}{165}$$

24. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

เนื่องจากต้องการสร้างเลขหกหลักจากเลขโดด 6 ตัว คือ 0, 4, 4, 5, 5, 5

จะได้ว่า เลขโดดในหลักแสนต้องไม่ใช่เลข 0 ซึ่งทำได้ 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 เลขโดดในหลักแสนเป็นเลข 4

$$\text{จะจัดเรียงเลขโดด 5 ตัว ที่เหลือได้ } \frac{5!}{1!1!3!} = 20 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 2 เลขโดดในหลักแสนเป็นเลข 5

$$\text{จะจัดเรียงเลขโดด 5 ตัว ที่เหลือได้ } \frac{5!}{1!2!2!} = 30 \text{ วิธี}$$

โดยหลักการบวก จะสร้างจำนวนหกหลัก จากเลขโดด 0, 4, 4, 5, 5, 5 ได้ $20 + 30 = 50$ จำนวน

$$\text{จะได้ } n(S) = 50$$

1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่จำนวนนี้อยู่ระหว่าง 400,000 ถึง 500,000

เนื่องจากจำนวนนี้อยู่ระหว่าง 400,000 ถึง 500,000 จะมีเลขโดดในหลักแสนเป็น

เลข 4 เท่านั้น ซึ่งจะจัดเรียงเลขโดด 5 ตัวที่เหลือได้ $\frac{5!}{1!1!3!} = 20$ วิธี

ดังนั้น มีจำนวนนี้อยู่ระหว่าง 400,000 ถึง 500,000 อยู่ 20 จำนวน

นั่นคือ $n(E_1) = 20$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จำนวนนี้อยู่ระหว่าง 400,000 ถึง 500,000 เท่ากับ $\frac{2}{5}$

- 2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่จำนวนนี้มากกว่า 500,000

เนื่องจากจำนวนที่มากกว่า 500,000 จะมีเลขโดดในหลักแสนเป็นเลข 5 เท่านั้น

ซึ่งจะจัดเรียงเลขโดด 5 ตัวที่เหลือได้ $\frac{5!}{1!2!2!} = 30$ วิธี

ดังนั้น มีจำนวนที่มากกว่า 500,000 อยู่ 30 จำนวน

นั่นคือ $n(E_2) = 30$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จำนวนนี้มากกว่า 500,000 เท่ากับ $\frac{3}{5}$

- 3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่จำนวนนี้มากกว่า 400,000 และเป็นจำนวนคู่

เนื่องจากจำนวนที่เป็นจำนวนคู่ จะมีเลขโดดในหลักหน่วยเป็น 0 หรือ 4 มี 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 เลขโดดในหลักหน่วยเป็นเลข 0

จะจัดเรียงเลขโดด 5 ตัว ที่เหลือได้ $\frac{5!}{2!3!} = 10$ วิธี

ดังนั้น จำนวนที่มากกว่า 400,000 และมีเลขโดดในหลักหน่วยเป็นเลข 0 มี 10 จำนวน

กรณีที่ 2 เลขโดดในหลักหน่วยเป็น 4 ซึ่งแบ่งเป็นกรณีย่อย 2 กรณี ดังนี้

กรณี 2.1 เลขโดดในหลักแสนเป็นเลข 4

จะจัดเรียงเลขโดด 4 ตัวที่เหลือ ได้ $\frac{4!}{1!3!} = 4$ วิธี

กรณี 2.2 เลขโดดในหลักแสนเป็นเลข 5

จะจัดเรียงเลขโดด 4 ตัวที่เหลือ ได้ $\frac{4!}{1!1!2!} = 12$ วิธี

ดังนั้น จำนวนที่มากกว่า 400,000 และมีเลขโดดในหลักหน่วยเป็นเลข 4 มี 16 จำนวน

โดยหลักการบวก จะมีจำนวนที่มากกว่า 400,000 และเป็นจำนวนคู่ $10 + 16 = 26$ จำนวน

นั่นคือ $n(E_3) = 26$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{26}{50} = \frac{13}{25}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จำนวนนี้มากกว่า 400,000 และเป็นจำนวนคู่ เท่ากับ $\frac{13}{25}$

25. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = (11-1)! = 10!$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ไม่มีลูกเสือสองคนใดนั่งติดกัน

จัดเนตรนารี 6 คน นั่งก่อน ได้ $(6-1)! = 5!$ วิธี

ต่อมาจัดลูกเสือ 5 คน นั่งแทรกระหว่างเนตรนารี ซึ่งมีที่ให้แทรก 6 ที่ จะจัดได้ $P_{6,5} = 6!$ วิธี

ดังนั้น มีวิธีที่ไม่มีลูกเสือสองคนใดนั่งติดกัน $5!6!$ วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E) = 5!6!$$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5!6!}{10!} = \frac{1}{42}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ไม่มีลูกเสือสองคนใดนั่งติดกัน เท่ากับ $\frac{1}{42}$

แบบฝึกหัด 3.3

1. ให้ H แทนเหรียญขึ้นหัว

และ T แทนเหรียญขึ้นก้อย

1) ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

2) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่เหรียญทั้งสามเหรียญขึ้นหน้าเหมือนกัน

$$\text{จะได้ } E_1 = \{HHH, TTT\}$$

3) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่มีเหรียญขึ้นหัวอย่างน้อย 2 เหรียญ

$$\text{จะได้ } E_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$$

4) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่มีเหรียญขึ้นก้อยมากกว่าเหรียญขึ้นหัว

$$\text{จะได้ } E_3 = \{HTT, THT, TTH, TTT\}$$

$$5) E_1 \cup E_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTT\}$$

$$6) E_2 \cup E_3 = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\} = S$$

$$7) E_1 \cap E_2 = \{HHH\}$$

$$8) E_1 \cap E_3 = \{TTT\}$$

$$9) E_2' = \{HTT, THT, TTH, TTT\}$$

$$10) E_3' = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$$

2. ให้ A แทนเหตุการณ์ที่ฟินิจจะได้รับทุนไปเรียนต่อที่สหรัฐอเมริกา
และ B แทนเหตุการณ์ที่ฟินิจจะได้รับทุนไปเรียนต่อที่ประเทศอังกฤษ
จะได้ $A \cup B$ แทนเหตุการณ์ที่ฟินิจได้รับทุนไปเรียนต่อที่สหรัฐอเมริกาหรือประเทศอังกฤษ
และ $A \cap B$ แทนเหตุการณ์ที่ฟินิจได้รับทุนไปเรียนต่อที่ทั้งสองประเทศ

$$\text{โจทย์กำหนดให้ } P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{7}{10} \text{ และ } P(A \cup B) = \frac{9}{10}$$

$$\text{จาก } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{จะได้ } P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{7}{10} - \frac{9}{10} = \frac{11}{20}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ฟินิจจะได้รับทุนไปเรียนต่อที่ทั้งสองประเทศ เท่ากับ $\frac{11}{20}$

3. เนื่องจาก A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

นั่นคือ $A \cap B = \emptyset$

$$\text{จะได้ } P(A \cap B) = 0$$

$$\text{โจทย์กำหนดให้ } P(A) = 0.4 \text{ และ } P(B) = 0.5$$

$$1) \text{ จาก } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{จะได้ } P(A \cup B) = 0.4 + 0.5 - 0$$

$$\text{ดังนั้น } P(A \cup B) = 0.9$$

$$2) \text{ จาก } P(A') = 1 - P(A)$$

$$\text{จะได้ } P(A') = 1 - 0.4$$

$$\text{ดังนั้น } P(A') = 0.6$$

3) เนื่องจาก $A' \cap B = B \cap A' = B - A$

$$\text{จะได้ } P(A' \cap B) = P(B - A)$$

$$\text{จาก } P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } P(B - A) &= 0.5 - 0 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } P(A' \cap B) = 0.5$$

4. ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่างซึ่งเป็นเซตจำกัด และให้ A, B และ C เป็นเหตุการณ์ใด ๆ

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) \\ &\quad - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \frac{n(A \cup B \cup C)}{n(S)} &= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} + \frac{n(C)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap C)}{n(S)} \\ &\quad - \frac{n(B \cap C)}{n(S)} + \frac{n(A \cap B \cap C)}{n(S)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ &\quad - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

5. ให้ A แทนเหตุการณ์ที่กานต์จะได้เข้าทำงานที่บริษัทนี้

B แทนเหตุการณ์ที่ximจะได้เข้าทำงานที่บริษัทนี้

และ C แทนเหตุการณ์ที่คณินจะได้เข้าทำงานที่บริษัทนี้

$$\text{จะได้ } P(A) = P(B) \text{ และ } P(C) = 3P(A)$$

$$\text{เนื่องจาก } P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$\text{จะได้ } P(A) + P(A) + 3P(A) = 1$$

$$5P(A) = 1$$

$$\text{นั่นคือ } P(A) = \frac{1}{5}$$

$$\text{จะได้ } P(B) = \frac{1}{5} \text{ และ } P(C) = \frac{3}{5}$$

1) ความน่าจะเป็นที่กานต์จะได้เข้าทำงานที่บริษัทนี้ เท่ากับ $\frac{1}{5}$

2) เนื่องจาก C' เป็นเหตุการณ์ที่คณินไม่ได้เข้าทำงาน

$$\text{และจาก } P(C') = 1 - P(C)$$

$$\text{จะได้ } P(C') = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่คณินไม่ได้เข้าทำงานที่บริษัทนี้ เท่ากับ $\frac{2}{5}$

6. จากโจทย์กำหนดให้ $P(A) = 0.6$, $P(A - B) = 0.2$ และ $P(A \cup B) = 0.8$

$$\text{จาก } P(A \cap B) = P(A) - P(A - B)$$

$$\text{จะได้ } P(A \cap B) = 0.6 - 0.2 = 0.4$$

$$\text{จาก } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{จะได้ } P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0.8 - 0.6 + 0.4 = 0.6$$

$$\text{ดังนั้น } P(B) = 0.6$$

7. ให้ A แทนเหตุการณ์ที่พนักงานคนนี้เดินทางด้วยรถประจำทาง

และ B แทนเหตุการณ์ที่พนักงานคนนี้เดินทางด้วยรถไฟฟ้า

จะได้ $A \cap B$ แทนเหตุการณ์ที่พนักงานคนนี้เดินทางด้วยรถประจำทางและรถไฟฟ้า

และ $A' \cap B'$ แทนเหตุการณ์ที่พนักงานคนนี้ไม่ได้ใช้ทั้งสองวิธี

โจทย์กำหนดให้ $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ และ $P(A \cap B) = 0.2$

ต้องการหา $P(A' \cap B')$

$$\text{จาก } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } P(A \cup B) &= 0.5 + 0.3 - 0.2 \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

จากสมบัติของเซต ได้ว่า $A' \cap B' = (A \cup B)'$

$$\text{จาก } P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } P((A \cup B)') &= 1 - 0.6 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

นั่นคือ $P(A' \cap B') = 0.4$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่พนักงานบริษัทไม่ได้ใช้ทั้งสองวิธีในการเดินทาง เท่ากับ 0.4

8. ให้ A แทนเหตุการณ์ที่ผู้ป่วยคนนี้เป็นโรคเบาหวาน
 และ B แทนเหตุการณ์ที่ผู้ป่วยคนนี้เป็นโรคหัวใจ
 จะได้ $A \cup B$ แทนเหตุการณ์ที่ผู้ป่วยคนนี้เป็นโรคเบาหวานหรือโรคหัวใจ
 และ $A - B$ แทนเหตุการณ์ที่ผู้ป่วยคนนี้เป็นโรคเบาหวานเพียงอย่างเดียว
 โจทย์กำหนดให้ $P(A) = 0.41$, $P(B) = 0.28$ และ $P(A \cup B) = 0.6$

ต้องการหา $P(A - B)$

$$\text{จาก} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{จะได้} \quad P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ} \quad P(A \cap B) &= 0.41 + 0.28 - 0.6 \\ &= 0.09 \end{aligned}$$

$$\text{จาก} \quad P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad P(A - B) &= 0.41 - 0.09 \\ &= 0.32 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยคนนี้เป็นโรคเบาหวานเพียงอย่างเดียว เท่ากับ 0.32

9. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่าง

A แทนเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทิ้งสองลูกขึ้นแต้มเท่ากัน

B แทนเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มน้อยกว่า 8

C แทนเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มเท่ากับ 8

และ D แทนเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มมากกว่า 6

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า} \quad S &= \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), \\ &\quad (2,1), (2,2), \dots, (2,6), \\ &\quad \vdots \\ &\quad (6,1), (6,2), \dots, (6,6)\} \\ A &= \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \\ B &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ &\quad (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), \\ &\quad (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), \\ &\quad (4,1), (4,2), (4,3), \\ &\quad (5,1), (5,2), \\ &\quad (6,1)\} \end{aligned}$$

$$C = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$$

และ

$$D = \{(1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

ดังนั้น $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$, $P(C) = \frac{5}{36}$ และ $P(D) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

- 1) เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทิ้งสองลูกขึ้นแต้มไม่เท่ากันหรือผลบวกของแต้มเท่ากับ 8 คือ $A' \cup C$

จาก $P(A') = 1 - P(A)$

จะได้ $P(A') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

และจาก $P(A' \cup C) = P(A') + P(C) - P(A' \cap C)$

เนื่องจาก $A' \cap C = \{(2, 6), (3, 5), (5, 3), (6, 2)\}$ จะได้ว่า $P(A' \cap C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

นั่นคือ $P(A' \cup C) = \frac{5}{6} + \frac{5}{36} - \frac{1}{9} = \frac{31}{36}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าทิ้งสองลูกจะขึ้นแต้มไม่เท่ากันหรือผลบวกของแต้มเท่ากับ 8 คือ $\frac{31}{36}$

- 2) เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทิ้งสองลูกขึ้นแต้มเท่ากันหรือผลบวกของแตมน้อยกว่า 8 คือ $A \cup B$
- จาก $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

เนื่องจาก $A \cap B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ จะได้ว่า $P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

นั่นคือ $P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{7}{12} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าทิ้งสองลูกจะขึ้นแต้มเท่ากันหรือผลบวกของแตมน้อยกว่า 8 คือ $\frac{2}{3}$

- 3) เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทิ้งสองลูกจะขึ้นแต้มเท่ากันแต่ผลบวกของแต้มไม่มากกว่า 6 คือ $A-D$
จาก $P(A-D) = P(A) - P(A \cap D)$

$$\text{เนื่องจาก } A \cap D = \{(4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \text{ จะได้ว่า } P(A \cap D) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$\text{นั่นคือ } P(A-D) = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าทิ้งสองลูกจะขึ้นแต้มเท่ากันแต่ผลบวกไม่มากกว่า 6 คือ $\frac{1}{12}$

10. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่าง

A แทนเหตุการณ์ที่จำนวนนี้เป็นจำนวนคู่

B แทนเหตุการณ์ที่จำนวนนี้ลงท้ายด้วย 3

C แทนเหตุการณ์ที่จำนวนนี้หารด้วย 5 ลงตัว

และ D แทนเหตุการณ์ที่จำนวนนี้หารด้วย 3 ลงตัว

$$\text{จะได้ว่า } S = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$$

$$A = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$$

$$B = \{3, 13, 23, \dots, 93\}$$

$$C = \{5, 10, 15, \dots, 100\}$$

$$\text{และ } D = \{3, 6, 9, \dots, 99\}$$

$$\text{ดังนั้น } P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}, P(C) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \text{ และ } P(D) = \frac{33}{100}$$

- 1) เหตุการณ์ที่จำนวนนี้เป็นจำนวนคู่หรือลงท้ายด้วย 3 คือ $A \cup B$

$$\text{เนื่องจาก } A \cap B = \emptyset$$

$$\text{จะได้ } P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จำนวนนี้เป็นจำนวนคู่หรือลงท้ายด้วย 3 คือ $\frac{3}{5}$

- 2) เหตุการณ์ที่จำนวนนี้เป็นจำนวนคี่หรือหารด้วย 5 ลงตัว คือ $A' \cup C$

$$\text{จาก } P(A' \cup C) = P(A') + P(C) - P(A' \cap C)$$

$$\text{และจาก } P(A') = 1 - P(A)$$

$$\text{จะได้ } P(A') = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{เนื่องจาก } A' \cap C = \{5, 15, 25, \dots, 95\} \text{ จะได้ว่า } P(A' \cap C) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

$$\text{นั่นคือ } P(A' \cup C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จำนวนนี้เป็นจำนวนคี่หรือหารด้วย 5 ลงตัว เท่ากับ $\frac{3}{5}$

- 3) เหตุการณ์ที่จำนวนนี้เป็นจำนวนคู่และหารด้วย 3 ลงตัว คือ $A \cap D$

$$\text{เนื่องจาก } A \cap D = \{6, 12, 18, \dots, 96\} \text{ จะได้ว่า } P(A \cap D) = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จำนวนนี้เป็นจำนวนคู่และหารด้วย 3 ลงตัว เท่ากับ $\frac{4}{25}$

- 4) เหตุการณ์ที่จำนวนนี้เป็นจำนวนคู่หรือหารด้วย 3 ลงตัว คือ $A \cup D$

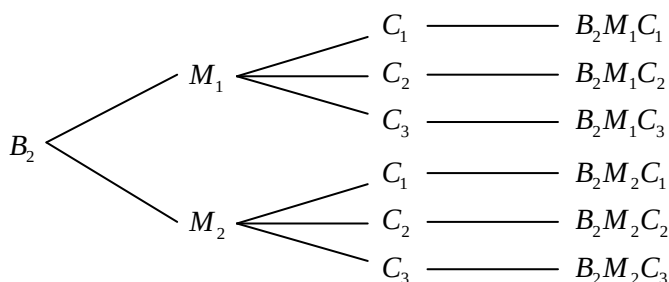
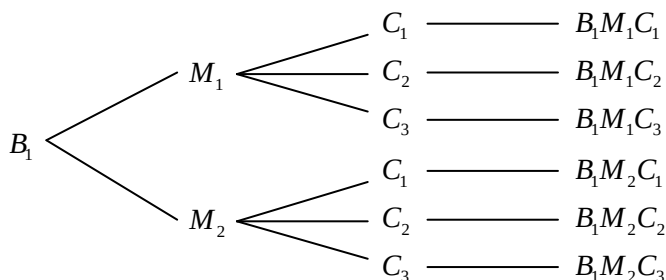
$$\text{จาก } P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D)$$

$$\text{และจากข้อ 3) จะได้ว่า } P(A \cup D) = \frac{1}{2} + \frac{33}{100} - \frac{4}{25} = \frac{67}{100}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จำนวนนี้เป็นจำนวนคู่หรือหารด้วย 3 ลงตัว เท่ากับ $\frac{67}{100}$

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ให้ B_1, B_2 แทนตัวถังรถชนิดที่ 1, 2 ตามลำดับ
 M_1, M_2 แทนเครื่องยนต์ชนิดที่ 1, 2 ตามลำดับ
 และ C_1, C_2, C_3 แทนสีพ่นรถสีที่ 1, 2, 3 ตามลำดับ
- 1) สามารถเขียนแผนภาพแสดงผลลัพธ์ของการผลิตรถยนต์แบบต่างๆ ได้ดังนี้
 ชนิดของตัวถัง ชนิดของเครื่องยนต์ สีพ่นรถ



- 2) ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้
 จากแผนภาพข้อ 1)
 จะได้ $S = \{B_1M_1C_1, B_1M_1C_2, B_1M_1C_3, B_1M_2C_1, B_1M_2C_2, B_1M_2C_3, B_2M_1C_1, B_2M_1C_2, B_2M_1C_3, B_2M_2C_1, B_2M_2C_2, B_2M_2C_3\}$

2. ให้ H แทนเหรียญขึ้นหัว
และ T แทนเหรียญขึ้นก้อย
 - 1) ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้
เนื่องจาก ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการโยนเหรียญหนึ่งเหรียญสามครั้ง คือ
 $HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH$ และ TTT
ดังนั้น $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$
 - 2) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัวเพียงหนึ่งครั้ง
ดังนั้น $E_1 = \{HTT, THT, TTH\}$
 - 3) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัวสามครั้ง
ดังนั้น $E_2 = \{HHH\}$
 - 4) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัวอย่างน้อยหนึ่งครั้ง
ดังนั้น $E_3 = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH\}$
 - 5) ให้ E_4 แทนเหตุการณ์ที่เหรียญไม่ขึ้นหัวเลย
ดังนั้น $E_4 = \{TTT\}$
3. ให้ R แทนลูกบอลสีแดง
 W แทนลูกบอลสีขาว
และ G แทนลูกบอลสีเขียว
 - 1) ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้
เนื่องจากผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการหยิบลูกบอลทีละลูกแล้วใส่คืนก่อนหยิบ
ลูกบอลลูกที่สอง จากกล่องที่บรรจุลูกบอลสีแดง 1 ลูก สีขาว 1 ลูก และสีเขียว 1 ลูก
คือ $RR, RW, RG, WR, WW, WG, GR, GW$ และ GG
ดังนั้น $S = \{RR, RW, RG, WR, WW, WG, GR, GW, GG\}$
 - 2) ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ได้ลูกบอลสีขาวและสีแดงอย่างละ 1 ลูก
ดังนั้น $E = \{RW, WR\}$
4. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้
จากตารางมีใบสั่งซื้อสินค้าทั้งหมด $212 + 389 + 124 + 105 + 170 = 1,000$ ใบ
จะได้ $n(S) = 1,000$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่ใบสั่งซื้อสินค้าที่สุ่มมาเป็นใบสั่งซื้อสินค้าจากภาคเหนือ
 จากตาราง มีใบสั่งซื้อสินค้าจากภาคเหนือ 212 ใบ นั่นคือ $n(E_1) = 212$
 จะได้ $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{212}{1,000} = \frac{53}{250}$
 ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ใบสั่งซื้อสินค้าที่สุ่มมาจะเป็นใบสั่งซื้อสินค้าจากภาคเหนือ
 เท่ากับ $\frac{53}{250}$
- 2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่ใบสั่งซื้อสินค้าที่สุ่มมาเป็นใบสั่งซื้อสินค้าจากภาคกลาง
 จากตาราง มีใบสั่งซื้อสินค้าจากภาคกลาง 389 ใบ นั่นคือ $n(E_2) = 389$
 จะได้ $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{389}{1,000}$
 ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ใบสั่งซื้อสินค้าที่สุ่มมาจะเป็นใบสั่งซื้อสินค้าจากภาคกลาง
 เท่ากับ $\frac{389}{1,000}$
- 3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่ใบสั่งซื้อสินค้าที่สุ่มมาเป็นใบสั่งซื้อสินค้าจากภาคตะวันออก
 จากตาราง มีใบสั่งซื้อสินค้าจากภาคตะวันออก 124 ใบ นั่นคือ $n(E_3) = 124$
 จะได้ $P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{124}{1,000} = \frac{31}{250}$
 ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ใบสั่งซื้อสินค้าที่สุ่มมาจะเป็นใบสั่งซื้อสินค้าจากภาคตะวันออก
 เท่ากับ $\frac{31}{250}$
- 4) ให้ E_4 แทนเหตุการณ์ที่ใบสั่งซื้อสินค้าที่สุ่มมาเป็นใบสั่งซื้อสินค้าจากภาคตะวันออกเฉียงเหนือ
 จากตาราง มีใบสั่งซื้อสินค้าจากภาคตะวันออกเฉียงเหนือ 105 ใบ
 นั่นคือ $n(E_4) = 105$
 จะได้ $P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S)} = \frac{105}{1,000} = \frac{21}{200}$
 ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ใบสั่งซื้อสินค้าที่สุ่มมาจะเป็นใบสั่งซื้อสินค้าจากภาคตะวันออกเฉียงเหนือ
 เท่ากับ $\frac{21}{200}$

- 5) ให้ E_5 แทนเหตุการณ์ที่ใบสั่งซื้อสินค้าที่ส่งมาเป็นใบสั่งซื้อสินค้าจากภาคใต้
จากตาราง มีใบสั่งซื้อสินค้าจากภาคใต้ 170 ใบ นั่นคือ $n(E_5)=170$

$$\text{จะได้ } P(E_5) = \frac{n(E_5)}{n(S)} = \frac{170}{1,000} = \frac{17}{100}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ใบสั่งซื้อสินค้าที่ส่งมาจะเป็นใบสั่งซื้อสินค้าจากภาคใต้ เท่ากับ $\frac{17}{100}$

5. ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้
จะได้ $n(S)=100$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนคนนี้จะสวมรองเท้าเบอร์ 7

จากตาราง มีนักเรียนที่สวมรองเท้าเบอร์ 7 อยู่ 35 คน นั่นคือ $n(E_1)=35$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะสวมรองเท้าเบอร์ 7 เท่ากับ $\frac{7}{20}$

- 2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนคนนี้จะสวมรองเท้าเล็กกว่าเบอร์ 8

จากตาราง มีนักเรียนที่สวมรองเท้าเล็กกว่าเบอร์ 8 อยู่ $3+12+35=50$ คน
นั่นคือ $n(E_2)=50$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะสวมรองเท้าเล็กกว่าเบอร์ 8 เท่ากับ $\frac{1}{2}$

- 3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนคนนี้จะสวมรองเท้าเบอร์ 8 หรือ 9

จากตาราง มีนักเรียนที่สวมรองเท้าเบอร์ 8 หรือ 9 อยู่ $27+16=43$ คน
นั่นคือ $n(E_3)=43$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{43}{100}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะสวมรองเท้าเบอร์ 8 หรือ 9 เท่ากับ $\frac{43}{100}$

- 4) ให้ E_4 แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนคนนี้จะสวมรองเท้าเบอร์ 5 หรือ 10

จากตาราง มีนักเรียนที่สวมรองเท้าเบอร์ 5 หรือ 10 อยู่ $3+7=10$ คน
นั่นคือ $n(E_4)=10$

$$\text{จะได้ } P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S)} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะสวมรองเท้าเบอร์ 5 หรือ 10 เท่ากับ $\frac{1}{10}$

- 5) ให้ E_5 แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนคนนี้จะสวมรองเท้าใหญ่กว่าเบอร์ 10

จากตาราง ไม่มีนักเรียนที่สวมรองเท้าใหญ่กว่าเบอร์ 10

นั่นคือ $n(E_5) = 0$

$$\text{จะได้ } P(E_5) = \frac{n(E_5)}{n(S)} = \frac{0}{100} = 0$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะสวมรองเท้าใหญ่กว่าเบอร์ 10 เท่ากับ 0

6. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จากตาราง มีจำนวนพนักงานขายทั้งหมด $30 + 50 + 80 + 70 + 20 = 250$ คน

จะได้ $n(S) = 250$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่พนักงานขายคนนี้จะขายสินค้าได้ตั้งแต่ 10,000 ถึง 19,999 บาท

จากตาราง จำนวนพนักงานขายที่ขายสินค้าได้ตั้งแต่ 10,000 ถึง 19,999 บาท

เท่ากับ 50 คน

นั่นคือ $n(E_1) = 50$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{50}{250} = \frac{1}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่พนักงานขายคนนี้จะขายสินค้าได้ตั้งแต่ 10,000 ถึง 19,999 บาท

เท่ากับ $\frac{1}{5}$

- 2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่พนักงานขายคนนี้จะขายสินค้าได้น้อยกว่า 20,000 บาท

จากตาราง จำนวนพนักงานขายที่ขายสินค้าได้น้อยกว่า 20,000 บาท เท่ากับ $30 + 50 = 80$ คน

นั่นคือ $n(E_2) = 80$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{80}{250} = \frac{8}{25}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่พนักงานขายคนนี้จะขายสินค้าได้น้อยกว่า 20,000 บาท

เท่ากับ $\frac{8}{25}$

- 3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่พนักงานขายคนนี้จะขายสินค้าได้น้อยกว่า 10,000 บาท หรืออย่างน้อย 40,000 บาท

จากตาราง จำนวนพนักงานขายที่ขายสินค้าได้น้อยกว่า 10,000 บาท เท่ากับ 30 คน และจำนวนพนักงานขายที่ขายสินค้าได้อย่างน้อย 40,000 บาท เท่ากับ 20 คน จะได้ว่า จำนวนพนักงานขายที่ขายสินค้าได้น้อยกว่า 10,000 บาท หรืออย่างน้อย 40,000 บาท เท่ากับ $30 + 20 = 50$ คน

นั่นคือ $n(E_3) = 50$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{50}{250} = \frac{1}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่พนักงานขายคนนี้จะขายสินค้าได้น้อยกว่า 10,000 บาท หรืออย่างน้อย 40,000 บาท เท่ากับ $\frac{1}{5}$

7. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S) = 10$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่ลูกศรจะชี้ที่ช่องที่มีหมายเลข 1 กำกับไว้

จากรูป มีช่องที่มีหมายเลข 1 กำกับไว้ อยู่ 1 ช่อง นั่นคือ $n(E_1) = 1$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{1}{10}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ลูกศรจะชี้ที่ช่องที่มีหมายเลข 1 กำกับไว้ เท่ากับ $\frac{1}{10}$

- 2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่ลูกศรจะชี้ที่ช่องที่มีหมายเลข 6 กำกับไว้

จากรูป มีช่องที่มีหมายเลข 6 กำกับไว้ อยู่ 2 ช่อง นั่นคือ $n(E_2) = 2$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ลูกศรจะชี้ที่ช่องที่มีหมายเลข 6 กำกับไว้ เท่ากับ $\frac{1}{5}$

- 3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่ลูกศรจะชี้ที่ช่องที่มีหมายเลขที่กำกับเป็นจำนวนคู่ จากรูป มีช่องที่มีหมายเลขที่กำกับเป็นจำนวนคู่ คือ 2, 4 และ 6 อยู่ 6 ช่อง นั่นคือ $n(E_3) = 6$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ลูกศรจะชี้ที่ช่องที่มีหมายเลขที่กำกับเป็นจำนวนคู่ เท่ากับ $\frac{3}{5}$

- 4) ให้ E_4 แทนเหตุการณ์ที่ลูกศรจะชี้ที่ช่องที่มีหมายเลขที่กำกับเป็นจำนวนคี่ จากรูป มีช่องที่มีหมายเลขที่กำกับเป็นจำนวนคี่ คือ 1, 3, 5 และ 7 อยู่ 4 ช่อง นั่นคือ $n(E_4) = 4$

$$\text{จะได้ } P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ลูกศรจะชี้ที่ช่องที่มีหมายเลขที่กำกับเป็นจำนวนคี่ เท่ากับ $\frac{2}{5}$

- 5) ให้ E_5 แทนเหตุการณ์ที่ลูกศรจะชี้ที่ช่องที่มีหมายเลขที่กำกับเป็นจำนวนเฉพาะ จากรูป มีช่องที่มีหมายเลขที่กำกับเป็นจำนวนเฉพาะ คือ 2, 3, 5 และ 7 อยู่ 5 ช่อง นั่นคือ $n(E_5) = 5$

$$\text{จะได้ } P(E_5) = \frac{n(E_5)}{n(S)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ลูกศรจะชี้ที่ช่องที่มีหมายเลขที่กำกับเป็นจำนวนเฉพาะ เท่ากับ $\frac{1}{2}$

- 6) ให้ E_6 แทนเหตุการณ์ที่ลูกศรจะชี้ที่ช่องที่มีหมายเลขที่กำกับเป็นจำนวนที่น้อยกว่า 8 จากรูป มีช่องที่มีหมายเลขกำกับเป็นจำนวนที่น้อยกว่า 8 คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6 และ 7 อยู่ 10 ช่อง นั่นคือ $n(E_6) = 10$

$$\text{จะได้ } P(E_6) = \frac{n(E_6)}{n(S)} = \frac{10}{10} = 1$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ลูกศรจะชี้ที่ช่องที่มีหมายเลขกำกับเป็นจำนวนที่น้อยกว่า 8 เท่ากับ 1

8. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = 2^5 = 32$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัวในการโยนครั้งแรก

เนื่องจาก จำนวนวิธีที่เหรียญขึ้นหัวในการโยนครั้งแรก จากการโยนเหรียญห้าครั้ง มีได้
 $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ วิธี

นั่นคือ $n(E) = 16$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เหรียญขึ้นหัวในการโยนครั้งแรก เท่ากับ $\frac{1}{2}$

9. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

เนื่องจากลูกแต่ละคนเป็นผู้ชายหรือผู้หญิง

$$\text{จะได้ } n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่ลูกทั้งสามคนเป็นผู้หญิง

ขั้นตอนที่ 1 เหตุการณ์ที่ลูกคนที่ 1 เป็นผู้หญิง มีได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เหตุการณ์ที่ลูกคนที่ 2 เป็นผู้หญิง มีได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เหตุการณ์ที่ลูกคนที่ 3 เป็นผู้หญิง มีได้ 1 วิธี

โดยหลักการคูณ เหตุการณ์ที่ลูกทั้งสามคนเป็นผู้หญิง มีได้ $1 \times 1 \times 1 = 1$ วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E_1) = 1$$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{1}{8}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ลูกทั้งสามเป็นผู้หญิง เท่ากับ $\frac{1}{8}$

- 2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่มีลูกเป็นผู้ชายอย่างน้อย 2 คน

เนื่องจากครอบครัวนี้มีลูก 3 คน จึงแบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ครอบครัวนี้มีลูกเป็นผู้ชาย 2 คน มีได้ 3 วิธี

กรณีที่ 2 ครอบครัวนี้มีลูกเป็นผู้ชาย 3 คน มีได้ 1 วิธี

ดังนั้น เหตุการณ์ที่มีลูกเป็นผู้ชายอย่างน้อย 2 คน มีได้ 4 วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E_2) = 4$$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่มีลูกชายอย่างน้อย 2 คน เท่ากับ $\frac{1}{2}$

3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่ลูกคนแรกและคนสุดท้ายเป็นผู้ชาย

ขั้นตอนที่ 1 เหตุการณ์ที่ลูกคนแรกเป็นผู้ชาย มีได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เหตุการณ์ที่ลูกคนสุดท้ายเป็นผู้ชาย มีได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เหตุการณ์ที่ลูกคนที่ 2 เป็นผู้ชายหรือผู้หญิง มีได้ 2 วิธี

โดยหลักการคูณ เหตุการณ์ที่ลูกคนแรกและคนสุดท้ายเป็นผู้ชาย มีได้ $1 \times 1 \times 2 = 2$ วิธี

นั่นคือ $n(E_3) = 2$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ลูกคนแรกและคนสุดท้ายเป็นผู้ชาย เท่ากับ $\frac{1}{4}$

10. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = 6 \times 6 = 36$$

1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองมากกว่า 3

เนื่องจากผลลัพธ์ที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองไม่มากกว่า 3 ได้แก่ (1,1),

(1,2) และ (2,1)

นั่นคือ จำนวนวิธีที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองไม่มากกว่า 3 มี 3 วิธี

จะได้ จำนวนวิธีที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋ามากกว่า 3 มี $36 - 3 = 33$ วิธี

นั่นคือ $n(E_1) = 33$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองมากกว่า 3 เท่ากับ $\frac{11}{12}$

2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่แต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองไม่เท่ากัน

เนื่องจากผลลัพธ์ที่แต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเท่ากัน ได้แก่ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4),

(5,5) และ (6,6)

นั่นคือ จำนวนวิธีที่แต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเท่ากัน มี 6 วิธี

จะได้ จำนวนวิธีที่แต้มบนหน้าลูกเต๋ามากกว่า 6 มี $36 - 6 = 30$ วิธี

นั่นคือ $n(E_2) = 30$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่แต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองไม่เท่ากัน เท่ากับ $\frac{5}{6}$

11. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = 6 \times 6 = 36$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ผู้เข้าร่วมประชุมคนหนึ่งเข้าและออกโดยไม่ใช้ประตูบานเดิม

ขั้นตอนที่ 1 เลือกประตูเข้าได้ 6 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกประตูออกที่ไม่ซ้ำกับประตูเข้าได้ 5 วิธี

โดยหลักการคูณ จำนวนวิธีที่ผู้เข้าประชุมเข้าและออกโดยไม่ใช้ประตูบานเดิม ได้ $6 \times 5 = 30$ วิธี
นั่นคือ $n(E) = 30$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผู้เข้าประชุมคนหนึ่งจะเข้าและออกโดยไม่ใช้ประตูบานเดิม เท่ากับ $\frac{5}{6}$

12. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = 5$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนคนนี้จะตอบผิด

เนื่องจาก จำนวนวิธีที่นักเรียนคนนี้จะตอบถูก มีได้ 1 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่นักเรียนคนนี้จะตอบผิด มีได้ $5 - 1 = 4$ วิธี

นั่นคือ $n(E) = 4$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะตอบผิด เท่ากับ $\frac{4}{5}$

13. ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนจะชื่อน้ำส้ม ซึ่ง $P(E_1) = \frac{1}{6} = \frac{5}{30}$

$$E_2 \text{ แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนจะชื่อน้ำเก๊กฮวย ซึ่ง } P(E_2) = \frac{3}{10} = \frac{9}{30}$$

$$E_3 \text{ แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนจะชื่อนม ซึ่ง } P(E_3) = \frac{2}{5} = \frac{12}{30}$$

$$\text{และ } E_4 \text{ แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนจะชื่อน้ำอัดลม ซึ่ง } P(E_4) = \frac{2}{15} = \frac{4}{30}$$

จะได้ $P(E_3) > P(E_2) > P(E_1) > P(E_4)$

ดังนั้น ถ้าร้านค้าต้องการนำเครื่องดื่มมาขายเพียง 3 ชนิด ร้านค้าควรนำนม น้ำแกงฮวย และ น้ำส้มมาขาย

14. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S) = 5! = 120$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่เตยวิ่งเข้าเส้นชัยเป็นอันดับที่ 1 หรือ 2

เนื่องจาก การเข้าเส้นชัยของเตยมีได้ 2 วิธี

และผู้เข้าแข่งขันอีก 4 คนที่เหลือเข้าเส้นชัยอันดับใดก็ได้ มีได้ 4! วิธี

โดยหลักการคูณ การเข้าเส้นชัยของผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด โดยที่เตยวิ่งเข้าเส้นชัยเป็นอันดับที่ 1 หรือ 2 เท่ากับ $2 \times 4! = 48$ วิธี

นั่นคือ $n(E) = 48$

จะได้ $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เตยจะวิ่งเข้าเส้นชัยเป็นอันดับ 1 หรือ 2 เท่ากับ $\frac{2}{5}$

15. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S) = C_{10,1} \times C_{9,1} = 10 \times 9 = 90$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงทั้งสองลูก

ขั้นตอนที่ 1 มีวิธีที่จะหยิบลูกบอลลูกแรกได้ลูกบอลสีแดง 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มีวิธีที่จะหยิบลูกบอลลูกที่สองได้ลูกบอลสีแดง 2 วิธี

โดยหลักการคูณ มีวิธีหยิบได้ลูกบอลสีแดงทั้งสองลูก $3 \times 2 = 6$ วิธี

นั่นคือ $n(E_1) = 6$

จะได้ $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงทั้งสองลูก เท่ากับ $\frac{1}{15}$

2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีขาวและสีดำ

กรณีที่ 1 มีวิธีที่จะหยิบลูกบอลลูกแรกได้เป็นสีขาว 2 วิธี

มีวิธีที่จะหยิบลูกบอลลูกที่สองได้เป็นสีดำ 5 วิธี

โดยหลักการคูณ มีวิธีที่หยิบลูกบอลลูกแรกได้เป็นสีขาว และหยิบลูกบอลลูกที่สองได้เป็นสีดำ $2 \times 5 = 10$ วิธี

กรณีที่ 2 มีวิธีที่จะหยิบลูกบอลลูกแรกได้เป็นสีดำ 5 วิธี

มีวิธีที่จะหยิบลูกบอลลูกที่สองได้เป็นสีขาว 2 วิธี

โดยหลักการคูณ มีวิธีที่หยิบลูกบอลลูกแรกได้เป็นสีดำ และหยิบลูกบอลลูกที่สองได้เป็นสีขาว $5 \times 2 = 10$ วิธี

โดยหลักการบวก มีวิธีที่หยิบได้ลูกบอลสีขาวและสีดำ $10 + 10 = 20$ วิธี

นั่นคือ $n(E_2) = 20$ วิธี

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีขาวและสีดำ เท่ากับ $\frac{2}{9}$

16. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = C_{8,1} \times C_{7,1} \times C_{6,1} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 1 หยิบได้ลูกบอลสีแดง และครั้งที่ 2 และ 3 หยิบได้ลูกบอลสีเหลือง

ขั้นตอนที่ 1 มีวิธีที่จะหยิบลูกบอลลูกแรกได้เป็นสีแดง 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มีวิธีที่จะหยิบลูกบอลลูกที่สองได้เป็นสีเหลือง 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 มีวิธีที่จะหยิบลูกบอลลูกที่สามได้เป็นสีเหลือง 2 วิธี

โดยหลักการคูณ มีวิธีที่จะหยิบได้ลูกบอลสีแดง 1 ลูก และสีเหลือง 2 ลูกตามลำดับ

$$2 \times 3 \times 2 = 12 \text{ วิธี}$$

นั่นคือ $n(E) = 12$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{12}{336} = \frac{1}{28}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ครั้งที่ 1 หยิบได้ลูกบอลสีแดง และครั้งที่ 2 และ 3 หยิบได้ลูกบอลสีเหลือง เท่ากับ $\frac{1}{28}$

17. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S) = C_{12,3} = 220$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่จะได้ลูกแก้วครบทุกสี

นั่นคือ ได้ลูกแก้วสีเขียว 1 ลูก สีชมพู 1 ลูก และสีฟ้า 1 ลูก

ขั้นตอนที่ 1 มีวิธีที่จะหยิบลูกแก้วได้เป็นสีเขียว 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มีวิธีที่จะหยิบลูกแก้วได้เป็นสีชมพู 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 มีวิธีที่จะหยิบลูกแก้วได้เป็นสีฟ้า 5 วิธี

โดยหลักการคูณ จะมีวิธีที่จะหยิบลูกแก้ว 3 ลูก พร้อมกัน ได้ลูกแก้วครบทุกสี $4 \times 3 \times 5$ วิธี

นั่นคือ $n(E) = 4 \times 3 \times 5$

จะได้
$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4 \times 3 \times 5}{220} = \frac{3}{11}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วครบทุกสี เท่ากับ $\frac{3}{11}$

18. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S) = C_{30,2} = 435$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนทั้งสองเป็นผู้ชายทั้งคู่หรือผู้หญิงทั้งคู่

กรณีที่ 1 มีวิธีที่จะเลือกได้นักเรียนทั้งสองคนเป็นผู้หญิง $C_{18,2} = 153$ วิธี

กรณีที่ 2 มีวิธีที่จะเลือกได้นักเรียนทั้งสองคนเป็นผู้ชาย $C_{12,2} = 66$ วิธี

โดยหลักการบวก มีวิธีที่จะเลือกนักเรียนเป็นผู้ชายทั้งคู่หรือผู้หญิงทั้งคู่ $153 + 66 = 219$ วิธี

นั่นคือ $n(E) = 219$

จะได้
$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{219}{435} = \frac{73}{145}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักเรียนทั้งสองเป็นผู้ชายทั้งคู่หรือผู้หญิงทั้งคู่ เท่ากับ $\frac{73}{145}$

19. 1) ให้ S_1 แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S_1) = C_{40,1} = 40$

ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่วชิระหยิบได้ช็อกโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีแดง

มีวิธีที่จะหยิบช็อกโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีแดง 1 ชิ้น จากช็อกโกแลตที่ห่อด้วย

กระดาษห่อสีแดง 30 ชิ้น ได้ 30 วิธี นั่นคือ $n(E_1) = 30$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S_1)} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่วัชระหยิบได้ซ็อกโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีแดง เท่ากับ $\frac{3}{4}$

- 2) ให้ S_2 แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S_2) = C_{40,2} = 780$$

ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่วัชระหยิบได้ซ็อกโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีเดียวกัน

กรณีที่ 1 ได้ซ็อกโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีแดงทั้งสองชิ้น

มีวิธีหยิบซ็อกโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีแดง 2 ชิ้น จากซ็อกโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีแดง 30 ชิ้น ได้ $C_{30,2} = 435$ วิธี

กรณีที่ 2 ได้ซ็อกโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีเขียวทั้งสองชิ้น

มีวิธีหยิบซ็อกโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีเขียว 2 ชิ้น จากซ็อกโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีเขียว 10 ชิ้น ได้ $C_{10,2} = 45$ วิธี

โดยหลักการบวก จะมีวิธีหยิบได้ซ็อกโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีเดียวกัน $435 + 45 = 480$ วิธี

นั่นคือ $n(E_2) = 480$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{480}{780} = \frac{8}{13}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่วัชระหยิบได้ซ็อกโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีเดียวกัน เท่ากับ $\frac{8}{13}$

- 3) ให้ S_3 แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S_3) = C_{40,10}$$

ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่วัชระหยิบได้ซ็อกโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีแดงอย่างน้อยหนึ่งชิ้น

เนื่องจาก วิธีที่หยิบไม่ได้ซ็อกโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีแดงเลย คือ วิธีที่หยิบได้

ซ็อกโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีเขียวทั้งหมด 10 ชิ้น ซึ่งทำได้ $C_{10,10} = 1$ วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีหยิบได้ซ็อกโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีแดงอย่างน้อยหนึ่งชิ้น $C_{40,10} - 1$ วิธี

นั่นคือ $n(E_3) = C_{40,10} - 1$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{C_{40,10} - 1}{C_{40,10}} = 1 - \frac{1}{C_{40,10}}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่วีระหิยาได้ซื้อโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีแดงอย่างน้อยหนึ่งชิ้น เท่ากับ $1 - \frac{1}{C_{40,10}}$

20. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = C_{30,1} \times C_{29,1} = 30 \times 29 = 870$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่พนักงานที่ได้รับรางวัลเป็นผู้ชายทั้งคู่

ขั้นตอนที่ 1 เลือกผู้ชาย 1 คน จาก 10 คน ได้รับรางวัล ได้ 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกผู้ชาย 1 คน จากที่เหลือ 9 คน ได้รับรางวัล ได้ 9 วิธี

โดยหลักการคูณ จะมีวิธีที่พนักงานที่ได้รับรางวัลทั้งสองคนเป็นผู้ชายทั้งคู่ $10 \times 9 = 90$ วิธี

นั่นคือ $n(E) = 90$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{90}{870} = \frac{3}{29}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่พนักงานที่ได้รับรางวัลเป็นผู้ชายทั้งคู่ เท่ากับ $\frac{3}{29}$

21. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = C_{10,2} = 45$$

1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่พนักงานที่ได้รับเลือกเป็นกรรมการเป็นผู้ชายหนึ่งคนและผู้หญิงหนึ่งคน

ขั้นตอนที่ 1 มีวิธีที่จะเลือกพนักงานผู้ชายเป็นกรรมการ 1 คน ได้ 7 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มีวิธีที่จะเลือกพนักงานผู้หญิงเป็นกรรมการ 1 คน ได้ 3 วิธี

โดยหลักการคูณ มีวิธีที่จะเลือกกรรมการเป็นผู้ชายหนึ่งคนและผู้หญิงหนึ่งคนได้ $7 \times 3 = 21$ วิธี

นั่นคือ $n(E_1) = 21$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่พนักงานที่ได้รับเลือกเป็นกรรมการเป็นผู้ชายหนึ่งคนผู้หญิงหนึ่งคน

เท่ากับ $\frac{7}{15}$

2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่พนักงานที่ได้รับเลือกเป็นกรรมการเป็นผู้หญิงอย่างน้อยหนึ่งคน

กรณีที่ 1 มีวิธีที่จะเลือกพนักงานผู้หญิง 1 คน และผู้ชาย 1 คน เป็นกรรมการ ได้ $3 \times 7 = 21$ วิธี

กรณีที่ 2 มีวิธีที่จะเลือกพนักงานผู้หญิง 2 คน เป็นกรรมการ ได้ $C_{3,2} = 3$ วิธี

โดยหลักการบวก มีวิธีเลือกกรรมการเป็นผู้หญิงอย่างน้อยหนึ่งคน ได้ $21 + 3 = 24$ วิธี

นั่นคือ $n(E_2) = 24$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่พนักงานที่ได้รับเลือกเป็นกรรมการเป็นผู้หญิงอย่างน้อยหนึ่งคน เท่ากับ $\frac{8}{15}$

- 3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่พนักงานที่ได้รับเลือกเป็นกรรมการเป็นผู้ชายอย่างน้อยหนึ่งคน
กรณีที่ 1 มีวิธีที่จะเลือกพนักงานผู้ชาย 1 คน และผู้หญิง 1 คน เป็นกรรมการ ได้ $7 \times 3 = 21$ วิธี

กรณีที่ 2 มีวิธีที่จะเลือกพนักงานผู้ชาย 2 คน เป็นกรรมการ ได้ $C_{7,2} = 21$ วิธี

โดยหลักการบวก มีวิธีเลือกกรรมการเป็นผู้ชายอย่างน้อยหนึ่งคน ได้ $21 + 21 = 42$ วิธี
นั่นคือ $n(E_3) = 42$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{42}{45} = \frac{14}{15}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่พนักงานที่ได้รับเลือกเป็นกรรมการเป็นผู้ชายอย่างน้อยหนึ่งคน เท่ากับ $\frac{14}{15}$

22. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = C_{5,3} = 10$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของหมายเลขบนบัตรทั้งสามมากกว่า 10

เนื่องจากเหตุการณ์ที่ผลรวมของหมายเลขบนบัตรเป็น 11 มี 1 วิธี คือ หยิบได้บัตรซึ่งมีหมายเลข 2, 4 และ 5

และเหตุการณ์ที่ผลรวมของหมายเลขบนบัตรเป็น 12 มี 1 วิธี คือ หยิบได้บัตรซึ่งมีหมายเลข 3, 4 และ 5

โดยหลักการบวก มีวิธีหยิบได้บัตรได้ผลรวมของหมายเลขบนบัตรทั้งสามมากกว่า 10 อยู่ $1 + 1 = 2$ วิธี

นั่นคือ $n(E) = 2$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผลรวมของหมายเลขบนบัตรทั้งสามมากกว่า 10 เท่ากับ $\frac{1}{5}$

23. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S) = C_{40,1} = 40$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ได้ นักกรีฑาที่มีฝาแฝด

เนื่องจากมีฝาแฝด 3 คู่ ซึ่งหมายถึง มีนักกรีฑา 6 คน ที่มีฝาแฝด

นั่นคือ $n(E) = 6$

จะได้ $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักกรีฑาคนนี้จะ มีฝาแฝด เท่ากับ $\frac{3}{20}$

24. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S) = C_{12,4} = 495$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่จะได้เงาะ 2 ผล และส้มกับชมพูอย่างละ 1 ผล

ขั้นตอนที่ 1 มีวิธีที่จะหยิบได้เงาะ 2 ผล จากเงาะ 4 ผล ได้ $C_{4,2} = 6$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มีวิธีที่จะหยิบได้ส้ม 1 ผล จากส้ม 3 ผล ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 มีวิธีที่จะหยิบได้ชมพู 1 ผล จากชมพู 5 ผล ได้ 5 วิธี

โดยหลักการคูณ มีวิธีหยิบผลไม้จากตะกร้า 4 ผล พร้อมกัน โดยได้เงาะ 2 ผล และส้มกับชมพูอย่างละ 1 ผล ได้ $6 \times 3 \times 5 = 90$ วิธี

นั่นคือ $n(E) = 90$

จะได้ $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{90}{495} = \frac{2}{11}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ได้เงาะ 2 ผล และส้มกับชมพูอย่างละ 1 ผล เท่ากับ $\frac{2}{11}$

25. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S) = 5 \times 5 \times 5 = 125$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนคนนี้จะใส่จดหมายในตู้ที่ไม่ซ้ำกันเลย

นั่นคือ $n(E) = 5 \times 4 \times 3 = 60$

จะได้ $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{60}{125} = \frac{12}{25}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะใส่จดหมายในตู้ที่ไม่ซ้ำกันเลย เท่ากับ $\frac{12}{25}$

26. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = C_{5,1} \times C_{5,1} = 5 \times 5 = 25$$

1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่บัตรทั้งสองใบมีหมายเลขเดียวกัน

ขั้นตอนที่ 1 มีวิธีหยิบบัตร 1 ใบ จากบัตร 5 ใบ ได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มีวิธีหยิบบัตร 1 ใบ ให้มีหมายเลขเดียวกับใบแรก ได้ 1 วิธี

โดยหลักการคูณ จะมีวิธีหยิบบัตรทั้งสองใบมีหมายเลขเดียวกัน $5 \times 1 = 5$ วิธี

นั่นคือ $n(E_1) = 5$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่บัตรทั้งสองใบมีหมายเลขเดียวกัน เท่ากับ $\frac{1}{5}$

2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่ได้บัตรทั้งสองใบมีหมายเลขไม่ซ้ำกัน

ขั้นตอนที่ 1 มีวิธีหยิบบัตร 1 ใบ จากบัตร 5 ใบ ได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มีวิธีหยิบบัตร 1 ใบ ให้มีหมายเลขไม่ซ้ำกับใบแรก ได้ 4 วิธี

โดยหลักการคูณ จะมีวิธีหยิบบัตรทั้งสองใบมีหมายเลขไม่ซ้ำกัน $5 \times 4 = 20$ วิธี

นั่นคือ $n(E_2) = 20$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่บัตรทั้งสองใบมีหมายเลขไม่ซ้ำกัน เท่ากับ $\frac{4}{5}$

3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่บัตรทั้งสองใบมีหมายเลขเป็นจำนวนคู่

เนื่องจากบัตรที่มีหมายเลขเป็นจำนวนคู่มี 3 ใบ คือ 2, 6 และ 8

ขั้นตอนที่ 1 มีวิธีหยิบบัตรที่มีหมายเลขเป็นจำนวนคู่ 1 ใบ จาก 3 ใบ ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มีวิธีหยิบบัตรที่มีหมายเลขเป็นจำนวนคู่ 1 ใบ จาก 3 ใบ ได้ 3 วิธี

โดยหลักการคูณ จะมีวิธีหยิบบัตรทั้งสองใบมีหมายเลขเป็นจำนวนคู่ได้ $3 \times 3 = 9$ วิธี

นั่นคือ $n(E_3) = 9$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{9}{25}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่บัตรทั้งสองใบมีหมายเลขเป็นจำนวนคู่ เท่ากับ $\frac{9}{25}$

- 4) ให้ E_4 แทนเหตุการณ์ที่ผลบวกของหมายเลขบนบัตรทั้งสองเป็นจำนวนคู่
ในการหยิบให้ได้บัตรที่มีผลบวกของหมายเลขบนหน้าบัตรทั้งสองเป็นจำนวนคู่เป็นได้
2 กรณี

กรณีที่ 1 หมายเลขบนหน้าบัตรทั้งสองเป็นจำนวนคู่

ขั้นตอนที่ 1 มีวิธีหยิบบัตรที่มีหมายเลขเป็นจำนวนคู่ 1 ใบ จาก 3 ใบ
ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มีวิธีหยิบบัตรที่มีหมายเลขเป็นจำนวนคู่ 1 ใบ จาก 3 ใบ
ได้ 3 วิธี

โดยหลักการคูณ จะมีวิธีหยิบบัตรทั้งสองใบเป็นจำนวนคู่ ได้ $3 \times 3 = 9$ วิธี

กรณีที่ 2 หมายเลขบนหน้าบัตรทั้งสองเป็นจำนวนคี่

ขั้นตอนที่ 1 มีวิธีหยิบบัตรที่มีหมายเลขเป็นจำนวนคี่ 1 ใบ จาก 2 ใบ
ได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มีวิธีหยิบบัตรที่มีหมายเลขเป็นจำนวนคี่ 1 ใบ จาก 2 ใบ
ได้ 2 วิธี

โดยหลักการคูณ จะมีวิธีหยิบบัตรทั้งสองใบเป็นจำนวนคี่ ได้ $2 \times 2 = 4$ วิธี

โดยหลักการบวก จะมีวิธีหยิบบัตรที่มีผลบวกของหมายเลขบนบัตรทั้งสองเป็นจำนวนคู่
 $9 + 4 = 13$ วิธี

นั่นคือ $n(E_4) = 13$

$$\text{จะได้ } P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S)} = \frac{13}{25}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของหมายเลขบนหน้าบัตรทั้งสองเป็นจำนวนคู่ เท่ากับ $\frac{13}{25}$

27. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = P_{20,4} = 20 \times 19 \times 18 \times 17$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่สมศรีได้เป็นนายกชมรมและสมปองได้เป็นอุปนายกชมรม

ขั้นตอนที่ 1 มีวิธีที่สมศรีได้เป็นนายกชมรม 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มีวิธีที่สมปองได้เป็นอุปนายกชมรม 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 มีวิธีเลือกเลขานุการจากสมาชิก 18 คนที่เหลือ 18 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 มีวิธีเลือกเหรัญญิกจากสมาชิก 17 คนที่เหลือ 17 วิธี

โดยหลักการคูณ มีวิธีเลือกคณะกรรมการที่สมศรีเป็นนายกชมรมและสมปองเป็นอุปนายกชมรม $1 \times 1 \times 18 \times 17$ วิธี

นั่นคือ $n(E) = 18 \times 17$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{18 \times 17}{20 \times 19 \times 18 \times 17} = \frac{1}{380}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่สมศรีได้เป็นนายกชมรมและสมปองได้เป็นอุปนายกชมรม เท่ากับ $\frac{1}{380}$

28. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = C_{52,2} = 1,326$$

1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่ที่มีหน้าสีแดงทั้งสองใบ

$$\text{นั่นคือ } n(E_1) = C_{26,2} = 325$$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{325}{1,326} = \frac{25}{102}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ไพ่ที่มีหน้าสีแดงทั้งสองใบ เท่ากับ $\frac{25}{102}$

2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่โพดำและโพแดง

$$\text{นั่นคือ } n(E_2) = C_{13,1} \times C_{13,1} = 13 \times 13 = 169$$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{169}{1,326} = \frac{13}{102}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ไพ่โพดำและโพแดง เท่ากับ $\frac{13}{102}$

3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่ J ทั้งสองใบ

$$\text{นั่นคือ } n(E_3) = C_{4,2} = 6$$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{6}{1,326} = \frac{1}{221}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ไพ่ J ทั้งสองใบ เท่ากับ $\frac{1}{221}$

29. ให้ S_1 แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มหยิบสลาก 2 ใบ โดยใส่สลากคืนก่อนจะหยิบสลากใบที่สอง

$$\text{จะได้ } n(S_1) = C_{10,1} \times C_{10,1} = 10 \times 10 = 100$$

ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่ผลบวกของหมายเลขบนสลากทั้งสองใบเท่ากับ 10 เมื่อใส่สลากคืนก่อนหยิบสลากใบที่สอง

$$\text{จะได้ } E_1 = \{(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1)\}$$

$$\text{จะได้ } n(E_1) = 9$$

$$\text{นั่นคือ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S_1)} = \frac{9}{100} = 0.09$$

ให้ S_2 แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มหยิบสลาก 2 ใบ โดยไม่ใส่สลากคืนก่อนจะหยิบสลากใบที่สอง

$$\text{จะได้ } n(S_2) = C_{10,1} \times C_{9,1} = 10 \times 9 = 90$$

ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่ผลบวกของหมายเลขบนสลากทั้งสองใบเท่ากับ 10 เมื่อไม่ใส่สลากคืนก่อนหยิบสลากใบที่สอง

$$\text{จะได้ } E_2 = \{(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1)\}$$

$$\text{จะได้ } n(E_2) = 8$$

$$\text{นั่นคือ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S_2)} = \frac{8}{90} \approx 0.089$$

เนื่องจาก $P(E_1) > P(E_2)$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของหมายเลขบนสลากทั้งสองเท่ากับ 10 เมื่อหยิบสลากแบบใส่คืน มากกว่า ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของหมายเลขบนสลากทั้งสองเท่ากับ 10 เมื่อหยิบสลากแบบไม่ใส่คืน

ดังนั้น แหวนควรจะใส่สลากคืนก่อนจะหยิบสลากใบที่สอง

30. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = C_{5,1} \times C_{4,1} = 5 \times 4 = 20$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ครูคนนี้จะสวมเสื้อและกางเกงสีต่างกัน

เนื่องจาก มีวิธีแต่งตัว โดยสวมเสื้อและกางเกงสีเดียวกัน (เสื้อสีดำและกางเกงสีดำ) $1 \times 2 = 2$ วิธี

ดังนั้น มีวิธีสวมเสื้อและกางเกงสีต่างกัน $20 - 2 = 18$ วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E) = 18$$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ครูคนนี้จะสวมเสื้อและกางเกงสีต่างกัน เท่ากับ $\frac{9}{10}$

31. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = C_{20,3} = 1,140$$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่จะได้พัดลมที่มีคุณภาพดีมากทั้งสามเครื่อง

$$\text{นั่นคือ } n(E_1) = C_{8,3} = 56$$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{56}{1,140} = \frac{14}{285}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้พัดลมที่มีคุณภาพดีมากทั้งสามเครื่อง เท่ากับ $\frac{14}{285}$

- 2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่จะได้พัดลมที่มีคุณภาพปานกลางทั้งสามเครื่อง

$$\text{นั่นคือ } n(E_2) = C_{3,3} = 1$$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{1}{1,140}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้พัดลมที่มีคุณภาพปานกลางทั้งสามเครื่อง เท่ากับ $\frac{1}{1,140}$

- 3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่จะได้พัดลมที่มีคุณภาพปานกลางอย่างน้อยหนึ่งเครื่อง

วิธีที่ 1 ในการซื้อพัดลม 3 เครื่อง จะได้พัดลมที่มีคุณภาพปานกลางอย่างน้อยหนึ่งเครื่อง แบ่งเป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 มีวิธีที่จะได้พัดลมที่มีคุณภาพปานกลางเพียงเครื่องเดียว

$$3 \times C_{17,2} = 408 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 2 มีวิธีที่จะได้พัดลมที่มีคุณภาพปานกลางสองเครื่อง $C_{3,2} \times 17 = 51$ วิธี

กรณีที่ 3 มีวิธีที่จะได้พัดลมที่มีคุณภาพปานกลางสามเครื่อง $C_{3,3} = 1$ วิธี

โดยหลักการบวก มีวิธีที่จะได้พัดลมที่มีคุณภาพปานกลางอย่างน้อยหนึ่งเครื่อง

$$408 + 51 + 1 = 460 \text{ วิธี}$$

$$\text{นั่นคือ } n(E_3) = 460$$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{460}{1,140} = \frac{23}{57}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้พัดลมที่มีคุณภาพปานกลางอย่างน้อยหนึ่งเครื่อง เท่ากับ $\frac{23}{57}$

วิธีที่ 2 ในการซื้อพัดลม 3 เครื่อง จะไม่ได้พัดลมที่มีคุณภาพปานกลางเลย ทำได้ $C_{17,3} = 680$ วิธี

จะได้ว่า มีวิธีที่จะได้พัดลมที่มีคุณภาพปานกลางอย่างน้อยหนึ่งเครื่อง

$$1,140 - 680 = 460 \text{ วิธี}$$

$$\text{นั่นคือ } n(E_3) = 460$$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{460}{1,140} = \frac{23}{57}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้พัดลมที่มีคุณภาพปานกลางอย่างน้อยหนึ่งเครื่อง เท่ากับ $\frac{23}{57}$

- 4) ให้ E_4 แทนเหตุการณ์ที่จะได้พัดลมที่มีคุณภาพดีมากสองเครื่องและปานกลางหนึ่งเครื่อง
นั่นคือ $n(E_4) = C_{8,2} \times C_{3,1} = 28 \times 3 = 84$

$$\text{จะได้ } P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S)} = \frac{84}{1,140} = \frac{7}{95}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้พัดลมที่มีคุณภาพดีมากสองเครื่องและปานกลางหนึ่งเครื่อง เท่ากับ $\frac{7}{95}$

- 5) ให้ E_5 แทนเหตุการณ์ที่จะได้พัดลมที่มีคุณภาพดีมาก ดี และปานกลางอย่างละเครื่อง
นั่นคือ $n(E_5) = C_{8,1} \times C_{9,1} \times C_{3,1} = 8 \times 9 \times 3 = 216$

$$\text{จะได้ } P(E_5) = \frac{n(E_5)}{n(S)} = \frac{216}{1,140} = \frac{18}{95}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้พัดลมที่มีคุณภาพดีมาก ดี และปานกลางอย่างละเครื่อง เท่ากับ $\frac{18}{95}$

32. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = C_{10,1} \times C_{9,1} = 10 \times 9 = 90$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่คุณอาจหารหัสบัตรเอทีเอ็มของทอรั้งถูกในการกดรหัสครั้งแรก
เนื่องจาก รหัสบัตรเอทีเอ็มที่ถูกต้องมีเพียง 1 รหัส

$$\text{จะได้ } n(E) = 1$$

$$\text{นั่นคือ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{90}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่คุณอาจหารหัสบัตรเอทีเอ็มของทอรั้งในการกดรหัสครั้งแรก
เท่ากับ $\frac{1}{90}$

33. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

เนื่องจาก มีบัตรเงินสดทั้งหมด $50 + 100 + 350 = 500$ ใบ

$$\text{จะได้ } n(S) = C_{500,2}$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่บัตรเงินสดสองใบที่ถูกค้าสุ่มหยิบได้มีมูลค่าน้อยกว่า 100 บาท
นั่นคือ หยิบไม่ได้บัตรเงินสดมูลค่า 100 บาทเลย ซึ่งทำได้ $C_{450,2}$ วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E) = C_{450,2}$$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{C_{450,2}}{C_{500,2}} = \frac{4,041}{4,990}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่บัตรเงินสดสองใบแรกที่ลูกค้าสุ่มหยิบได้มีมูลค่าน้อยกว่า 100 บาท
เท่ากับ $\frac{4,041}{4,990}$

34. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = C_{6,2} \times C_{4,2} \times C_{2,2} = 90$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ฝาแฝดอยู่กลุ่มเดียวกัน

เนื่องจากต้องการให้ฝาแฝดอยู่กลุ่มเดียวกัน นั่นคือ จะเหลือจัดนักเรียน 4 คน เป็น 2 กลุ่ม
ซึ่งทำได้ $3 \times C_{4,2} \times C_{2,2} = 18$ วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E) = 18$$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ฟ้าแฝดอยู่กลุ่มเดียวกัน เท่ากับ $\frac{1}{5}$

35. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = 8 \times 8 = 64$$

1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทิ้งสองลูกขึ้นแต้มเท่ากัน

$$\text{เนื่องจาก } E_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (8,8)\}$$

$$\text{นั่นคือ } n(E_1) = 8$$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าทิ้งสองลูกขึ้นแต้มเท่ากัน เท่ากับ $\frac{1}{8}$

2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทิ้งสองหารด้วย 5 ลงตัว

$$\text{เนื่องจาก } E_2 = \{(1,4), (2,3), (2,8), (3,2), (3,7), (4,1), (4,6), (5,5), \\ (6,4), (7,3), (7,8), (8,2), (8,7)\}$$

$$\text{นั่นคือ } n(E_2) = 13$$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{13}{64}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทิ้งสองหารด้วย 5 ลงตัว เท่ากับ $\frac{13}{64}$

3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่ผลต่างของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทิ้งสองเป็น 2

$$\text{เนื่องจาก } E_3 = \{(1,3), (2,4), (3,1), (3,5), (4,2), (4,6), (5,3), (5,7), \\ (6,4), (6,8), (7,5), (8,6)\}$$

$$\text{นั่นคือ } n(E_3) = 12$$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผลต่างของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทิ้งสองเป็น 2 เท่ากับ $\frac{3}{16}$

- 4) ให้ E_4 แทนเหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเป็นจำนวนคู่ แต่ผลต่างของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเป็น 4

เนื่องจาก $E_4 = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8), (5, 1), (6, 2), (7, 3), (8, 4)\}$

นั่นคือ $n(E_4) = 8$

$$\text{จะได้ } P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S)} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเป็นจำนวนคู่ แต่ผลต่างของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเป็น 4 เท่ากับ $\frac{1}{8}$

36. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = \frac{10!}{4!4!2!}$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่เพื่อนสนิททั้งสองคนนี้จะได้นั่งรถม้าคันที่สาม
เนื่องจากให้เพื่อนสนิททั้งสองคนนั่งรถม้าคันที่ 3

จะมีวิธีจัดนักท่องเที่ยวยี่สิบแปดคน นั่งรถม้าคันที่ 1 และ 2 ได้ $\frac{8!}{4!4!}$ วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E) = \frac{8!}{4!4!}$$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{8!}{4!4!} \times \frac{4!4!2!}{10!} = \frac{1}{45}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เพื่อนสนิททั้งสองคนนี้จะได้นั่งรถม้าคันที่สาม เท่ากับ $\frac{1}{45}$

37. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = \frac{10!}{3!2!4!1!}$$

- 1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่หลอดไฟสี่เตียวกันอนุ่ติดกัน

พิจารณาหลอดไฟสี่เตียวกันอนุ่ติดกันเป็นสิ่งของ 1 สิ่ง

ดังนั้น จะมีหลอดไฟอยู่ 4 หลอด จัดเรียงได้ $4! = 24$ วิธี

เนื่องจากหลอดไฟแต่ละหลอดเหมือนกัน ในแต่ละมัดจึงจัดเรียงได้ 1 วิธี

จะได้ว่า มีวิธีจัดเรียงหลอดไฟสี่เตียวกันอนุ่ติดกัน 24 วิธี

นั่นคือ $n(E_1) = 4!$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = 4! \times \frac{3!2!4!1!}{10!} = \frac{1}{525}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟสี่ดวงกันอยู่ติดกัน เท่ากับ $\frac{1}{525}$

- 2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่หลอดไฟสี่ดวงไม่อยู่ติดกัน
 เนื่องจากต้องการให้หลอดไฟสี่ดวงไม่อยู่ติดกัน จะแบ่งเป็น 2 ขั้นตอน

ขั้นตอนที่ 1 จัดเรียงหลอดไฟสี่ดวงอื่น ๆ ที่ไม่ใช่สี่ดวง ได้ $\frac{7!}{2!4!1!}$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 นำหลอดไฟสี่ดวงมาแทรกระหว่างหลอดไฟสี่ดวงอื่น ๆ ได้ 8 ตำแหน่ง
 นั่นคือ มีวิธีนำหลอดไฟสี่ดวงไปแทรกได้ $C_{8,3} = \frac{8!}{5!3!}$ วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีจัดหลอดไฟสี่ดวงไม่อยู่ติดกันได้ $\frac{7!}{2!4!1!} \times \frac{8!}{5!3!}$ วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E_2) = \frac{7!}{2!4!1!} \times \frac{8!}{5!3!}$$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{7!}{2!4!1!} \times \frac{8!}{5!3!} \times \frac{3!2!4!1!}{10!} = \frac{7}{15}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟสี่ดวงไม่อยู่ติดกัน เท่ากับ $\frac{7}{15}$

38. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!}$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่หลอดไฟหลอดสุดท้ายเป็นสีม่วงหรือสีส้ม

เนื่องจากจัดเรียงหลอดไฟหลอดสุดท้ายเป็นสีม่วงหรือสีส้ม จะแบ่งเป็น 2 ขั้นตอน

ขั้นที่ 1 จัดหลอดไฟหลอดสุดท้ายเป็นสีม่วงหรือสีส้ม ได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 2 จัดหลอดไฟที่เหลือ 9 หลอด ได้ $\frac{9!}{2!3!2!1!1!}$ วิธี

โดยหลักการคูณ จะมีวิธีจัดให้หลอดไฟหลอดสุดท้ายเป็นสีม่วงหรือสีส้ม ได้ $2 \times \frac{9!}{2!3!2!1!1!}$ วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E) = 2 \times \frac{9!}{2!3!2!1!1!}$$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = 2 \times \frac{9!}{2!3!2!1!1!} \times \frac{2!3!2!1!1!}{10!} = \frac{1}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟหลอดสุดท้ายเป็นสีม่วงหรือสีส้ม เท่ากับ $\frac{1}{5}$

39. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = (6-1)! = 120$$

1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่ไม่มีสมาชิกในครอบครัวเดียวกันนั่งติดกัน

จัดให้สมาชิกครอบครัวแรกที่มี 3 คน นั่งก่อน ได้ $(3-1)! = 2$ วิธี

ต่อมาจัดให้สมาชิกอีกครอบครัวหนึ่งนั่งแทรกระหว่างสมาชิกของครอบครัวแรก
ได้ $3! = 6$ วิธี

ดังนั้น จะจัดให้ไม่มีสมาชิกในครอบครัวเดียวกันนั่งติดกัน ได้ $2 \times 6 = 12$ วิธี

$$\text{นั่นคือ } n(E_1) = 12$$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ไม่มีสมาชิกในครอบครัวเดียวกันนั่งติดกัน เท่ากับ $\frac{1}{10}$

2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่สมาชิกในครอบครัวเดียวกันนั่งติดกัน

พิจารณาว่าคนในครอบครัวเดียวกันนั่งติดกัน เป็นคน 1 คน

นั่นคือ จะมีคน 2 คน ซึ่งจัดเรียงเป็นวงกลมได้ $(2-1)! = 1$ วิธี

ในแต่ละวิธีนี้ สามารถจัดสมาชิกในแต่ละครอบครัวนั่งได้ $3!3! = 36$ วิธี

ดังนั้น มีวิธีที่สมาชิกในครอบครัวเดียวกันนั่งติดกัน 36 วิธี

นั่นคือ $n(E_2) = 36$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่สมาชิกในครอบครัวเดียวกันนั่งติดกัน เท่ากับ $\frac{3}{10}$

40. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = (5-1)! = 24$$

1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่ลูกทั้งสามนั่งติดกัน

พิจารณาให้ลูกทั้งสามคนที่นั่งติดกันเป็นคน 1 คน

นั่นคือ มีคน 3 คน ซึ่งจัดเรียงเป็นวงกลมได้ $(3-1)! = 2$ วิธี

ในแต่ละวิธีนี้ ลูกทั้งสามคนสามารถนั่งสลับกันได้ $3! = 6$ วิธี

ดังนั้น มีวิธีที่ลูกทั้งสามนั่งติดกัน $2 \times 6 = 12$ วิธี

นั่นคือ $n(E_1) = 12$

$$\text{จะได้ } P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ลูกทั้งสามคนนั่งติดกัน เท่ากับ $\frac{1}{2}$

2) **วิธีที่ 1** ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่พ่อและแม่ไม่นั่งติดกัน

จัดให้ลูกทั้งสามคนนั่งก่อน ได้ $(3-1)! = 2$ วิธี

ต่อมาให้พ่อและแม่นั่งแทรกลูก ซึ่งสามารถนั่งได้ 3 ที่

นั่นคือ มีวิธีที่พ่อและแม่นั่งแทรกระหว่างลูกทั้งสาม $P_{3,2} = 6$ วิธี

ดังนั้น มีวิธีที่พ่อและแม่ไม่นั่งติดกัน $2 \times 6 = 12$ วิธี

นั่นคือ $n(E_2) = 12$

$$\text{จะได้ } P(E_2) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่พ่อและแม่ไม่นั่งติดกัน เท่ากับ $\frac{1}{2}$

วิธีที่ 2 ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่พ่อและแม่ไม่นั่งติดกัน

นั่นคือเหตุการณ์ที่มีลูกหนึ่งคนนั่งระหว่างพ่อและแม่

เลือกลูก 1 คน จาก 3 คนมานั่งระหว่างพ่อและแม่ ได้ 3 วิธี

พิจารณาว่าพ่อแม่และลูก 1 คน ที่นั่งติดกันเป็นคน 1 คน

นั่นคือ มีคน 3 คน ซึ่งจัดให้นั่งเป็นวงกลมได้ $(3-1)! = 2$ วิธี

ในแต่ละวิธี พ่อและแม่สามารถนั่งสลับกันได้ 2 วิธี

ดังนั้น มีวิธีจัดให้ลูกหนึ่งคนนั่งระหว่างพ่อแม่ได้ $3 \times 2 \times 2 = 12$ วิธี

หรือ มีวิธีที่พ่อแม่และแม่ไม่นั่งติดกัน 12 วิธี

นั่นคือ $n(E_3) = 12$

$$\text{จะได้ } P(E_3) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่พ่อแม่และแม่ไม่นั่งติดกัน เท่ากับ $\frac{1}{2}$

41. ให้ A แทนเหตุการณ์ที่ธงชัยสอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์

B แทนเหตุการณ์ที่ธงชัยสอบผ่านวิชาภาษาอังกฤษ

จะได้ $A \cup B$ แทนเหตุการณ์ที่ธงชัยสอบผ่านอย่างน้อย 1 วิชา

$A \cap B$ แทนเหตุการณ์ที่ธงชัยสอบผ่านทั้งสองวิชา

ต้องการหา $P(A \cap B)$

โจทย์กำหนดให้ $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.5$ และ $P(A \cup B) = 0.8$

จาก $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

จะได้ $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.6 + 0.5 - 0.8 = 0.3$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ธงชัยจะสอบผ่านทั้งสองวิชานี้ เท่ากับ 0.3

42. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S) = 120$

ให้ A แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนคนนี้ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์

นั่นคือ $n(A) = 60$

$$\text{จะได้ } P(A) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

ให้ B แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนคนนี้ชอบเรียนวิชาภาษาอังกฤษ

นั่นคือ $n(B) = 50$

$$\text{จะได้ } P(B) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

จะได้ $A \cap B$ แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนคนนี้ชอบเรียนทั้งสองวิชา

นั่นคือ $n(A \cap B) = 20$

$$\text{จะได้ } P(A \cap B) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

- 1) จะได้ $A \cup B$ แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนคนนี้ชอบเรียนอย่างน้อย 1 วิชา

$$\text{จาก } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{จะได้ } P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{5}{12} - \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้ชอบเรียนอย่างน้อย 1 วิชา เท่ากับ $\frac{3}{4}$

- 2) จะได้ $A' \cap B'$ แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนคนนี้ไม่ชอบเรียนทั้งสองวิชา

$$\text{จากสมบัติของเซต ได้ว่า } A' \cap B' = (A \cup B)'$$

$$\text{จาก } P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$$

$$\text{จะได้ } P((A \cup B)') = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{นั่นคือ } P(A' \cap B') = \frac{1}{4}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้ไม่ชอบเรียนทั้งสองวิชา เท่ากับ $\frac{1}{4}$

- 3) จะได้ $A - B$ แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนคนนี้ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ แต่ไม่ชอบเรียนวิชาภาษาอังกฤษ

$$\text{จาก } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\text{จะได้ } P(A - B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ แต่ไม่ชอบเรียนวิชาภาษาอังกฤษ เท่ากับ $\frac{1}{3}$

- 4) จะได้ $(A \cap B)'$ แทนเหตุการณ์ที่นักเรียนคนนี้ชอบเรียนอย่างมาก 1 วิชา

$$\text{จาก } P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$$

$$\text{จะได้ } P(A \cap B)' = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้ชอบเรียนอย่างมาก 1 วิชา เท่ากับ $\frac{5}{6}$

43. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = 300$$

ให้ A แทนเหตุการณ์ที่ผู้เข้าร่วมประชุมคนนี้ประกอบอาชีพค้าขาย

นั่นคือ $n(A) = 160$

$$\text{จะได้ } P(A) = \frac{160}{300} = \frac{8}{15}$$

ให้ B แทนเหตุการณ์ที่ผู้เข้าร่วมประชุมคนนี้ประกอบอาชีพรับจ้าง

นั่นคือ $n(B) = 90$

$$\text{จะได้ } P(B) = \frac{90}{300} = \frac{3}{10}$$

จะได้ $A \cap B$ แทนเหตุการณ์ที่ผู้เข้าร่วมประชุมคนนี้ประกอบอาชีพค้าขายและรับจ้าง

นั่นคือ $n(A \cap B) = 40$

$$\text{จะได้ } P(A \cap B) = \frac{40}{300} = \frac{2}{15}$$

นั่นคือ $(A \cup B)'$ แทนเหตุการณ์ที่ผู้เข้าร่วมประชุมคนนี้จะไม่ประกอบอาชีพค้าขายหรือรับจ้าง

ต้องการหา $P((A \cup B)')$

$$\text{จาก } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{จะได้ } P(A \cup B) = \frac{8}{15} + \frac{3}{10} - \frac{2}{15} = \frac{7}{10}$$

$$\text{จาก } P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$$

$$\text{จะได้ } P((A \cup B)') = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผู้เข้าร่วมประชุมคนนี้จะไม่ประกอบอาชีพค้าขายและรับจ้าง เท่ากับ $\frac{3}{10}$

44. ให้ A แทนเหตุการณ์ที่คอมพิวเตอร์ชำรุดจากกระแสไฟฟ้ามากเกินไป

B แทนเหตุการณ์ที่คอมพิวเตอร์ชำรุดจากฮาร์ดดิสก์เสีย

C แทนเหตุการณ์ที่คอมพิวเตอร์ชำรุดจากซีพียูทำงานหนัก

จากโจทย์กำหนดให้ $P(A) = 0.06$, $P(B) = 0.03$, $P(C) = 0.01$

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0 \text{ และ}$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0$$

ต้องการหา $P(A \cup B \cup C)$

จากสมบัติของเซต จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ &\quad - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ &= 0.06 + 0.03 + 0.01 - 0 - 0 - 0 + 0 \\ &= 0.1 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่คอมพิวเตอร์จะชำรุดจากกระแสไฟฟ้ามากเกินไปหรือฮาร์ดดิสก์เสีย หรือซีพียูทำงานหนัก เท่ากับ 0.1

45. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S) = 6 \times 6 = 36$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ทอดลูกเต๋าสองครั้ง แล้วหมากจะตกไปอยู่บนช่องหมายเลขน้อยกว่าหรือเท่ากับ 16

เนื่องจาก $E = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,6), (3,1), (3,5), (4,1), (4,2),$
 $(4,4), (4,5), (4,6), (5,3), (6,2)\}$

นั่นคือ $n(E) = 14$

จะได้ $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่อีกสองตา หมากจะตกไปอยู่บนช่องหมายเลขน้อยกว่าหรือเท่ากับ 16 เท่ากับ $\frac{7}{18}$

46. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S) = 8!$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ไม่มีหนังสือคณิตศาสตร์สองเล่มได้อยู่ติดกัน

ขั้นที่ 1 จัดหนังสือวิชาอื่นที่ไม่ใช่หนังสือคณิตศาสตร์จำนวน 5 เล่ม ได้ 5! วิธี

ขั้นที่ 2 จัดหนังสือคณิตศาสตร์ 3 เล่ม แทรกได้ 6 ตำแหน่ง จัดได้ $P_{6,3}$ วิธี

โดยหลักการคูณ มีวิธีจัดไม่ให้หนังสือคณิตศาสตร์สองเล่มได้อยู่ติดกัน $5! \times P_{6,3}$ วิธี

นั่นคือ $n(E) = 5! \times P_{6,3}$

จะได้ $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5! \times P_{6,3}}{8!} = \frac{5}{14}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ไม่มีหนังสือคณิตศาสตร์สองเล่มได้อยู่ติดกัน เท่ากับ $\frac{5}{14}$

47. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

$$\text{จะได้ } n(S) = \frac{15!}{7!8!} = 6,435$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่เดินทางจากจุด O ไปยังจุด P โดยไม่ผ่านจุด A
 เนื่องจาก การเดินทางโดยผ่านจุด A จะแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอน

ขั้นที่ 1 เส้นทางเดินจากจุด O ไปยังจุด A มี $\frac{8!}{4!4!}$ เส้นทาง

ขั้นที่ 2 เส้นทางเดินจากจุด A ไปยังจุด P มี $\frac{7!}{4!3!}$ เส้นทาง

ดังนั้น จำนวนเส้นทางเดินทั้งหมดจากจุด O ไปยังจุด P โดยผ่านจุด A มี

$$\frac{8!}{4!4!} \times \frac{7!}{4!3!} = 2,450 \text{ เส้นทาง}$$

ดังนั้น จำนวนเส้นทางเดินทั้งหมดจากจุด O ไปยังจุด P โดยไม่ผ่านจุด A มี

$$6,435 - 2,450 = 3,985 \text{ เส้นทาง}$$

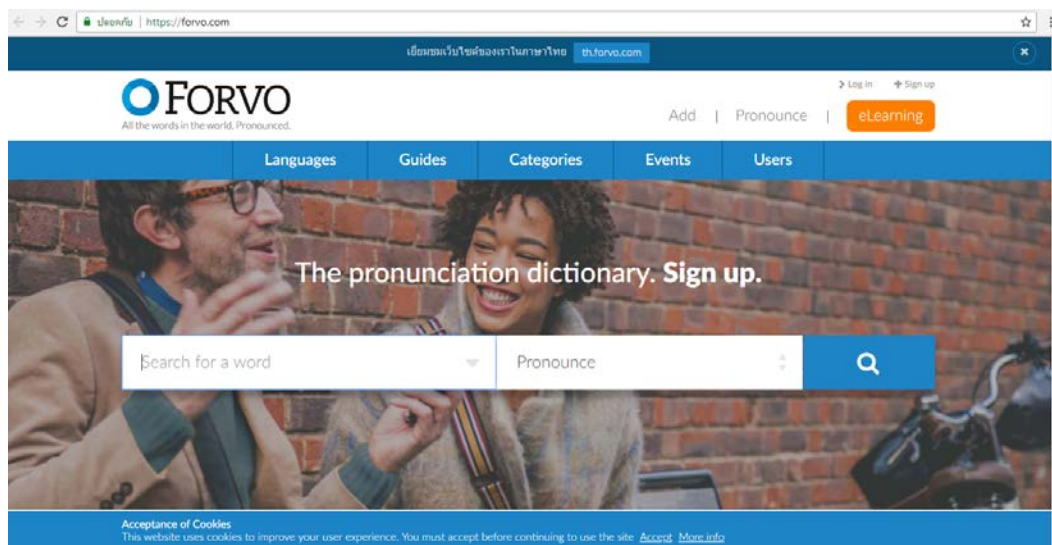
นั่นคือ $n(E) = 3,985$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3,985}{6,435} = \frac{797}{1,287}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เดินทางจากจุด O ไปยังจุด P โดยไม่ผ่านจุด A เท่ากับ $\frac{797}{1,287}$

แหล่งเรียนรู้เพิ่มเติม

forvo.com เป็นเว็บไซต์ที่รวบรวมการออกเสียงคำในภาษาต่าง ๆ ก่อตั้งขึ้นเมื่อ ค.ศ. 2008 โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อพัฒนาการสื่อสารทางการพูด ผ่านการแลกเปลี่ยนการออกเสียงคำในภาษาต่าง ๆ ทั้งจากบุคคลที่เป็นเจ้าของภาษาและบุคคลที่ไม่ใช่เจ้าของภาษา forvo.com ได้รับคัดเลือกจากนิตยสาร Times ให้เป็น 50 เว็บไซต์ที่ดีที่สุดในปี ค.ศ. 2013 (50 best websites of 2013) ปัจจุบันเว็บไซต์นี้เป็นฐานข้อมูลที่รวบรวมการออกเสียงที่ใหญ่ที่สุด มีคลิปเสียงที่แสดงการออกเสียงคำศัพท์ประมาณสี่ล้านคำในภาษาต่าง ๆ มากกว่า 330 ภาษา



ครูอาจใช้เว็บไซต์ forvo.com เพื่อศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับการออกเสียงคำศัพท์คณิตศาสตร์ หรือชื่อนักคณิตศาสตร์ในภาษาอังกฤษหรือภาษาอื่น ๆ ที่ปรากฏในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ได้ เช่น conjugate ซึ่งเป็นคำศัพท์คณิตศาสตร์ในภาษาอังกฤษ หรือ De Moivre นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส

บรรณานุกรม

- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2556). *คู่มือครูรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลาง การศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554). *คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลาง การศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2562). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ตามผลการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *หนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริม ศักยภาพคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 ความน่าจะเป็น*. กรุงเทพฯ: พัฒนา คุณภาพวิชาการ.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *หนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริม ศักยภาพคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 จำนวนเชิงซ้อน*. กรุงเทพฯ: พัฒนา คุณภาพวิชาการ.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *หนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริม ศักยภาพคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 ระบบจำนวนจริง*. กรุงเทพฯ: พัฒนา คุณภาพวิชาการ.
- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน. (2560). *ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลาง การศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตร แห่งประเทศไทย.

คณะผู้จัดทำ

คณะที่ปรึกษา

ศ. ดร.ชูกิจ ลิ้มปิจำนงค์
ดร.ศรเทพ วรรณรัตน์
ดร.วนิดา ธนประโยชน์ศักดิ์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะผู้จัดทำคู่มือครู

นางสาวปฐมาภรณ์ อวชัย
นางสาวอัมริสา จันทนะศิริ
นายพัฒนชัย รวีวรรณ
นางสาวภิญญดา กลับแก้ว
ดร.ศศิวรรณ เมื่อนันทน์
ดร.สุธารส นิลรอด
นายกฤษณะ ป้อมดี
ดร.จิณณวัตร เจตน์จรุงกิจ
นายทศธรรม เมขลา
นายเกษมะ นิจจันทร์พันธุ์
ดร.กุลนิดา ปลั่งปิติวิริยะเวช

ดร.ธนากร ปริญญาศาสตร์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
โรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี กรุงเทพฯ
โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม
กรุงเทพฯ
มหาวิทยาลัยศิลปากร จังหวัดนครปฐม

คณะผู้พิจารณาคู่มือครู

นายประสาท สอ้านวงศ์
รศ. ดร.สมพร สุตินันท์โอภาส
นางสาวจินตนา อารยะรังสฤษฎ์
นางสาวจำเริญ เจียวหวาน
นายสุเทพ กิตติพิทักษ์
ดร.สุพัตรา ผาติวิสันต์
ดร.อลงกรณ์ ตั้งสงวนธรรม
ว่าที่ร้อยเอก ดร.ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชย์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ผศ.ตีรวิชัย ทินประภา
ผศ. ดร.ธัญยศ จำปาหวาย

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา กรุงเทพฯ
มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา กรุงเทพฯ

บรรณาธิการ

รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะกรรมการ

นางสาวขวัญใจ ภาสพันธุ์
นายณรงค์ฤทธิ์ ฉายา

นายถนอมเกียรติ งานสกุล
นางนงนุช ผลทวี
นางมยุรี สาสีวงศ์
นางสาวศราญลักษณ์ บุตรรัตน์
นายศรัณย์ แสงนิลาวิวัฒน์

ว่าที่ร้อยตรีสามารถ วนาธรัตน์
นางศุภรา ทวรรณกุล
นายสุกิจ สมงาม
นางสุปราณี พวงพี
นายชัยรัตน์ สุนทรประพี
ฝ่ายนวัตกรรมเพื่อการเรียนรู้
นางสาวปิยาภรณ์ ทองมาก

โรงเรียนราชวินิตบางเขน กรุงเทพฯ
โรงเรียนสาธิตแห่งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
ศูนย์วิจัยและพัฒนาการศึกษา กรุงเทพฯ
โรงเรียนสตรีภูเก็ต จังหวัดภูเก็ต
โรงเรียนทับปุดวิทยา จังหวัดพังงา
โรงเรียนสตรีศรีเกศ จังหวัดศรีสะเกษ
โรงเรียนบางละมุง จังหวัดชลบุรี
โรงเรียนวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เพชรบุรี
จังหวัดเพชรบุรี
โรงเรียนเฉลิมขวัญสตรี จังหวัดพิษณุโลก
ข้าราชการบำนาญ
ข้าราชการบำนาญ
ข้าราชการบำนาญ
นักวิชาการอิสระ
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี



สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ