คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่

คณิตศาสตร์ ๖

เล่ม ๑

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

ฉบับเผยแพร่ พ.ค. 63

คู่มือครู

รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๖ เล่ม ๑

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) มีหน้าที่ในการพัฒนาหลักสูตร วิธีการเรียนรู้ การประเมินผล การจัดทำหนังสือเรียน คู่มือครู แบบฝึกทักษะ กิจกรรม และสื่อการเรียนรู้เพื่อใช้ประกอบการเรียนรู้ในกลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๖ เล่ม ๑ นี้ จัดทำตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีเนื้อหาสาระ ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน การวิเคราะห์ความสอดคล้องของแบบฝึกหัดท้ายบทกับจุดมุ่งหมายประจำบท ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู ซึ่งเป็นความรู้ที่ครูควรทราบนอกเหนือจากเนื้อหาในหนังสือเรียน ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทพร้อมเฉลย รวมทั้งเฉลยแบบฝึกหัด ซึ่งสอดคล้องกับหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๖ เล่ม ๑ ที่ต้องใช้ควบคู่กัน

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่า คู่มือครูเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้และเป็นส่วนสำคัญในการพัฒนาคุณภาพและมาตรฐานการศึกษากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิ บุคลากรทางการศึกษา และหน่วยงานต่าง ๆ ที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำไว้ ณ โอกาสนี้

(ศาสตราจารย์ชูกิจ ลิมปิจำนงค์)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อต้องการพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ด้วยการลงมือปฏิบัติทำกิจกรรมและแก้ปัญหาที่หลากหลายเพื่อให้ผู้เรียนเกิดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งมีทักษะแห่งศตวรรษที่ ๒๑ สสวท. จึงได้จัดทำคู่มือครูประกอบการใช้หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๖ เล่ม ๑ ที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตร เพื่อเป็นแนวทางให้โรงเรียนนำไปจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๖ เล่ม ๑ นี้ ประกอบด้วยเนื้อหาสาระ ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน การวิเคราะห์ความสอดคล้องของแบบฝึกหัดท้ายบทกับจุดมุ่งหมายประจำบท ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครูซึ่งเป็นความรู้ที่ครูควรทราบนอกเหนือจากเนื้อหาในหนังสือเรียน ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทพร้อมเฉลย รวมทั้งเฉลยแบบฝึกหัด ซึ่งครูผู้สอนสามารถนำไปใช้เป็นแนวทางในการวางแผนการจัดการเรียนรู้ให้บรรลุจุดประสงค์ที่ตั้งไว้ โดยสามารถนำไปจัดกิจกรรมการเรียนรู้ได้ตามความเหมาะสมและความพร้อมของโรงเรียน ในการจัดทำคู่มือครูเล่มนี้ ได้รับความร่วมมือเป็นอย่างดียิ่งจากผู้ทรงคุณวุฒิ คณาจารย์ นักวิชาการอิสระ รวมทั้งครูผู้สอน นักวิชาการ จากสถาบัน และสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชน จึงขอขอบคุณมา ณ ที่นี้

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่า คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๖ เล่ม ๑ นี้ จะเป็นประโยชน์แก่ผู้สอนและผู้ที่เกี่ยวข้องทุกฝ่าย ที่จะช่วยให้จัดการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้คู่มือครูเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

แนะนำการใช้คู่มือครู

ในหนังสือเล่มนี้แบ่งเป็น 2 บท ตามหนังสือเรียนหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 โดยแต่ละบทจะมีส่วนประกอบ ดังนี้

ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง

ตัวชี้วัดระบุสิ่งที่นักเรียนพึงรู้และปฏิบัติได้ รวมทั้งคุณลักษณะของผู้เรียนในแต่ละระดับชั้น ซึ่งสะท้อนถึงมาตรฐานการเรียนรู้ มีความเฉพาะเจาะจงและมีความเป็นรูปธรรม นำไปใช้ในการกำหนดเนื้อหา จัดทำหน่วยการเรียนรู้ จัดการเรียนการสอน และเป็นเกณฑ์สำคัญสำหรับการวัดประเมินผลเพื่อตรวจสอบคุณภาพผู้เรียน

จุดมุ่งหมาย

เป้าหมายที่นักเรียนควรไปถึงหลังจากเรียนจบบทนี้

ความรู้ก่อนหน้า

ความรู้ที่นักเรียนจำเป็นต้องมีก่อนที่จะเรียนบทนี้

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

ประเด็นเกี่ยวกับเนื้อหาที่ครูควรเน้นย้ำกับนักเรียน ประเด็นเกี่ยวกับเนื้อหาที่ครูควรระมัดระวัง จุดประสงค์ของตัวอย่างที่นำเสนอในหนังสือเรียน เนื้อหาที่ควรทบทวนก่อนสอนเนื้อหาใหม่ และประเด็นที่ครูควรตระหนักในการสอน

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

ประเด็นที่นักเรียนมักเข้าใจผิดเกี่ยวกับเนื้อหา

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

ประเด็นที่ครูควรทราบเกี่ยวกับแบบฝึกหัด เช่น จุดมุ่งหมายของแบบฝึกหัด เนื้อหาที่ควรทบทวนก่อนทำแบบฝึกหัด และเรื่องที่ครูควรให้ความสำคัญในการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

กิจกรรมในคู่มือครู

กิจกรรมที่คู่มือครูเล่มนี้เสนอแนะไว้ให้ครูนำไปใช้ในชั้นเรียน ประกอบด้วยกิจกรรมนำเข้าสู่บทเรียน ที่ใช้เพื่อตรวจสอบความรู้ก่อนหน้าที่นักเรียนจำเป็นต้องทราบก่อนเรียนเนื้อหาใหม่ และกิจกรรมที่ใช้สำหรับสร้างความคิดรวบยอดในเนื้อหา โดยหลังจากทำกิจกรรมแล้ว ครูควรเชื่อมโยงผลที่ได้จากการทำกิจกรรมกับความคิดรวบยอดที่ต้องการเน้น ทั้งนี้ ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมเหล่านี้ด้วยตนเอง

กิจกรรมในหนังสือเรียน

กิจกรรมที่นักเรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม (learning and innovation skills) ที่จำเป็นสำหรับศตวรรษที่ 21 อันได้แก่ การคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม (creative and innovation) การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา (critical thinking and problem solving) การสื่อสาร (communication) และการร่วมมือ (collaboration)

เฉลยกิจกรรมในหนังสือเรียน

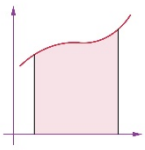
เฉลยคำตอบหรือตัวอย่างคำตอบของกิจกรรมในหนังสือเรียน

แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน

ตัวอย่างการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน ที่มีขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ซึ่งเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้และพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

สารบัญ บทที่ 1 – 2

ลำดับและอนุกรม



แคลคูลัสเบื้องต้น

สารบัญ

บทที่ 1

ลำดับและอนุกรม

ความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมเป็นพื้นฐานสำคัญที่นำไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตจริง เช่น ปริมาณยาที่ลดลงในร่างกาย การออมเงิน การผ่อนค่าสินค้า ซึ่งในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 ได้นำเสนอเนื้อหา เรื่อง ความหมายของลำดับและการเขียนแสดงลำดับ ลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต ลำดับฮาร์มอนิก ลิมิตของลำดับอนันต์ ความหมายของอนุกรมและการเขียนแสดงอนุกรม อนุกรมเลขคณิต อนุกรมเรขาคณิต อนุกรมอนันต์ สัญลักษณ์แสดงการบวก การประยุกต์ของลำดับและอนุกรม โดยเฉพาะอย่างยิ่งการประยุกต์ของลำดับและอนุกรมในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับดอกเบี้ยและมูลค่าของเงิน ซึ่งเป็นเนื้อหาสำคัญที่มีในหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ในบทเรียนนี้มุ่งให้นักเรียนบรรลุตัวชี้วัดตามสาระการเรียนรู้แกนกลาง บรรลุผลการเรียนรู้ตามสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม และบรรลุจุดมุ่งหมายดังต่อไปนี้

ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง/ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

ตัวชี้วัด	สาระการเรียนรู้แกนกลาง
• เข้าใจและนำความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมไปใช้ • เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับดอกเบี้ยและมูลค่าของเงินในการแก้ปัญหา	• ลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต • อนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต • ดอกเบี้ย • มูลค่าของเงิน • ค่ารายงวด

ผลการเรียนรู้

- ระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก
- หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต
- หาผลบวกอนุกรมอนันต์
- เข้าใจและนำความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมไปใช้

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

- ลำดับจำกัดและลำดับอนันต์
- ลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต
- ลิมิตของลำดับอนันต์
- อนุกรมจำกัดและอนุกรมอนันต์
- อนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต
- ผลบวกอนุกรมอนันต์
- การนำความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมไปใช้ในการแก้ปัญหามูลค่าของเงินและค่ารายงวด

จุดมุ่งหมาย

1. หาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต
2. หาลิมิตของลำดับอนันต์โดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต
3. ระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก
4. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต
5. หาผลบวกของอนุกรมอนันต์
6. ระบุได้ว่าอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก
7. ใช้ความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมในการแก้ปัญหา

ความรู้ก่อนหน้า

- เลขยกกำลัง
- ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ipst.me/10550

1.1 เนื้อหาสาระ

1. **บทนิยาม 1**

   ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ หรือมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

2. ในการเขียนแสดงลำดับ จะเขียนเฉพาะสมาชิกของเรนจ์เรียงกัน กล่าวคือ ถ้า a เป็นลำดับซึ่ง $a(1)=a_1, a(2)=a_2, a(3)=a_3, \ldots, a(n)=a_n$ แล้ว

   เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของลำดับ

   เรียก a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของลำดับ

   เรียก a_3 ว่า พจน์ที่ 3 ของลำดับ

   $\vdots$ $\vdots$

   และเรียก a_n ว่า พจน์ที่ n ของลำดับ หรือพจน์ทั่วไปของลำดับ

3. ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ เรียกว่า **ลำดับจำกัด**

   และลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก เรียกว่า **ลำดับอนันต์**

   กรณี a เป็นลำดับจำกัด เขียนแทนลำดับด้วย $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

   กรณี a เป็นลำดับอนันต์ เขียนแทนลำดับด้วย $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

4. **บทนิยาม 2**

   ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับซึ่งมีผลต่างที่ได้จากการนำพจน์ที่ $n+1$ ลบด้วยพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงตัวที่เป็นผลต่างนี้ว่า **ผลต่างร่วม**

   จากบทนิยาม ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ จะเป็นลำดับเลขคณิต ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงตัว d ที่ $a_{n+1}-a_n=d$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

5. **บทนิยาม 3**

   ลำดับเรขาคณิต คือ ลำดับซึ่งมีอัตราส่วนของพจน์ที่ $n+1$ ต่อพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงตัวที่เป็นอัตราส่วนนี้ว่า **อัตราส่วนร่วม**

   จากบทนิยาม ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ จะเป็นลำดับเรขาคณิต ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงตัว r ที่ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

6. **บทนิยาม 4**

ลำดับฮาร์มอนิก คือ ลำดับ a_n ซึ่งมีสมบัติว่า ลำดับของส่วนกลับ $b_n = \frac{1}{a_n}$ เป็นลำดับเลขคณิต

7. **บทนิยาม 5**

ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับอนันต์ ถ้า n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว a_n เข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น จะเขียน $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (อ่านว่า ลิมิตของลำดับ a_n เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด เท่ากับ L) และจะเรียก L ว่า **ลิมิตของลำดับ** และกล่าวว่าลำดับนี้มีลิมิตเท่ากับ L เรียกลำดับอนันต์ที่มีลิมิตว่า **ลำดับลู่เข้า** และเรียกลำดับอนันต์ที่ไม่ใช่ลำดับลู่เข้าว่า **ลำดับลู่ออก**

8. **ทฤษฎีบท 1**

ให้ r เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$ และ $\lim_{n\to\infty} n^r$ ไม่มีค่า

9. **ทฤษฎีบท 2**

ให้ r เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

ถ้า $|r| < 1$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

ถ้า $|r| > 1$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} r^n$ ไม่มีค่า

10. **ทฤษฎีบท 3**

ให้ a_n, b_n, t_n เป็นลำดับของจำนวนจริง A, B เป็นจำนวนจริง และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ โดยที่ $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ จะได้ว่า

1) ถ้า $t_n = c$ ทุกจำนวนเต็มบวก n แล้ว $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} c = c$

2) $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n = cA$

3) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$

4) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = A - B$

5) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = AB$

6) ถ้า $b_n \neq 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n และ $B \neq 0$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$

11. **ทฤษฎีบท 4**

ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับซึ่ง $a_n \neq 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_n}\right)=0$ แล้ว ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ จะลู่ออก

12. สำหรับลำดับที่พจน์ทั่วไปอยู่ในรูปเศษส่วนของพหุนาม

- ถ้าดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวส่วนมากกว่าดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวเศษแล้ว ลำดับจะมีลิมิตเป็นศูนย์
- ถ้าดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวเศษเท่ากับดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวส่วนแล้ว ลำดับจะเป็นลำดับลู่เข้าที่มีลิมิตไม่เป็นศูนย์
- ถ้าดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวส่วนน้อยกว่าดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวเศษแล้ว ลำดับจะเป็นลำดับลู่ออก

13. **ทฤษฎีบท 5**

ให้ a_n เป็นลำดับของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ L เป็นจำนวนจริง และ m เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับสอง จะได้ว่า

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[m]{L}$

14. ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นลำดับจำกัดที่มี n พจน์ จะเรียกการเขียนแสดงการบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ ว่า **อนุกรมจำกัด**

เรียก	a_1	ว่า	พจน์ที่ 1 ของอนุกรม
เรียก	a_2	ว่า	พจน์ที่ 2 ของอนุกรม
เรียก	a_3	ว่า	พจน์ที่ 3 ของอนุกรม
	$\vdots$		$\vdots$
และเรียก	a_n	ว่า	พจน์ที่ n ของอนุกรม

15. ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม นั่นคือ

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

16. อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต เรียกว่า **อนุกรมเลขคณิต**

17. ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี d เป็นผลต่างร่วม

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต คือ

$$S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) \text{ หรือ } S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + \left(n-1\right)d\right)$$

18. อนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต เรียกว่า **อนุกรมเรขาคณิต**

19. ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นลำดับเรขาคณิต ซึ่งมี r เป็นอัตราส่วนร่วม

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ $S_n = \dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$ เมื่อ $r \neq 1$

20. ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับอนันต์ จะเรียกการเขียนแสดงการบวกในรูป

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ ว่า **อนุกรมอนันต์**

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของอนุกรม

เรียก a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของอนุกรม

$\vdots$

และเรียก a_n ว่า พจน์ที่ n ของอนุกรม

21. **บทนิยาม 6**

กำหนด $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ เป็นอนุกรมอนันต์

ให้ $S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

เรียก S_n ว่า **ผลบวกย่อย** n พจน์แรกของอนุกรม เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก เรียกลำดับอนันต์ $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ ว่า **ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม**

22. **บทนิยาม 7**

กำหนดอนุกรมอนันต์ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

ให้ $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้

ถ้าลำดับ S_n เป็นลำดับลู่เข้า โดย $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ เมื่อ S เป็นจำนวนจริง

แล้วจะกล่าวว่าอนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ เป็น **อนุกรมลู่เข้า** และเรียก S ว่าผลบวกของอนุกรม

ถ้าลำดับ S_n เป็นลำดับลู่ออก จะกล่าวว่าอนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ เป็น **อนุกรมลู่ออก**

23. การแสดงว่าอนุกรมอนันต์ใดจะเป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ทำได้ดังนี้

1) พิจารณาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม และหาสูตรทั่วไปของผลบวกย่อย n พจน์แรก (S_n) ของอนุกรม

2) พิจารณาลิมิตของ S_n ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ เมื่อ S เป็นจำนวนจริง แล้วอนุกรมนั้นเป็นอนุกรมลู่เข้า และมีผลบวกเท่ากับ S แต่ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ไม่มีค่า แล้วอนุกรมนั้นเป็นอนุกรมลู่ออก

24. **ทฤษฎีบท 6**

กำหนดให้อนุกรมเรขาคณิตมี a_1 เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วนร่วม

ถ้า $|r|<1$ แล้ว อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าและผลบวกของอนุกรมเท่ากับ $\frac{a_1}{1-r}$

ถ้า $|r|\geq 1$ แล้ว อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

25. การเขียนอนุกรมเพื่อความสะดวกจะใช้ตัวอักษรกรีกตัวพิมพ์ใหญ่ $\sum$ (อ่านว่า ซิกมา) เป็นสัญลักษณ์แสดงการบวก

กล่าวคือ จะเขียนแทนอนุกรมจำกัด $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ ด้วยสัญลักษณ์ $\sum_{i=1}^{n} a_i$ (อ่านว่า ซัมเมชัน a_i เมื่อ i เท่ากับ 1 ถึง n) และเขียนแทนอนุกรมอนันต์ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ ด้วยสัญลักษณ์ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ (อ่านว่า ซัมเมชัน a_i เมื่อ i เท่ากับ 1 ถึง ∞) เรียกตัวแปร i ที่ปรากฏในสัญลักษณ์ $\sum_{i=1}^{n} a_i$ หรือ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ว่า **ดัชนี** ซึ่งอาจจะใช้ตัวแปรอื่นแทน i ได้

26. **ทฤษฎีบท 7**

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะได้ว่า

1) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

2) $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

3) $\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

4) $\sum_{i=1}^{n} (a_i-b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

27. **ทฤษฎีบท 8**

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะได้ว่า

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

2) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$

28. **ทฤษฎีบท 9**

ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี (ปีละครั้ง) แล้วเมื่อสิ้นปีที่ n จะได้เงินรวม $P(1+r)^n$ บาท เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

29. **ทฤษฎีบท 10**

ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง แล้วเมื่อฝากเงินครบ n ปี จะได้เงินรวม $P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kn}$ บาท เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

30. ถ้าลงทุน P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง เป็นเวลา n ปี กำหนดให้ $r = \frac{i}{100}$ แล้วเมื่อครบ n ปี เงินรวมที่ได้ คือ

$$S = P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kn}$$

เรียก S ว่ามูลค่าอนาคตของเงินต้น P

ในทางกลับกัน จะเรียก P ว่ามูลค่าปัจจุบันของเงินรวม S

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบัน P ของเงินรวม S คือ

$$P = S\left(1+\frac{r}{k}\right)^{-kn}$$

31. การรับหรือจ่ายค่างวด มีลักษณะ 3 ประการ ดังนี้

1) รับหรือจ่ายเท่ากันทุกงวด

2) รับหรือจ่ายติดต่อกันทุกงวด

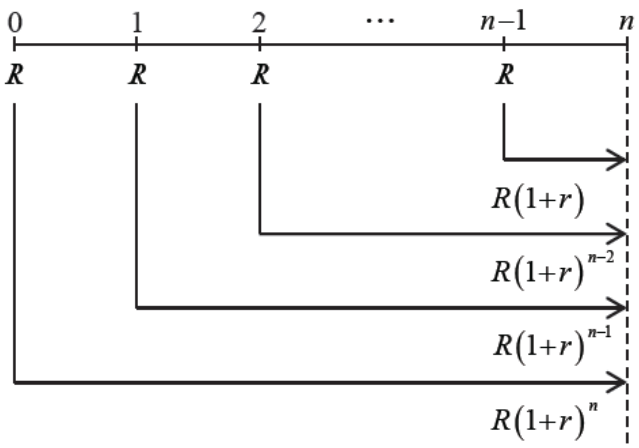
3) รับหรือจ่ายตอนต้นงวดหรือสิ้นงวด

32. **ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนต้นงวด**

พิจารณาการรับหรือจ่ายเงินแต่ละงวด โดยที่แต่ละงวดเป็นเงิน R บาท ซึ่งเริ่มรับหรือจ่ายเงินตอนต้นงวด รวมทั้งหมด n งวด และอัตราดอกเบี้ยแต่ละงวดเป็น $i\%$

ให้ $r=\dfrac{i}{100}$

จะได้ แผนภาพแสดงค่างวดแต่ละงวด ดังนี้



จะได้ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $R(1+r)+R(1+r)^2+\cdots+R(1+r)^n$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี n พจน์ โดยพจน์แรก คือ $R(1+r)$ และอัตราส่วนร่วม คือ $1+r$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $\dfrac{R(1+r)\left((1+r)^n-1\right)}{(1+r)-1}$ ซึ่งเท่ากับ

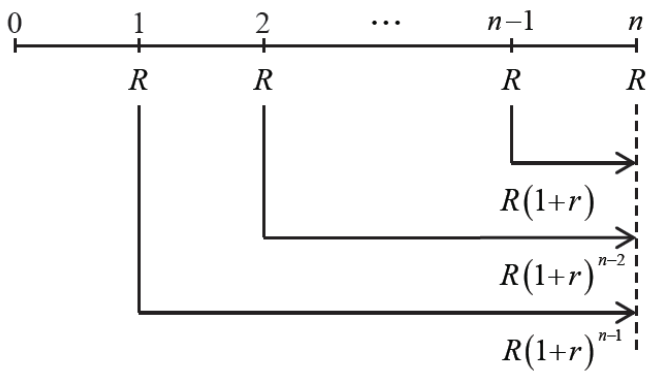
$$\frac{R(1+r)\left((1+r)^n-1\right)}{r}$$

33. **ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนสิ้นงวด**

พิจารณาการรับหรือจ่ายเงินแต่ละงวด โดยที่แต่ละงวดเป็นเงิน R บาท ซึ่งเริ่มรับหรือจ่ายเงินตอนสิ้นงวด รวมทั้งหมด n งวด และอัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$

ให้ $r=\dfrac{i}{100}$

จะได้ แผนภาพแสดงค่างวดแต่ละงวด ดังนี้



จะได้ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $R+R(1+r)+R(1+r)^2+\cdots+R(1+r)^{n-1}$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี n พจน์ พจน์แรก คือ R และอัตราส่วนร่วม คือ $1+r$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $\dfrac{R\left((1+r)^n-1\right)}{(1+r)-1}$ ซึ่งเท่ากับ $\dfrac{R\left((1+r)^n-1\right)}{r}$

1.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน

ลำดับ

ความหมายของลำดับ

กิจกรรม : แนะนำลำดับ

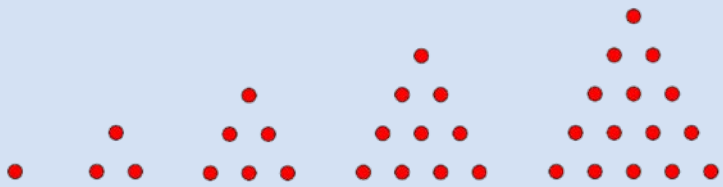
จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง ลำดับ เพื่อให้นักเรียนเข้าใจความหมายของลำดับและการเขียนแสดงลำดับ

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

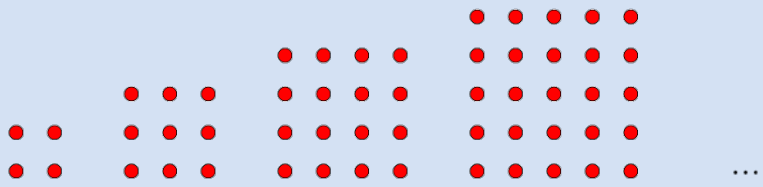
1. ครูให้นักเรียนพิจารณาแบบรูปต่อไปนี้ โดยสังเกตจำนวนจุดในแต่ละรูป

- แบบรูปชุดที่ 1



รูปที่ 1 รูปที่ 2 รูปที่ 3 รูปที่ 4 รูปที่ 5

- แบบรูปชุดที่ 2



รูปที่ 1 รูปที่ 2 รูปที่ 3 รูปที่ 4 ...

2. ครูให้นักเรียนเขียนเซตของคู่อันดับจากแบบรูปชุดที่ 1 และ 2 โดยให้สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับคือรูปที่ และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับคือจำนวนจุดในแต่ละรูป เช่น แบบรูปชุดที่ 1 รูปที่ 1 มีจำนวนจุด 1 จุด เขียนได้เป็น $(1, 1)$

   แนวคำตอบ

   - เซตของคู่อันดับจากแบบรูปชุดที่ 1 คือ $\{(1,1), (2,3), (3,6), (4,10), (5,15)\}$
   - เซตของคู่อันดับจากแบบรูปชุดที่ 2 คือ $\{(1,4), (2,9), (3,16), (4,25), \ldots\}$

3. จากคำตอบที่ได้ในข้อ 2 ครูให้นักเรียนพิจารณาว่าเซตของคู่อันดับที่ได้ในข้อ 2 ตามแบบรูปชุดที่ 1 และ 2 เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด

   แนวคำตอบ

   เซตของคู่อันดับที่ได้ในข้อ 2 ตามแบบรูปชุดที่ 1 และ 2 เป็นฟังก์ชัน เนื่องจากสมาชิกตัวหน้าของแต่ละคู่อันดับจับคู่กับสมาชิกตัวหลังเพียงตัวเดียวเท่านั้น

4. จากคำตอบที่ได้ในข้อ 3 ครูให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันที่ได้จากแบบรูปชุดที่ 1 และ 2

   แนวคำตอบ

   - ฟังก์ชันที่ได้จากแบบรูปชุดที่ 1 มีโดเมน คือ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ และเรนจ์ คือ $\{1, 3, 6, 10, 15\}$
   - ฟังก์ชันที่ได้จากแบบรูปชุดที่ 2 มีโดเมน คือ $\{1, 2, 3, \ldots\}$ และเรนจ์ คือ $\{4, 9, 16, \ldots\}$

5. จากคำตอบที่ได้ในข้อ 4 ครูชี้แนะให้นักเรียนสังเกตว่าโดเมนของฟังก์ชันที่ได้จากแบบรูปชุดที่ 1 เป็นสับเซตของเซตของจำนวนเต็มบวก และโดเมนของฟังก์ชันที่ได้จากแบบรูปชุดที่ 2 เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก จากนั้นครูให้นักเรียนพิจารณาว่าโดเมนของฟังก์ชันที่ได้จากแบบรูปแต่ละชุดเป็นเซตจำกัดหรือเซตอนันต์

   แนวคำตอบ

   - โดเมนของฟังก์ชันที่ได้จากแบบรูปชุดที่ 1 เป็นเซตจำกัด
   - โดเมนของฟังก์ชันที่ได้จากแบบรูปชุดที่ 2 เป็นเซตอนันต์

6. ครูนำเข้าสู่บทนิยามของลำดับ (บทนิยาม 1) และการเขียนแสดงลำดับ

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ครูควรเน้นย้ำให้นักเรียนเข้าใจว่า ลำดับเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเต็มบวกหรือเซตของจำนวนเต็มบวก โดยในการเขียนแสดงลำดับจะเขียนเฉพาะสมาชิกของเรนจ์เรียงกัน และใช้เครื่องหมายจุลภาค (,) คั่นระหว่างแต่ละตัว โดยไม่เขียนโดเมน
- หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 ใช้สัญลักษณ์ a_n แทนทั้งพจน์ที่ n ของลำดับ และพจน์ทั่วไปของลำดับ
- การเขียนแสดงลำดับโดยเขียนแจกแจงพจน์ของลำดับในหัวข้อนี้ ต้องเขียนพจน์ทั่วไปกำกับไว้เสมอ เนื่องจากมีบางลำดับที่มีพจน์แรก ๆ เหมือนกัน แต่มีพจน์ทั่วไปแตกต่างกัน

  เช่น เขียนแจกแจงพจน์ของลำดับที่ $a_n = \frac{1}{n}$ ได้เป็น $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

  เขียนแจกแจงพจน์ของลำดับที่ $b_n = \frac{1}{6}\left(n^2 - 6n + 11\right)$ ได้เป็น $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

  จะเห็นว่า ทั้งสองลำดับมีสามพจน์แรกเหมือนกัน จึงอาจจะเข้าใจผิดว่าลำดับ a_n และ b_n เป็นลำดับเดียวกัน อย่างไรก็ตามเมื่อพิจารณาพจน์ที่ 4 จะได้ว่า $a_4 = \frac{1}{4}$ แต่ $b_4 = \frac{1}{2}$ นั่นคือ ลำดับ a_n และ b_n ไม่ใช่ลำดับเดียวกัน

  ดังนั้น การเขียนแจกแจงพจน์ของลำดับ a_n และ b_n โดยเขียนพจน์ที่ n กำกับไว้จะได้เป็น $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ และ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{6}\left(n^2 - 6n + 11\right), \ldots$ ตามลำดับ
- เนื่องจากการกำหนดพจน์แรก ๆ แล้วให้หาพจน์ทั่วไปของลำดับนั้น นักเรียนอาจได้พจน์ทั่วไปที่แตกต่างกัน ดังนั้น หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 หัวข้อ 1.1.1 จึงกล่าวถึงเฉพาะการหาพจน์แรก ๆ จากพจน์ทั่วไปที่กำหนดให้ โดยไม่กล่าวถึงการหาพจน์ทั่วไปจากพจน์แรก ๆ ที่กำหนดให้ ส่วนการหาพจน์ทั่วไปจากพจน์แรก ๆ ที่กำหนดให้นั้น ได้กล่าวถึงเฉพาะในกรณีที่ศึกษาเกี่ยวกับลำดับเลขคณิตหรือลำดับเรขาคณิตเท่านั้น

- ลำดับที่ $a_n = n + (-1)^n n$ ในตัวอย่างที่ 2 สามารถเขียนได้ในอีกรูปแบบหนึ่ง คือ

$$a_n = \begin{cases} 2n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 0 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

ทั้งนี้ ในกรณีที่นักเรียนมีข้อสงสัยสามารถอธิบายได้ดังนี้

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

กรณีที่ n เป็นจำนวนคู่บวก จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก k ที่ทำให้ $n = 2k$

จาก $a_n = n + (-1)^n n$

เมื่อ $n = 2k$ จะได้

$$\begin{aligned} a_n &= a_{2k} \\ &= 2k + (-1)^{2k}(2k) \\ &= 2k + 2k \\ &= 4k \\ &= 2(2k) \\ &= 2n \end{aligned}$$

กรณีที่ n เป็นจำนวนคี่บวก จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก k ที่ทำให้ $n = 2k - 1$

จาก $a_n = n + (-1)^n n$

เมื่อ $n = 2k - 1$ จะได้

$$\begin{aligned} a_n &= a_{2k-1} \\ &= (2k-1) + (-1)^{2k-1}(2k-1) \\ &= (2k-1) - (2k-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a_n = n + (-1)^n n$ เขียนได้ในรูป $a_n = \begin{cases} 2n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 0 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

- ลำดับ b_n ซึ่ง $b_1 = 1$ และ $b_n = nb_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 2$ ในตัวอย่างที่ 4 สามารถเขียนได้ในอีกรูปแบบหนึ่ง คือ $b_n = n!$ ทั้งนี้ ในกรณีที่นักเรียนมีข้อสงสัยสามารถอธิบายได้ดังนี้

  จาก ลำดับ b_n ซึ่ง $b_1 = 1$ และ $b_n = nb_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 2$

  จะได้
$$\begin{aligned}
b_1 &= 1 & &= 1! \\
b_2 &= 2b_1 = 2\times 1 & &= 2! \\
b_3 &= 3b_2 = 3\times 2\times 1 & &= 3! \\
b_4 &= 4b_3 = 4\times 3\times 2\times 1 & &= 4! \\
&\vdots \qquad \vdots & &\vdots \\
b_n &= nb_{n-1} = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1 & &= n!
\end{aligned}$$

  ดังนั้น ลำดับ b_n ซึ่ง $b_1 = 1$ และ $b_n = nb_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 2$ เขียนได้ในรูป $b_n = n!$ นอกจากนี้ การแสดงว่าลำดับ b_n สามารถเขียนได้ในอีกรูปแบบหนึ่ง คือ $b_n = n!$ นั้น สามารถทำได้โดยใช้วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งแสดงไว้ในความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู

ลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต และลำดับฮาร์มอนิก

กิจกรรม : แนะนำลำดับเลขคณิต

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง ลำดับเลขคณิต เพื่อให้นักเรียนเข้าใจความหมายของลำดับเลขคณิต

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูกำหนดลำดับต่อไปนี้

   1) $6, 10, 14, 18, \ldots, 4n+2, \ldots$
   2) $1, 4, 16, 64, \ldots, 4^{n-1}$
   3) $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}, \ldots, \frac{2}{3}n$
   4) $1, -1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots$
   5) $10, 6, 2, -2, \ldots, 10-4(n-1)$
   6) $2, 4, 6, \ldots, -\frac{2}{11}(n^3-6n^2-6), \ldots$

2. จากแต่ละลำดับที่กำหนดให้ในข้อ 1 ครูให้นักเรียนหาผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกัน โดยนำพจน์ที่อยู่หลังลบด้วยพจน์ที่อยู่ก่อนหน้า ทั้งนี้ ครูควรเน้นย้ำให้นักเรียนหาผลต่างของพจน์ที่ n และ $n-1$ ด้วย

แนวคำตอบ

1) $a_2 - a_1 = 10 - 6 = 4$

$a_3 - a_2 = 14 - 10 = 4$

$a_4 - a_3 = 18 - 14 = 4$

และ $a_n - a_{n-1} = (4n+2) - (4(n-1)+2) = 4$

2) $a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$

$a_3 - a_2 = 16 - 4 = 12$

$a_4 - a_3 = 64 - 16 = 48$

และ $a_n - a_{n-1} = 4^{n-1} - 4^{(n-1)-1} = 3(4^{n-2})$

3) $a_2 - a_1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

$a_3 - a_2 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

$a_4 - a_3 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$

และ $a_n - a_{n-1} = \frac{2}{3}n - \frac{2}{3}(n-1) = \frac{2}{3}$

4) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$a_3 - a_2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$

$a_4 - a_3 = -1 - 1 = -2$

$a_5 - a_4 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$

และ $a_n - a_{n-1} = (-1)^{n+1} - (-1)^{(n+1)-1} = -2(-1)^n$

5) $a_2 - a_1 = 6 - 10 = -4$

$a_3 - a_2 = 2 - 6 = -4$

$a_4 - a_3 = -2 - 2 = -4$

และ $a_n - a_{n-1} = (10 - 4(n-1)) - (10 - 4((n-1)-1)) = -4$

6) $a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2$

$a_3 - a_2 = 6 - 4 = 2$

และ $a_n - a_{n-1} = \left(-\frac{2}{11}\left(n^3 - 6n^2 - 6\right)\right) - \left(-\frac{2}{11}\left((n-1)^3 - 6(n-1)^2 - 6\right)\right)$

$= -\frac{2}{11}\left(3n^2 - 15n + 7\right)$

3. จากคำตอบที่ได้ในข้อ 2 ครูให้นักเรียนพิจารณาว่าลำดับในข้อใดที่มีผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกันเป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน

แนวคำตอบ

ลำดับในข้อ 1, 3 และ 5 มีผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกันเป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน

4. ครูนำเข้าสู่บทนิยามของลำดับเลขคณิต (บทนิยาม 2) โดยจากข้อ 3 จะได้ว่าลำดับในข้อ 1, 3 และ 5 ซึ่งมีผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกันเป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน เป็นลำดับเลขคณิต ทั้งนี้ครูควรเน้นย้ำความสำคัญของการตรวจสอบผลต่างของพจน์ที่ n และพจน์ที่ $n-1$ ในการพิจารณาว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับเลขคณิตหรือไม่ เนื่องจาก อาจมีบางลำดับซึ่งผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกันพจน์แรก ๆ เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน แต่ไม่เท่ากับผลต่างของพจน์ที่ n และ $n-1$ (เช่น ลำดับในข้อที่ 6)

หมายเหตุ

- ครูอาจให้นักเรียนทำกิจกรรมนี้เป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 – 4 คน
- ครูสามารถใช้กิจกรรมในลักษณะเดียวกับกิจกรรมนี้ เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง ลำดับเรขาคณิต เพื่อให้นักเรียนเข้าใจความหมายของลำดับเรขาคณิต

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ลำดับที่มีทุกพจน์เป็นจำนวนเดียวกันที่ไม่เป็นศูนย์ จะเป็นทั้งลำดับเลขคณิตที่มี $d=0$ และลำดับเรขาคณิตที่มี $r=1$ เช่น $1, 1, 1, \ldots$
- ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนให้เหตุผลประกอบ ในการระบุว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับเลขคณิต หรือเป็นลำดับเรขาคณิต
- ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณช่วยในการคำนวณเกี่ยวกับลำดับ เช่น ตัวอย่างที่ 14 และ 18
- จากบทนิยาม 4 จะเห็นว่า ไม่มีพจน์ใดของลำดับฮาร์มอนิกที่เป็น 0

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

- การหาพจน์ที่หายไปของลำดับเรขาคณิตที่กำหนดให้ในแบบฝึกหัด 1.1.3 ข้อ 10 ครูควรเน้นย้ำให้นักเรียนหาอัตราส่วนร่วมก่อน จึงจะหาพจน์ที่หายไป และสำหรับข้อที่มีอัตราส่วนร่วมมากกว่า 1 ค่า ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนหาอัตราส่วนร่วมอื่น ๆ ที่ทำให้ลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับเรขาคณิต แล้วจึงหาพจน์ที่หายไปอีกครั้ง เช่น ข้อ 2) มีอัตราส่วนร่วม คือ $\frac{1}{3}$ หรือ $-\frac{1}{3}$ ทำให้ลำดับเรขาคณิตในข้อนี้ คือ $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}$ หรือ $2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{27}, \frac{2}{81}$
- เมื่อกำหนดให้ a เป็นพจน์ที่อยู่ระหว่าง 2 พจน์ที่กำหนดให้ในแบบฝึกหัด 1.1.3 ข้อ 11 จะได้ว่า a เป็นได้ทั้งจำนวนจริงบวกและจำนวนจริงลบ เนื่องจาก a^2 เป็นจำนวนจริงบวก

ลิมิตของลำดับอนันต์

กิจกรรม : แนะนำลิมิตของลำดับอนันต์

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง ลิมิตของลำดับอนันต์ เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับลิมิตของลำดับอนันต์

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแจกกระดาษที่ตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีลักษณะดังรูปให้นักเรียนแต่ละคน โดยกำหนดให้กระดาษนี้มีพื้นที่เป็น 1 ตารางหน่วย

2. ครูให้นักเรียนพับครึ่งกระดาษในข้อ 1 ตามแนวนอนไปเรื่อย ๆ จนได้เป็น 2, 4, 8 และ 16 ส่วน ที่เท่ากันตามลำดับ โดยในการพับแต่ละครั้ง ให้พิจารณาว่าพื้นที่ของกระดาษแต่ละส่วนเป็นเท่าใด แล้วเติมคำตอบลงในตารางต่อไปนี้

การพับกระดาษครั้งที่	จำนวนส่วนของกระดาษที่เกิดจากการพับ	พื้นที่ของกระดาษแต่ละส่วน (ตารางหน่วย)
1	2	
2	4	
3	8	
4	16	

แนวคำตอบ

การพับกระดาษครั้งที่	จำนวนส่วนของกระดาษที่เกิดจากการพับ	พื้นที่ของกระดาษแต่ละส่วน (ตารางหน่วย)
1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$
3	8	$\frac{1}{8}$
4	16	$\frac{1}{16}$

3. จากข้อ 2 ครูให้นักเรียนพิจารณาว่า หากพับกระดาษต่อไปเรื่อย ๆ พื้นที่ของกระดาษแต่ละส่วนจะเป็นอย่างไร

แนวคำตอบ

เมื่อพับกระดาษต่อไปเรื่อย ๆ พื้นที่ของกระดาษแต่ละส่วนจะน้อยลงเรื่อย ๆ จนเกือบเป็น 0

4. ครูให้นักเรียนเปิดเว็บไซต์ ipst.me/11545 แล้วปฏิบัติตามขั้นตอนและตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 เลื่อนสไลเดอร์เพื่อปรับค่า n สังเกตว่าหน้าจอจะปรากฏพื้นที่ของกระดาษแต่ละส่วนที่ได้จากการพับกระดาษ n ครั้ง

4.2 ตรวจสอบคำตอบในข้อ 3 โดยเลื่อนสไลเดอร์เพื่อหาว่า เมื่อ n มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ พื้นที่ของกระดาษแต่ละส่วนที่ได้จากการพับกระดาษ n ครั้ง จะเป็นอย่างไร

แนวคำตอบ

เมื่อ n มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ พื้นที่ของกระดาษแต่ละส่วนที่ได้จากการพับแต่ละครั้งจะน้อยลงเรื่อย ๆ จนเกือบเป็น 0 แต่ไม่เท่ากับ 0

5. ครูนำเข้าสู่บทนิยามเกี่ยวกับลิมิตของลำดับอนันต์ ลำดับลู่เข้า และลำดับลู่ออก (บทนิยาม 5)

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ในการสอนเกี่ยวกับลำดับลู่เข้าและลำดับลู่ออก ครูควรจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้ลงมือเขียนกราฟของลำดับหลาย ๆ แบบ โดยอาจใช้ลำดับตามที่นำเสนอในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 หรือในรูปแบบที่ใกล้เคียงกัน
- การเขียนกราฟเพื่อพิจารณาลิมิตของลำดับอนันต์ ไม่มีข้อกำหนดที่แน่นอนว่าต้องเขียนกราฟของลำดับกี่พจน์ แต่ต้องเขียนให้เห็นแนวโน้มของกราฟ เพื่อให้ได้ข้อสรุปว่าลำดับอนันต์ที่กำหนดเป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก
- ทฤษฎีบทที่นำเสนอไว้ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 บทที่ 1 ลำดับและอนุกรม มีไว้เพื่อให้นักเรียนนำไปใช้ได้โดยไม่ต้องพิสูจน์ อย่างไรก็ตาม ครูอาจเพิ่มเติมการพิสูจน์ทฤษฎีบทเหล่านี้ให้นักเรียนได้โดยพิจารณาตามความสามารถของนักเรียน
- การสอนทฤษฎีบท 1 และ 2 นั้น ครูควรให้นักเรียนพิจารณาแนวโน้มค่าของ a_n เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด หรือเขียนกราฟของลำดับ แล้วพิจารณาแนวโน้มของกราฟ เช่น
  - ให้นักเรียนพิจารณาลำดับที่ $a_n = \frac{1}{n^2}$ (ดังแสดงในตัวอย่างที่ 21 ข้อ 1) และ $a_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ เพื่อนำไปสู่ทฤษฎีบท 1 ที่ว่า $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^r} = 0$ เมื่อ r เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ ทั้งนี้ นักเรียนควรสรุปได้ว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด n^2 และ $n^{\frac{1}{2}}$ จะมากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดด้วย ซึ่งทำให้ $\frac{1}{n^2}$ และ $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ มีค่าน้อยลงและเข้าใกล้ 0
  - ให้นักเรียนพิจารณาลำดับ $a_n = n^3$ (ดังแสดงในตัวอย่างที่ 21 ข้อ 2) และ $a_n = n^{\frac{1}{3}}$ เพื่อนำไปสู่ทฤษฎีบท 1 ที่ว่า $\lim_{n\to\infty} n^r$ ไม่มีค่า เมื่อ r เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ ทั้งนี้ นักเรียนควรสรุปได้ว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด n^3 และ $n^{\frac{1}{3}}$ จะมากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดด้วย

- ให้นักเรียนพิจารณาลำดับ $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ และ $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (ดังแสดงในตัวอย่างที่ 22 ข้อ 1) เพื่อนำไปสู่ทฤษฎีบท 2 ที่ว่า $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ เมื่อ r เป็นจำนวนจริง และ $|r|<1$
- ให้นักเรียนพิจารณาลำดับ $a_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n$ และ $a_n = 2^n$ (ดังแสดงในตัวอย่างที่ 22 ข้อ 2 และ 3 ตามลำดับ) เพื่อนำไปสู่ทฤษฎีบท 2 ที่ว่า $\lim_{n\to\infty} r^n$ ไม่มีค่า เมื่อ r เป็นจำนวนจริง และ $|r|>1$

- ทฤษฎีบท 2 อธิบายเกี่ยวกับลิมิตของลำดับอนันต์ที่อยู่ในรูป r^n เมื่อ r เป็นจำนวนจริง และ $r \neq 1$ แต่ในกรณีที่ $r=1$ จะได้เป็นลิมิตของค่าคงที่
- เมื่อนักเรียนได้เรียนทฤษฎีบท 2 แล้ว ครูอาจแสดงให้นักเรียนเห็นว่าการหาค่าลิมิตของลำดับในตัวอย่างที่ 22 สอดคล้องกับทฤษฎีบท 2 ดังนี้

1) จาก $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ จะได้ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

เนื่องจาก $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ ซึ่ง $\frac{1}{2}<1$

โดยทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2) จาก $a_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n$ จะได้ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{5}{4}\right)^n$

เนื่องจาก $\left|-\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{4}$ ซึ่ง $\frac{5}{4}>1$

โดยทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n$ ไม่มีค่า

3) จาก $a_n = 2^n$ จะได้ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^n$

เนื่องจาก $|2| = 2$ ซึ่ง $2>1$

โดยทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n$ ไม่มีค่า

- การหาลิมิตของลำดับโดยใช้ทฤษฎีบท 3 ต้องมีเงื่อนไขเบื้องต้นที่เป็นจริงก่อน เช่น จะใช้ทฤษฎีบท $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$ ได้เมื่อ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ และ $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ หาค่าได้ และ $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$ แต่ถ้ามีเงื่อนไขเบื้องต้นเงื่อนไขใดไม่เป็นจริง จะไม่สามารถใช้ทฤษฎีบทดังกล่าวได้ เช่น เมื่อต้องการหา $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n}{4n-5}$ จะไม่สามารถใช้ทฤษฎีบท 3 ได้ เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n^2-3n\right)$ และ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4n-5\right)$ ไม่มีค่า

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

นักเรียนอาจเข้าใจผิดเกี่ยวกับลำดับลู่เข้า ว่าเป็นลำดับอนันต์ที่มีลิมิตของลำดับเป็น 0 เท่านั้น เพื่อแก้ไขความเข้าใจผิดดังกล่าว ครูควรเน้นย้ำนักเรียนเกี่ยวกับบทนิยาม 5 ว่า ลำดับลู่เข้า คือ ลำดับอนันต์ที่เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว a_n เข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น พร้อมกับยกตัวอย่างลำดับลู่เข้าอื่น ๆ เพิ่มเติม ที่มีลิมิตของลำดับเป็นจำนวนจริงอื่นที่ไม่ใช่ 0 เพิ่มเติม เช่น สำหรับลำดับที่ $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\lim_{n\to\infty}1\\ &= 0-1\\ &= -1\end{aligned}$$

จะเห็นว่า ลิมิตของลำดับที่ $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-1$ เป็น -1 นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า

อนุกรม

กิจกรรม : ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อสอนนักเรียนเกี่ยวกับที่มาของสูตรที่ใช้ในการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

แนวทางการดำเนินกิจกรรมแบ่งเป็น 3 ส่วน ดังนี้

ส่วนที่ 1 การแนะนำกลวิธี

1. ครูกระตุ้นความสนใจของนักเรียนโดยถามนักเรียนว่า $1+2+3+\cdots+10$ มีค่าเท่าใด และหาได้อย่างไร
2. ครูอธิบายวิธีการพิสูจน์แบบใช้รูปภาพเป็นหลัก (Proof without word) ในการหาค่าของ $1+2+3+\cdots+10$

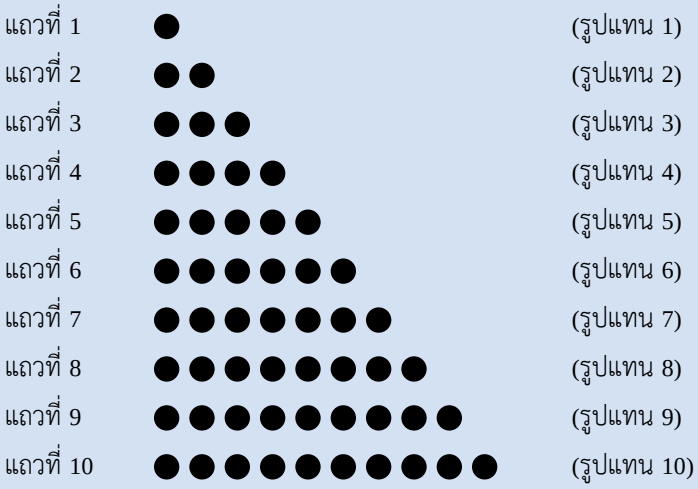
   2.1 ครูแทนจำนวน 1, 2, 3, …, 9 และ 10 ด้วยวงกลมสีดำจำนวน 1, 2, 3, …, 9 และ 10 รูป ตามลำดับ เรียงต่อกันในแนวเส้นตรง ดังนี้

1	แทนด้วย	●	เรียกว่า รูปแทน 1
2	แทนด้วย	●●	เรียกว่า รูปแทน 2
3	แทนด้วย	●●●	เรียกว่า รูปแทน 3
4	แทนด้วย	●●●●	เรียกว่า รูปแทน 4
5	แทนด้วย	●●●●●	เรียกว่า รูปแทน 5
6	แทนด้วย	●●●●●●	เรียกว่า รูปแทน 6
7	แทนด้วย	●●●●●●●	เรียกว่า รูปแทน 7
8	แทนด้วย	●●●●●●●●	เรียกว่า รูปแทน 8
9	แทนด้วย	●●●●●●●●●	เรียกว่า รูปแทน 9
10	แทนด้วย	●●●●●●●●●●	เรียกว่า รูปแทน 10

2.2 ครูให้นักเรียนพิจารณาว่าจะหาค่าของ $1+2+3+\cdots+10$ โดยใช้รูปแทน $1, 2, 3, \ldots, 9$ และ 10 ที่ได้ในข้อ 2.1 ได้อย่างไร

แนวคำตอบ

นักเรียนอาจตอบได้หลายแบบ แต่ครูต้องชี้แนะว่าจะหาคำตอบโดยนำรูปแทน $1, 2, 3, \ldots, 9$ และ 10 มาวางต่อกันดังนี้



รูปที่ 1

จะได้ว่า

- แถวที่ l จะมีวงกลมจำนวน l รูป เมื่อ $l \in \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$
- ค่าของ $1+2+3+\cdots+10$ เท่ากับ จำนวนวงกลมสีดำในรูปที่ 1

2.3 ครูจำลองรูปที่ 1 โดยเปลี่ยนวงกลมสีดำเป็นวงกลมสีขาว โดยเรียกว่ารูปที่ 2 แล้วสอบถามความเข้าใจของนักเรียนว่าจำนวนวงกลมสีขาวในรูปที่ 2 สัมพันธ์กับจำนวนวงกลมสีดำในรูปที่ 1 อย่างไร

แนวคำตอบ

แถวที่ 1 ○
แถวที่ 2 ○○
แถวที่ 3 ○○○
แถวที่ 4 ○○○○
แถวที่ 5 ○○○○○
แถวที่ 6 ○○○○○○
แถวที่ 7 ○○○○○○○
แถวที่ 8 ○○○○○○○○
แถวที่ 9 ○○○○○○○○○
แถวที่ 10 ○○○○○○○○○○

รูปที่ 2

จะเห็นว่า จำนวนวงกลมสีขาวในรูปที่ 2 และจำนวนวงกลมสีดำในรูปที่ 1 มี *จำนวนเท่ากัน*

2.4 ครูหมุนรูปที่ 2 ด้วยมุม 180 องศา ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ได้ดังนี้

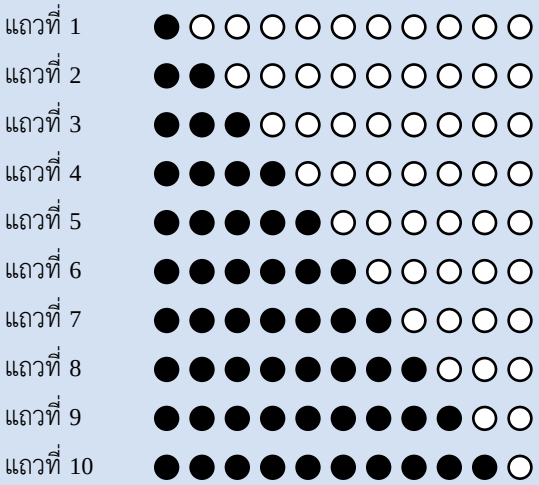
○○○○○○○○○○ แถวที่ 10
○○○○○○○○○ แถวที่ 9
○○○○○○○○ แถวที่ 8
○○○○○○○ แถวที่ 7
○○○○○○ แถวที่ 6
○○○○○ แถวที่ 5
○○○○ แถวที่ 4
○○○ แถวที่ 3
○○ แถวที่ 2
○ แถวที่ 1

รูปที่ 3

2.5 ครูนำรูปที่ 1 และ 3 มาต่อกัน โดยนำแถวที่ 1 ในรูปที่ 1 มาต่อกับแถวที่ 10 ในรูปที่ 3 ในแนวเส้นตรงเดียวกัน โดยเรียกว่ารูปที่ 4 แล้วสอบถามความเข้าใจของนักเรียนว่าในรูปที่ 4 มีแถวใดหรือไม่

- ที่มีวงกลมซ้อนทับกัน
- ที่มีวงกลมไม่เรียงต่อกันในแนวเส้นตรง

แนวคำตอบ



รูปที่ 4

จะได้ว่า

- ไม่มีแถวใดที่มีวงกลมซ้อนทับกัน
- ไม่มีแถวใดที่มีวงกลมไม่เรียงต่อกันในแนวเส้นตรง

หมายเหตุ

ครูควรสรุปว่าการต่อรูปตามที่กำหนดให้ ทำให้ได้รูปที่ต่อกันสนิทพอดี ไม่มีแถวใดที่มีวงกลมซ้อนทับกัน และไม่มีแถวใดที่วงกลมไม่เรียงต่อกันในแนวเส้นตรง

2.6 ครูกระตุ้นให้นักเรียนพิจารณาว่ามีวิธีใดบ้างที่สามารถหาจำนวนวงกลมทั้งหมดในรูปที่ 4 ได้

แนวคำตอบ

(1) พิจารณาจำนวนวงกลมสีดำและสีขาวในแต่ละแถวในรูปที่ 4 ดังนั้นจำนวนวงกลมทั้งหมดในรูปที่ 4 เท่ากับผลบวกของจำนวนวงกลมสีดำและสีขาวในแต่ละแถวในรูปที่ 4

(2) เนื่องจากจำนวนวงกลมสีขาวในรูปที่ 3 เท่ากับจำนวนวงกลมสีดำในรูปที่ 1 และจำนวนวงกลมทั้งหมดในรูปที่ 4 เท่ากับผลบวกของจำนวนวงกลมสีดำและสีขาว ดังนั้น จำนวนวงกลมทั้งหมดในรูปที่ 4 เท่ากับ 2 เท่าของจำนวนวงกลมสีดำในรูปที่ 1

หมายเหตุ ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนได้คำตอบทั้งในข้อ (1) และ (2)

2.7 จากแนวคำตอบ 2.6 (1) ครูให้นักเรียนพิจารณาหาจำนวนวงกลมสีดำและสีขาวในแต่ละแถวในรูปที่ 4

แนวคำตอบ

จำนวนวงกลมทั้งหมดในแถวที่ l หาได้จากจำนวนวงกลมสีดำ (ซึ่งมาจากแถวที่ l ในรูปที่ 1) รวมกับจำนวนวงกลมสีขาว (ซึ่งมาจากแถวที่ $10-(l-1)$ ในรูปที่ 3) เมื่อ $l \in \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ เช่น จำนวนวงกลมทั้งหมดในแถวที่ 1 หาได้จากจำนวนวงกลมสีดำ (ซึ่งมาจากแถวที่ 1 ในรูปที่ 1) รวมกับจำนวนวงกลมสีขาว (ซึ่งมาจากแถวที่ $10-(1-1)$ ในรูปที่ 3) ได้เป็น $1+(10-(1-1))=1+10=11$ รูป

2.8 จากข้อ 2.7 ครูให้นักเรียนหาจำนวนวงกลมทั้งหมดในรูปที่ 4

แนวคำตอบ

จำนวนวงกลมทั้งหมดในรูปที่ 4 $= (1+10)+(2+9)+(3+8)+\cdots+(10+1)$

$= 11+11+11+\cdots+11$

$= 10\times 11$

$= 10(10+1)$ รูป

2.9 จากแนวคำตอบ 2.6 (2) และข้อ 2.8 ครูให้นักเรียนหาจำนวนวงกลมสีดำในรูปที่ 1

แนวคำตอบ

จำนวนวงกลมสีดำในรูปที่ 1 เท่ากับ $\frac{10(10+1)}{2}$ รูป

3. จากข้อ 2 ครูสรุปว่า $1+2+3+\cdots+10=\frac{10(10+1)}{2}$

ส่วนที่ 2 การลงมือใช้กลวิธี

1. ครูแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 – 4 คน แบบคละความสามารถ
2. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มใช้วิธีในส่วนที่ 1 ข้อ 2 แต่ละกลุ่มหา
   - $1+2+3+\cdots+18+19+20$
   - $1+2+3+\cdots+24+25+26$
   - $1+2+3+\cdots+37+38+39$
   - $1+2+3+\cdots+48+49+50$
   - $1+2+3+\cdots+60+61+62$

แนวคำตอบ

เมื่อใช้วิธีในส่วนที่ 1 ข้อ 2 แล้ว จะได้ว่าคำตอบของแต่ละข้อเป็นดังนี้

- $1+2+3+\cdots+18+19+20=\frac{20(20+1)}{2}=210$
- $1+2+3+\cdots+24+25+26=\frac{26(26+1)}{2}=351$
- $1+2+3+\cdots+37+38+39=\frac{39(39+1)}{2}=780$
- $1+2+3+\cdots+48+49+50=\frac{50(50+1)}{2}=1,275$
- $1+2+3+\cdots+60+61+62=\frac{62(62+1)}{2}=1,953$

3. ครูให้นักเรียนพิจารณาว่าค่า $1+2+3+\cdots+n$ เป็นเท่าใด
4. ครูให้นักเรียนดูคลิปวีดิทัศน์ในเว็บไซต์ ipst.me/11561
5. ครูสรุปว่า $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

ส่วนที่ 3 การหาข้อสรุปในกรณีของลำดับเลขคณิต

1. ครูกำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรก คือ a_1 และผลต่างร่วม คือ d แล้วให้นักเรียนเขียน a_2, a_3 และ a_n ในรูป a_1 และ d

   แนวคำตอบ

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + 2d$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

2. จากข้อ 1 ครูให้นักเรียนหาค่าของ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ หรือหาค่าของผลบวก n พจน์แรกที่ได้จากลำดับเลขคณิต $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ในรูปของ n, a_1 และ a_n

   แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &= \underbrace{a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d)}_{n \text{ พจน์}} \\
&= na_1 + (d + 2d + 3d + \cdots + (n-1)d) && (*) \\
&= na_1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1))d && (**) \\
&= na_1 + \frac{(n-1)n}{2}d && \mathbf{(***)} \\
&= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\
&= \frac{n}{2}(a_1 + (a_1 + (n-1)d)) \\
&= \frac{n}{2}(a_1 + a_n)
\end{aligned}$$

หมายเหตุ

- การเขียนบรรทัดที่ (*) ให้อยู่ในรูปตามบรรทัดที่ (**) ครูอาจแนะนำให้นักเรียนใช้สมบัติการแจกแจง ซึ่งจะเห็นว่าบรรทัดที่ (*) มีตัวคูณร่วม คือ d
- การเขียนบรรทัดที่ (**) ให้อยู่ในรูปตามบรรทัดที่ (***) ครูอาจแนะนำให้นักเรียนใช้ $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ซึ่งได้จากส่วนที่ 2

3. จากข้อ 2 ครูอธิบายว่าจะแทน $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ ด้วยสัญลักษณ์ S_n จึงสรุปได้ว่า
   - S_n ในรูป n, a_1 และ a_n เขียนได้เป็น $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
   - S_n ในรูป n, a_1 และ d เขียนได้เป็น $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต โดยใช้ $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ เมื่อ $r \neq 1$ นั้น อาจจัดรูปใหม่ได้เป็น $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$
- ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณช่วยในการคำนวณเกี่ยวกับอนุกรม

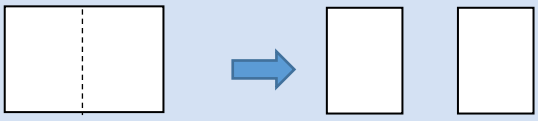
กิจกรรม : อนุกรมอนันต์และผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมอนันต์

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อสอน เรื่อง อนุกรมอนันต์และผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมอนันต์

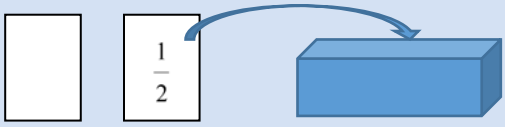
แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแจกกระดาษขนาด A4 ให้นักเรียนแต่ละคน จากนั้นครูกำหนดให้พื้นที่ทั้งหมดของกระดาษ เป็น 1 ตารางหน่วย
2. ครูให้นักเรียนพับครึ่งตามรูปแล้วตัดกระดาษตามรอยพับออกเป็น 2 ส่วน



ส่วนที่ 1 ส่วนที่ 2

3. ครูให้นักเรียนหาพื้นที่ของกระดาษแต่ละส่วนที่ได้จากการตัด และเขียนคำตอบที่ได้ลงในกระดาษส่วนที่ 2 แล้วนำกระดาษส่วนนี้ใส่ไว้ในกล่อง



ส่วนที่ 1 ส่วนที่ 2

4. นำกระดาษส่วนที่ 1 มาทำซ้ำตามขั้นตอนในข้อที่ 2 และ 3 อีก 4 ครั้ง

หมายเหตุ กระดาษที่ได้จากการตัดกระดาษครั้งที่ 2, 3, 4 และ 5 ที่ต้องนำไปใส่ไว้ในกล่อง มีพื้นที่ $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ และ $\frac{1}{32}$ ตารางหน่วย ตามลำดับ

5. ครูให้นักเรียนหาว่าพื้นที่ของกระดาษส่วนที่นำไปใส่ในกล่องหลังจากการตัดครั้งที่ n เท่ากับเท่าใด

แนวคำตอบ

$\frac{1}{2^n}$ ตารางหน่วย

หมายเหตุ ครูอาจชี้แนะให้นักเรียนพิจารณาจากพื้นที่ของกระดาษส่วนที่นำไปใส่ในกล่องหลังจากการตัดครั้งที่ 1, 2, 3, 4 และ 5 ซึ่งนักเรียนจะเห็นว่า

หลังจากการตัดครั้งที่	พื้นที่ของกระดาษส่วนที่นำไปใส่กล่อง (ตารางหน่วย)
1	$\frac{1}{2}=\frac{1}{2^1}$
2	$\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$
3	$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$
4	$\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$
5	$\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}$

6. ครูให้นักเรียนพิจารณาว่า ถ้าการตัดกระดาษในรูปแบบนี้สามารถดำเนินการต่อไปได้เรื่อย ๆ แล้วให้นักเรียนเขียนแสดงพื้นที่ของกระดาษส่วนที่นำไปใส่ในกล่องหลังจากการตัด โดยเรียงตามลำดับการตัด

แนวคำตอบ

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

หมายเหตุ ในการตอบคำถามข้อนี้ ครูควรเน้นย้ำให้นักเรียนเขียนพจน์ที่ n กำกับไว้เสมอ เนื่องจากมีบางลำดับที่มีพจน์แรก ๆ เหมือนกัน แต่มีพจน์ทั่วไปแตกต่างกัน

7. ครูสรุปว่า คำตอบที่ได้ในข้อ 6 เป็นลำดับอนันต์

8. ครูให้นักเรียนเติมข้อมูลลงในตารางต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

หลังจากการตัดครั้งที่	พื้นที่รวมของกระดาษที่อยู่ในกล่อง (ตารางหน่วย)
1	
2	
3	
4	
5	

แนวคำตอบ

หลังจากการตัดครั้งที่	พื้นที่รวมของกระดาษที่อยู่ในกล่อง (ตารางหน่วย)
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$
4	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$
5	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$

9. ครูให้นักเรียนหาพื้นที่รวมของกระดาษที่อยู่ในกล่องหลังจากการตัดครั้งที่ n

แนวคำตอบ

พื้นที่รวมของกระดาษที่อยู่ในกล่องหลังจากการตัดครั้งที่ n เท่ากับ

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$ ตารางหน่วย

หมายเหตุ ในการหาคำตอบของข้อนี้ ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนเขียนพื้นที่รวมของกระดาษที่อยู่ในกล่องหลังจากการตัดครั้งที่ n ให้อยู่ในรูป $\frac{2^n-1}{2^n}$ ได้ โดยอาจพิจารณาจากแบบรูปของพื้นที่รวมของกระดาษที่อยู่ในกล่องที่ได้ในข้อ 8 หรือความรู้อื่นก่อนหน้านี้

สำหรับ $1-\frac{1}{2^n}$ มาจากการพิจารณาพื้นที่กระดาษทั้งหมดลบด้วยพื้นที่กระดาษส่วนที่ 1 หลังจากการตัดครั้งที่ n

10. จากข้อ 9 ครูให้นักเรียนพิจารณาหาพื้นที่รวมของกระดาษที่อยู่ในกล่องเมื่อสามารถดำเนินการตัดกระดาษตามรูปแบบข้างต้นต่อไปเรื่อย ๆ ได้ โดยเขียนในรูปผลบวก

แนวคำตอบ

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

11. ครูสรุปว่า

- คำตอบที่ได้ในข้อ 10 ซึ่งคือ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ เรียกว่า อนุกรมอนันต์
- คำตอบที่ได้ในข้อ 9 ซึ่งคือพื้นที่รวมของกระดาษที่อยู่ในกล่องหลังจากการตัดครั้งที่ n เรียกว่า ผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมอนันต์ แทนด้วยสัญลักษณ์ S_n นั่นคือ

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

- คำตอบที่ได้ในข้อ 8 จะได้ว่า พื้นที่รวมของกระดาษที่อยู่ในกล่องหลังจากการตัดครั้งที่ 1 คือ S_1 ซึ่งเท่ากับ $\frac{1}{2}$ ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

$$S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

12. ครูอธิบายสรุปเกี่ยวกับอนุกรมอนันต์และบทนิยาม 6

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 การพิจารณาว่าอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก จะทำได้จากการพิจารณาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม เช่น การพิจารณาอนุกรม $1+1+1+\cdots+1^{n-1}+\cdots$ ทำได้ดังนี้

จากสูตร $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

จะได้ $S_n = \frac{n}{2}(1+1) = n$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n$

จากทฤษฎีบท 1 จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} n$ ไม่มีค่า

ดังนั้น อนุกรม $1+1+1+\cdots+1^{n-1}+\cdots$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

นักเรียนอาจเข้าใจผิดว่า “ทุกอนุกรมอนันต์ที่เป็นอนุกรมเลขคณิตเป็นอนุกรมลู่ออก” ทั้งนี้ ครูควรยกตัวอย่างอนุกรมอนันต์ที่เป็นอนุกรมเลขคณิต แต่เป็นอนุกรมลู่เข้า เช่น อนุกรมเลขคณิตที่มี $a_1 = 0, d = 0$ จะได้ว่า $S_n = 0$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

จากแบบฝึกหัด 1.3.3 ข้อ 1

- ในการสรุปว่าอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเลขคณิตหรืออนุกรมเรขาคณิตนั้น ครูควรเน้นย้ำให้นักเรียนตรวจสอบว่าพจน์ที่ n ในอนุกรมที่กำหนดให้ เป็นพจน์ที่ n ของอนุกรมเลขคณิตหรืออนุกรมเรขาคณิตจริง เช่น จากข้อ 4) จะได้ว่าเป็นอนุกรมเลขคณิตที่มี $a_1 = 2$ และ $d = -3$ จะเห็นว่าพจน์ที่ n ของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ $2 + (n-1)(-3) = 5 - 3n$ ซึ่งเท่ากับพจน์ที่ n ในอนุกรมที่โจทย์กำหนด
- ในการหาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมที่กำหนดให้ ครูอาจให้นักเรียนเปรียบเทียบ S_1, S_2 และ S_3 ที่หาได้จากผลบวก 1, 2 และ 3 พจน์แรกของอนุกรมที่กำหนด กับที่หาได้จากสูตรการหาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรม

สัญลักษณ์แสดงการบวก

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ครูอาจแนะนำสัญลักษณ์ $\sum$ ไปพร้อมกับการสอน เรื่อง อนุกรมอนันต์ ได้เลย หากพิจารณาแล้วว่าสอดคล้องกับแนวทางการจัดการเรียนรู้ที่ปฏิบัติอยู่
- การเขียนแสดงการบวกด้วยสัญลักษณ์ $\sum$ อาจเขียนได้หลายรูปแบบ โดยดัชนีไม่จำเป็นต้องเริ่มจาก 1 เช่น ในตัวอย่างที่ 51 นอกจากเขียนแสดง $2x+4x^2+6x^3+8x^4+10x^5$ ได้เป็น $\sum_{i=1}^{5} 2ix^i$ แล้ว อาจเขียนได้เป็นแบบอื่นที่ดัชนีไม่เริ่มจาก 1 เช่น $\sum_{i=2}^{6} 2(i-1)x^{i-1}$ หรือ $\sum_{i=3}^{7} 2(i-2)x^{i-2}$
- การจัดรูป $\dfrac{4}{(4i-3)(4i+1)}$ ในตัวอย่างที่ 60 ทำได้ดังนี้

  ให้ $\dfrac{4}{(4i-3)(4i+1)}=\dfrac{A}{4i-3}+\dfrac{B}{4i+1}$ นั่นคือ $4=A(4i+1)+B(4i-3)$

  เมื่อ $i=\dfrac{3}{4}$ จะได้ $A=1$

  เมื่อ $i=-\dfrac{1}{4}$ จะได้ $B=-1$

  ดังนั้น $\dfrac{4}{(4i-3)(4i+1)}=\dfrac{1}{4i-3}-\dfrac{1}{4i+1}$

  เรียกการจัดรูปโดยวิธีนี้ว่าการแยกเศษส่วนย่อย (Partial fraction decomposition)

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

การหาผลบวก n พจน์แรก และผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรมที่กำหนดให้ในแบบฝึกหัด 1.4 ข้อ 8 นั้น นักเรียนอาจจัดรูปอนุกรมที่กำหนดให้ในทำนองเดียวกับตัวอย่างที่ 60

การประยุกต์ของลำดับและอนุกรม

กิจกรรม : ออมก่อนรวยกว่า

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อให้นักเรียนฝึกแก้ปัญหาเกี่ยวกับเงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n ในสถานการณ์ที่กำหนดให้ โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูจับคู่นักเรียนแบบคละความสามารถ แล้วให้นักเรียนแต่ละคู่อ่านสถานการณ์ต่อไปนี้
   วิภาวีฝากเงิน 10,000 บาท เป็นประจำทุกวันที่ 1 ตุลาคม โดยเริ่มฝากครั้งแรกเมื่อวันที่ 1 ตุลาคม 2550 และธนาคารคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นร้อยละ 2 ในวันที่ 30 กันยายน ของทุกปี
2. จากสถานการณ์ในข้อ 1 ครูให้นักเรียนพิจารณาว่า ณ วันที่ 30 กันยายน 2580 วิภาวีจะมีเงินต้นรวมจากการฝากเงินทั้งหมดเท่าใด

   แนวคำตอบ

   เนื่องจาก วิภาวีเริ่มฝากเงินในวันที่ 1 ตุลาคม 2550 และฝากเป็นประจำทุกปีในวันที่ 1 ตุลาคม จนกระทั่งถึงวันที่ 30 กันยายน 2580
   นั่นคือ วิภาวีฝากเงินงวดสุดท้ายในวันที่ 1 ตุลาคม 2579
   จะได้ว่า วิภาวีจะต้องฝากเงินทั้งหมด 30 งวด
   ดังนั้น จำนวนเงินต้นรวมของวิภาวี คือ $30 \times 10,000 = 300,000$ บาท

3. ครูให้นักเรียนอ่านสถานการณ์ต่อไปนี้

วิภาวรรณเป็นน้องสาวฝาแฝดของวิภาวี วางแผนจะเริ่มฝากเงินจำนวนหนึ่งในวันที่ 1 ตุลาคม 2565 และจะฝากเงินจำนวนดังกล่าวเป็นประจำทุกปี ในวันที่ 1 ตุลาคม โดยธนาคารจะคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นร้อยละ 2 ในวันที่ 30 กันยายน ของทุกปี

4. จากสถานการณ์ในข้อ 3 ครูให้นักเรียนพิจารณาว่าวิภาวรรณต้องฝากเงินปีละเท่าใด จึงจะมีเงินต้นรวม ณ วันที่ 30 กันยายน 2580 เท่ากับเงินต้นรวมของวิภาวีที่ได้ในข้อ 2

แนวคำตอบ

เนื่องจาก วิภาวรรณเริ่มฝากเงินในวันที่ 1 ตุลาคม 2565 และฝากเป็นประจำทุกปี ในวันที่ 1 ตุลาคม จนกระทั่งถึงวันที่ 30 กันยายน 2580

นั่นคือ วิภาวีฝากเงินงวดสุดท้ายในวันที่ 1 ตุลาคม 2579

จะได้ว่า วิภาวีจะต้องฝากเงินทั้งหมด 15 งวด

เนื่องจาก จำนวนเงินต้นรวมของวิภาวี คือ 300,000 บาท

ดังนั้น วิภาวรรณต้องฝากเงินปีละ $300,000 \div 15 = 20,000$ บาท

5. จากข้อ 1 – 4 ครูให้นักเรียนคาดการณ์ว่า ณ วันที่ 30 กันยายน 2580 วิภาวีหรือวิภาวรรณจะมีเงินรวมมากกว่า

แนวคำตอบ

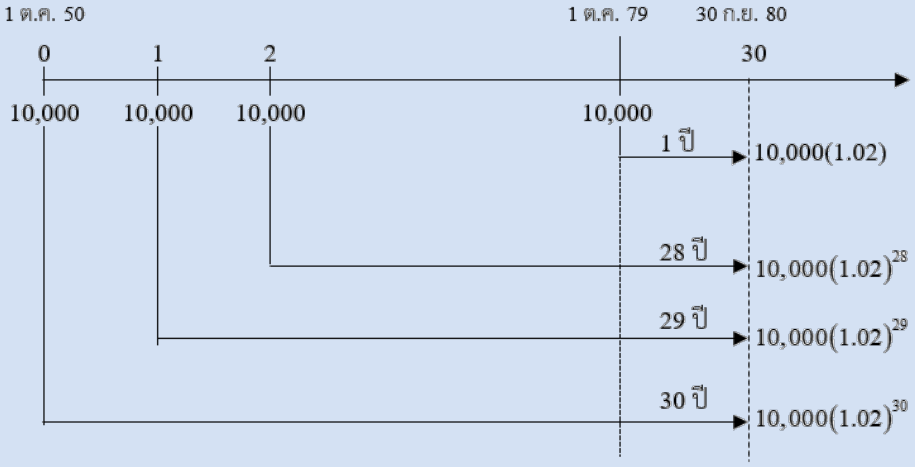
ในข้อนี้นักเรียนอาจยังไม่ได้คำตอบที่ถูกต้อง แต่ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนให้เหตุผลประกอบคำตอบ เช่น

- วิภาวรรณจะมีเงินรวมมากกว่า เนื่องจาก ในแต่ละปีที่วิภาวรรณฝากเงินมากกว่าวิภาวี 2 เท่า
- วิภาวีจะมีเงินรวมมากกว่า เนื่องจาก วิภาวีฝากเงินนานกว่าและเป็นการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้น
- ทั้งสองคนมีเงินรวมเท่ากัน เนื่องจากทั้งสองคนมีเงินต้นเท่ากัน และธนาคารให้ดอกเบี้ยเท่ากัน

6. จากข้อ 1 และ 2 ครูให้นักเรียนหาเงินรวมของวิภาวี ณ วันที่ 30 กันยายน 2580

6.1 เขียนแผนภาพแสดงการฝากเงินของวิภาวี

แนวคำตอบ



6.2 จากข้อ 6.1 จงเขียนอนุกรมแสดงเงินรวมของวิภาวี ณ วันที่ 30 กันยายน 2580 พร้อมทั้งระบุพจน์ที่ 1 และอัตราส่วนร่วมของอนุกรมที่ได้

แนวคำตอบ

อนุกรมแสดงเงินรวมทั้งหมดของวิภาวี ณ วันที่ 30 กันยายน 2580 คือ

$10000(1.02)+10000(1.02)^2+\cdots+10000(1.02)^{30}$

โดยอนุกรมนี้มีพจน์ที่ 1 คือ $10,000(1.02)$ และอัตราส่วนร่วม คือ 1.02

6.3 จากข้อ 6.2 จงหาเงินรวมโดยประมาณของวิภาวี ณ วันที่ 30 กันยายน 2580 โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

แนวคำตอบ

จาก $S_n=\dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

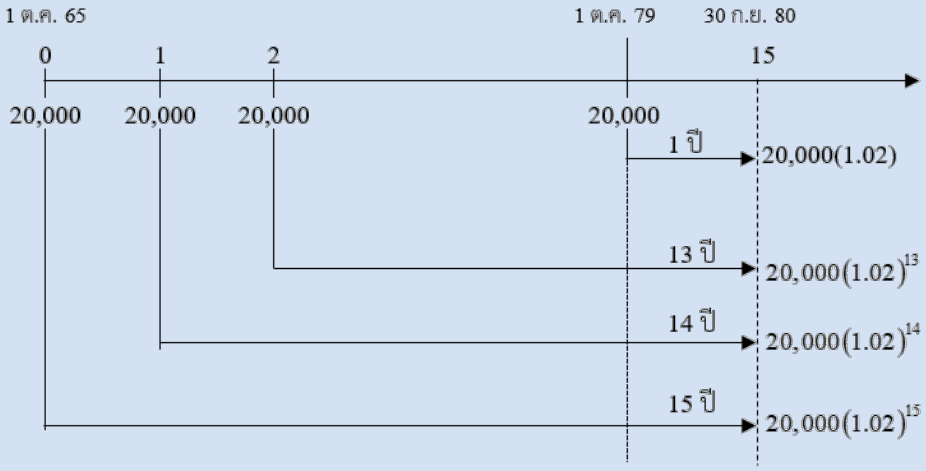
จะได้ $S_{30}=\dfrac{\left(10,000(1.02)\right)\left(1-(1.02)^{30}\right)}{1-1.02}\approx 413,794.41$

ดังนั้น เงินรวมของวิภาวี ณ วันที่ 30 กันยายน 2580 คือ ประมาณ 413,794.41 บาท

7. จากข้อ 3 และ 4 ครูให้นักเรียนหาเงินรวมของวิภาวรรณ ณ วันที่ 30 กันยายน 2580

7.1 เขียนแผนภาพแสดงการฝากเงินของวิภาวรรณ

แนวคำตอบ



7.2 จากข้อ 7.1 จงเขียนอนุกรมแสดงเงินรวมของวิภาวรรณ ณ วันที่ 30 กันยายน 2580 พร้อมทั้งระบุพจน์ที่ 1 และอัตราส่วนร่วมของอนุกรมที่ได้

แนวคำตอบ

อนุกรมแสดงเงินรวมทั้งหมดของวิภาวรรณ ณ วันที่ 30 กันยายน 2580 คือ

$$20000(1.02)+20000(1.02)^2+\cdots+20000(1.02)^{15}$$

โดยอนุกรมนี้มีพจน์ที่ 1 คือ $20,000(1.02)$ และอัตราส่วนร่วม คือ 1.02

7.3 จากข้อ 7.2 จงหาเงินรวมโดยประมาณของวิภาวรรณ ณ วันที่ 30 กันยายน 2580 โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

แนวคำตอบ

จาก $S_n=\dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ $S_{15}=\dfrac{\left(20,000(1.02)\right)\left(1-(1.02)^{15}\right)}{1-1.02}\approx 352,785.71$

ดังนั้น เงินรวมของวิภาวรรณ ณ วันที่ 30 กันยายน 2580 คือ ประมาณ 352,785.71 บาท

8. จากข้อ 6 และ 7 ครูให้นักเรียนพิจารณาว่า วิภาวีหรือวิภาวรรณจะมีเงินมากกว่ากัน ณ วันที่ 30 กันยายน 2580

แนวคำตอบ

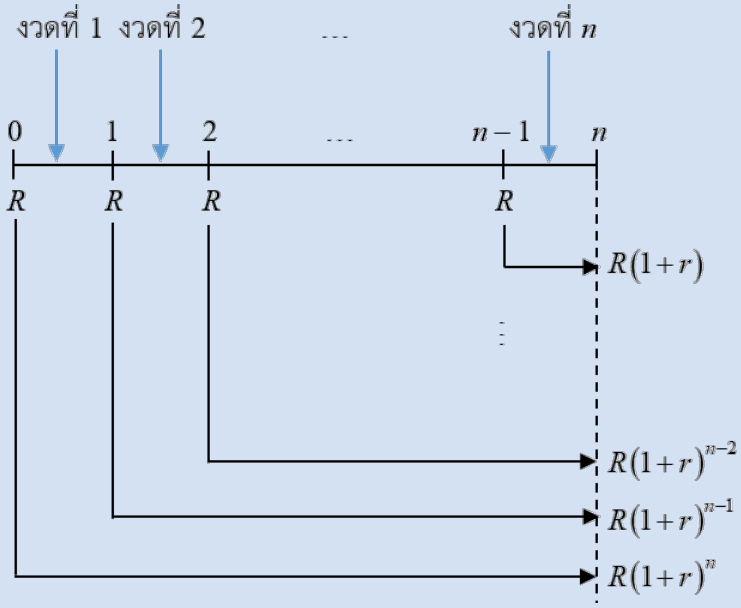
วิภาวีจะมีเงินมากกว่า

9. จากข้อ 6, 7 และ 8 ครูสรุปว่าถึงแม้ว่าวิภาวีและวิภาวรรณมีเงินต้นเท่ากัน และธนาคารให้ดอกเบี้ยเท่ากัน แต่เนื่องจากการให้ดอกเบี้ยของธนาคารเป็นแบบทบต้น และวิภาวีเริ่มต้นฝากเงินในธนาคารก่อนวิภาวรรณ (วิภาวีฝากเงินในธนาคารนานกว่าวิภาวรรณ) จะได้ว่าจำนวนครั้งที่ธนาคารคิดดอกเบี้ยให้กับเงินฝากของวิภาวีมากกว่าวิภาวรรณ จึงส่งผลให้วิภาวีได้ดอกเบี้ยจากธนาคารมากกว่าวิภาวรรณ

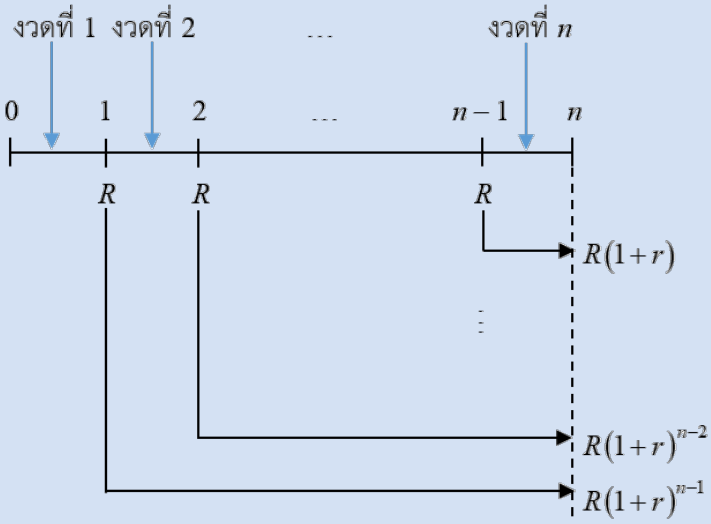
ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณช่วยในการคำนวณเพื่อแก้ปัญหาเกี่ยวกับการประยุกต์ของลำดับและอนุกรม ทั้งนี้ ครูควรเน้นกระบวนการหาคำตอบของนักเรียนมากกว่าคำตอบสุดท้าย ซึ่งคำตอบสุดท้ายของนักเรียนอาจประมาณเป็นจำนวนเต็มหน่วยก็ได้ โดยคำนึงถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ
- การประยุกต์ของลำดับและอนุกรมในบทนี้จะมีตัวอย่างที่เกี่ยวข้องกับการเงิน ซึ่งครูไม่ควรละเลยการสอนเนื้อหาดังกล่าว เนื่องจากเป็นเนื้อหาที่สอดคล้องกับชีวิตจริง ในหัวข้อการประยุกต์ของลำดับและอนุกรม r จะแทนอัตราดอกเบี้ยแบบทบต้นต่อปีซึ่งแตกต่างจาก r ที่เป็นอัตราส่วนร่วมที่กล่าวถึงในหัวข้อลำดับเรขาคณิตหรืออนุกรมเรขาคณิต
- ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนเขียนแผนภาพประกอบการแก้ปัญหาเกี่ยวกับมูลค่าปัจจุบัน มูลค่าอนาคต และค่างวด

- ครูควรเน้นย้ำให้นักเรียนเห็นความสำคัญของการตรวจสอบเงื่อนไขให้ถูกต้องก่อนนำสูตรมาใช้เสมอ เช่น ในการกล่าวถึงดอกเบี้ยทบต้น (ตามทฤษฎีบท 9) มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคตนั้น อัตราดอกเบี้ย $i\%$ จะเป็นอัตราดอกเบี้ยต่อปี แต่ในการกล่าวถึงค่างวดนั้น $i\%$ จะเป็นอัตราดอกเบี้ยต่องวด
- "เมื่อสิ้นปีที่ n" ตามทฤษฎีบท 9 มีความหมายเช่นเดียวกับ "ครบ n ปี" ตามทฤษฎีบท 10
- การกล่าวถึงการรับหรือจ่ายค่างวดในโจทย์ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 ต้องมีข้อมูลครบทั้ง 3 ประการ คือ รับหรือจ่ายเท่ากันทุกงวด รับหรือจ่ายติดต่อกันทุกงวด และรับหรือจ่ายตอนต้นงวดหรือสิ้นงวด
- จากแผนภาพแสดงค่างวดแต่ละงวดที่รับหรือจ่ายตอนต้นงวด จะได้ว่า "งวดที่" อยู่ระหว่างตัวเลขที่อยู่แถวบนสุดของแผนภาพ ดังรูป



และสำหรับแผนภาพแสดงค่างวดแต่ละงวดที่รับหรือจ่ายตอนสิ้นงวด จะได้ว่า “งวดที่” อยู่ระหว่างตัวเลขที่อยู่แถวบนสุดของแผนภาพเช่นเดียวกัน ดังรูป



- ตัวอย่างสถานการณ์ในชีวิตจริงที่เกี่ยวกับค่างวดที่จ่ายหรือรับตอนต้นงวด คือ การฝากเงินในธนาคารแบบประจำ 24 เดือน และที่เกี่ยวกับค่างวดที่จ่ายหรือหรือรับตอนสิ้นงวด คือ การผ่อนค่าบ้าน อย่างไรก็ตาม ครูไม่ควรยกตัวอย่างการผ่อนค่าบ้านให้นักเรียนหาคำตอบ เนื่องจากบ้านมีราคาสูง และต้องใช้เวลาในการผ่อนหลายงวด จึงไม่สะดวกในการเขียนแผนภาพและการหาคำตอบ
- นักเรียนไม่จำเป็นต้องจำสูตรการหาเงินรวมตอนต้นงวดและสิ้นงวด เนื่องจากสามารถคำนวณหาเงินรวมตอนต้นงวดและสิ้นงวดได้จากสูตรการหาผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต
- การหาค่าประมาณของทศนิยมเพื่อตอบคำถามของโจทย์ปัญหาในหัวข้อนี้ ต้องพิจารณาความสอดคล้องกับบริบทที่โจทย์กำหนดด้วย

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

- การหาคำตอบของแบบฝึกหัด 1.5 ข้อ 1 2) ซึ่งต้องมีการแก้สมการ $(1.04)^n = 3$ นั้น อาจใช้ความรู้เกี่ยวกับสมบัติของลอการิทึมในการแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียล ซึ่งทำได้ดังนี้

จาก $(1.04)^n = 3$

จะได้ $n = \log_{1.04} 3$

$$n = \frac{\log 3}{\log 1.04}$$

$$n \approx 28.01$$

ดังนั้น จะต้องฝากเงินครบ 29 ปี จึงจะมีเงินเพิ่มขึ้นอย่างน้อยสามเท่าของเงินต้น นอกจากนี้ นักเรียนอาจใช้การหาค่าประมาณของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งจะสังเกตได้ว่า $(1.04)^{28} \approx 2.9987$ และ $(1.04)^{29} \approx 3.1187$ แต่เนื่องจาก n แทนจำนวนปีที่น้อยที่สุดที่จะทำให้มีเงินเพิ่มขึ้นเป็นอย่างน้อยสามเท่าของเงินต้น ดังนั้น $n = 29$ จึงเป็นคำตอบของโจทย์ปัญหาข้อนี้

- การฝากเงินตามเงื่อนไขในแบบฝึกหัด 1.5 ข้อ 9 นั้น จะต้องพิจารณาเงินที่ฝากเมื่อสิ้นไตรมาสที่ 4 ของปีที่ 4 ด้วย
- การหาพจน์ที่ขาดหายไปของลำดับเลขคณิตหรือลำดับเรขาคณิตที่กำหนดให้ในแบบฝึกหัดท้ายบท ข้อ 16 ต้องตรวจสอบทั้งลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต เนื่องจากบางลำดับเป็นทั้งลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต

1.3 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน

การวัดผลระหว่างเรียนมีจุดมุ่งหมายเพื่อปรับปรุงการเรียนรู้และพัฒนาการเรียนการสอน และตรวจสอบนักเรียนแต่ละคนว่ามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่ครูสอนมากน้อยเพียงใด การให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเป็นแนวทางหนึ่งที่ครูอาจใช้เพื่อประเมินผลด้านความรู้ระหว่างเรียนของนักเรียน ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดที่ครอบคลุมเนื้อหาที่สำคัญของแต่ละบทไว้ สำหรับในบทที่ 1 ลำดับและอนุกรม ครูอาจใช้แบบฝึกหัดเพื่อวัดผลประเมินผลความรู้ในแต่ละเนื้อหาได้ดังนี้

เนื้อหา	แบบฝึกหัด	
การหาพจน์ในลำดับจากพจน์ทั่วไปที่กำหนด	1.1.1	ข้อ 1 – 3
การหาพจน์ในลำดับเลขคณิตและพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต	1.1.2	ข้อ 1 – 14
การประยุกต์ของลำดับเลขคณิต	1.1.2	ข้อ 15 – 16
การหาพจน์ในลำดับเรขาคณิตและพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต	1.1.3	ข้อ 1 – 12
การประยุกต์ของลำดับเรขาคณิต	1.1.3	ข้อ 13 – 14
การหาพจน์ในลำดับฮาร์มอนิกและการประยุกต์ของลำดับฮาร์มอนิก	1.1.4	ข้อ 1 – 3
การใช้กราฟเพื่อตรวจสอบการเป็นลำดับลู่เข้า ลำดับลู่ออก และหาลิมิตของลำดับลู่เข้า	1.2	ข้อ 1
การใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับเพื่อตรวจสอบการเป็นลำดับลู่เข้า ลำดับลู่ออก และหาลิมิตของลำดับลู่เข้า	1.2	ข้อ 2
การประยุกต์ของลิมิตของลำดับอนันต์	1.2	ข้อ 3 – 4
การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต	1.3.1	ข้อ 1 – 4

เนื้อหา	แบบฝึกหัด	
การประยุกต์ของอนุกรมเลขคณิต	1.3.1	ข้อ 5 – 10
การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต	1.3.2	ข้อ 1 – 3
การประยุกต์ของอนุกรมเรขาคณิต	1.3.2	ข้อ 4 – 10
การหาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม	1.3.3	ข้อ 1
การหาผลบวกของอนุกรม	1.3.3	ข้อ 2 – 3
การประยุกต์ของอนุกรมอนันต์	1.3.3	ข้อ 4 – 9
การเขียนสัญลักษณ์แสดงการบวกและการหาผลบวกของอนุกรมที่เขียนอยู่ในรูปสัญลักษณ์แสดงการบวก	1.4	ข้อ 1 – 12
การประยุกต์ของลำดับและอนุกรมเกี่ยวกับดอกเบี้ยและมูลค่าของเงิน	1.5	ข้อ 1 – 11

1.4 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 มีจุดมุ่งหมายว่าเมื่อนักเรียนได้เรียนจบบทที่ 1 ลำดับและอนุกรม แล้วนักเรียนสามารถ

1. หาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต
2. หาลิมิตของลำดับอนันต์โดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต
3. ระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก
4. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต
5. หาผลบวกอนุกรมอนันต์
6. ระบุได้ว่าอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก
7. ใช้ความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมในการแก้ปัญหา

ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดท้ายบทที่ประกอบด้วยโจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียน โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมาย ซึ่งประกอบด้วยโจทย์ฝึกทักษะที่มีความน่าสนใจและโจทย์ท้าทาย ครูอาจเลือกใช้แบบฝึกหัดท้ายบทวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบทเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนมีความสามารถตามจุดมุ่งหมายเมื่อเรียนจบบทเรียนหรือไม่

ทั้งนี้ แบบฝึกหัดท้ายบทแต่ละข้อในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 บทที่ 1 ลำดับและอนุกรม สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียน ดังนี้

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
1. หาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต	1	1) – 4)
	2	
	3	
	4	
	5	
	9	

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
1. หาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต (ต่อ)	10	
	11	
	12	
	13	
	16	1) – 4)
	18	
2. หาลิมิตของลำดับอนันต์โดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต	21	1) – 16)
	22	
3. ระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก	20	1) – 6)
	23	
4. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต	24	
	25	
	26	
	27	
	31	
	32	1) – 3)
	33	
	38	1) – 6)
5. หาผลบวกอนุกรมอนันต์	39	1) – 8)
	40*	
	46	1) – 2)
6. ระบุได้ว่าอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก	40*	

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
7. ใช้ความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมในการแก้ปัญหา	7	
	8	1) – 3)
	14	
	15	1) – 2)
	19	
	28	1) – 2)
	29	1) – 6)
	30	
	34	
	35	1) – 3)
	36	1) – 4)
	41	
	42	
	43	
	44	
	47	1) – 3)
	48	
	49	
	50	
	51	
	52	
	53	
	54	
	55	

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
7. ใช้ความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมในการแก้ปัญหา (ต่อ)	56	
	57	
	59	
	60	
ปัญหาท้าทาย	6	
	17	
	37	1) – 3)
	45	
	46	3)
	58	

หมายเหตุ

แบบฝึกหัดท้ายบทข้อ 40 สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียนมากกว่า 1 จุดมุ่งหมาย

1.5 ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู

ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครูที่จะกล่าวถึงในคู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 บทที่ 1 ลำดับและอนุกรม คือ การพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลำดับและอนุกรมที่กล่าวถึงแต่ไม่ได้แสดงการพิสูจน์ไว้ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 โดยจะแยกการนำเสนอเป็น 2 ส่วน ได้แก่

ส่วนที่ 1 ทฤษฎีบท บทนิยาม และบทแทรกที่ใช้ในการพิสูจน์

ส่วนที่ 2 แนวทางการพิสูจน์ทฤษฎีบทในหนังสือเรียน

โดยมีรายละเอียดในแต่ละส่วนเป็นดังนี้

ส่วนที่ 1 ทฤษฎีบท บทนิยาม และบทแทรกที่ใช้ในการพิสูจน์

- **ทฤษฎีบท i (อสมการแบร์นูลลี : Bernoulli's Inequality)**

  สำหรับทุกจำนวนจริง x ที่ $x > -1$ จะได้ว่า $(1+x)^n \geq 1+nx$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

- **ทฤษฎีบท ii (สมบัติอาร์คิมีดิส : Archimedean Property)**

  1. สำหรับทุกจำนวนจริงบวก x จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่ $x < n$
  2. สำหรับทุกจำนวนจริงบวก x จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่ $\frac{1}{n} < x$

- **ทฤษฎีบท iii**

  ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

  1. $|a-b| = |b-a|$
  2. $|a+b| \leq |a|+|b|$ (อสมการสามเหลี่ยม : Triangle Inequality)
  3. $|a-b| \leq |a|+|b|$
  4. $|a|-|b| \leq |a-b|$

- **บทนิยาม iv**

  ให้ x_n เป็นลำดับของจำนวนจริง จะกล่าวว่าลำดับ x_n ลู่เข้าสู่จำนวนจริง x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ถ้าสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|x_n - x| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq N$

- **บทนิยาม v**

  ลำดับ x_n เป็นลำดับที่**มีขอบเขต (bounded)** ถ้ามี $M > 0$ ที่ $|x_n| \leq M$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

- **บทแทรก vi**

  ลำดับ x_n เป็นลำดับที่**ไม่มีขอบเขต (unbounded)** เมื่อสำหรับทุก $M > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่ $|x_n| > M$

- **ทฤษฎีบท vii**

  ทุกลำดับลู่เข้าเป็นลำดับที่มีขอบเขต

- **บทแทรก viii**

  ทุกลำดับที่ไม่มีขอบเขตเป็นลำดับลู่ออก

- **ทฤษฎีบท ix**

  ให้ $A \subset \mathbb{R}$ $f : A \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ลำดับ x_n เป็นลำดับบน A และ $x \in A$ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = f(x)$

- **ทฤษฎีบท x (หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ : Principal of Mathematical Induction)**

  ให้ $P(n)$ แทนประโยคเปิดที่มีเอกภพสัมพัทธ์คือจำนวนเต็มบวก สมมติว่า

  1. $P(1)$ เป็นจริง
  2. สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก k ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย

  จะสรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ส่วนที่ 2 แนวทางการพิสูจน์ทฤษฎีบทในหนังสือเรียน

- **ทฤษฎีบท 1**

  ให้ r เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

  1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^r}=0$
  2. $\lim\limits_{n\to\infty} n^r$ ไม่มีค่า

  พิสูจน์

  1. จะแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^r}=0$ เมื่อ r เป็นจำนวนจริงบวก

     ให้ r เป็นจำนวนจริงบวก และ $\varepsilon>0$

     จะได้ว่า $\varepsilon^{\frac{1}{r}}>0$

     โดยสมบัติอาร์คิมีดิส จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก N ที่ $\frac{1}{N}<\varepsilon^{\frac{1}{r}}$

     ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ที่ $n\geq N$

     $$\left|\frac{1}{n^r}-0\right| = \left(\frac{1}{n}\right)^r \leq \left(\frac{1}{N}\right)^r < \varepsilon$$

     นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^r}=0$

  2. จะแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} n^r$ ไม่มีค่า โดยแสดงว่า ลำดับ n^r เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต

     ให้ r เป็นจำนวนจริงบวก และ $M>0$

     จะได้ว่า $M^{\frac{1}{r}}>0$

     โดยสมบัติอาร์คิมีดิส จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก n ที่ $M^{\frac{1}{r}}<n$

     $$\left|n^r\right| = n^r > M$$

     จะได้ว่า ลำดับ n^r เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต

     ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} n^r$ ไม่มีค่า

- **ทฤษฎีบท 2**

ให้ r เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

1. ถ้า $|r|<1$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$
2. ถ้า $|r|>1$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ ไม่มีค่า

พิสูจน์

1. จะแสดงว่า ถ้า $|r|<1$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$

ถ้า $|r|=0$ จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$

ให้ r เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่ง $0<|r|<1$

จะได้ว่า $\dfrac{1}{|r|}>1$ หรือ $\dfrac{1}{|r|}-1>0$

จะมีจำนวนจริงบวก h ซึ่ง $h = \dfrac{1}{|r|}-1$

ดังนั้น $|r| = \dfrac{1}{1+h}$

จากอสมการแบร์นูลลี จะได้ว่า $(1+h)^n \geq 1+nh$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

ให้ $\varepsilon>0$

เนื่องจาก $h>0$ จะได้ว่า $h\varepsilon>0$

โดยสมบัติอาร์คิมีดิส จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก N ที่ $\dfrac{1}{N} < h\varepsilon$

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ที่ $n \geq N$

$$|r^n - 0| = |r|^n = \left(\frac{1}{1+h}\right)^n \leq \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh} \leq \frac{1}{Nh} < \varepsilon$$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ เมื่อ $0<|r|<1$

2. จะแสดงว่า ถ้า $|r|>1$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ ไม่มีค่า โดยแสดงว่า ลำดับ r^n เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต

ให้ r เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่ง $|r|>1$

จะได้ว่า $|r|-1>0$

จะมีจำนวนจริงบวก a ซึ่ง $a=|r|-1$

ดังนั้น $|r| = 1+a$

จากอสมการแบร์นูลลีจะได้ว่า $|r|^n = (1+a)^n \geq 1+na$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ให้ $M > 0$

โดยสมบัติอาร์คิมีดิส จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $N > \dfrac{M}{a}$

พิจารณา $|r^N| = |r|^N \geq 1+Na > Na > M$

ดังนั้น ลำดับ r^n เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต

โดยบทแทรก viii จะได้ว่า ลำดับ r^n เป็นลำดับลู่ออก

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ ไม่มีค่า

- **ทฤษฎีบท 3**

ให้ a_n, b_n, t_n เป็นลำดับของจำนวนจริง A, B เป็นจำนวนจริง และ c เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ จะได้ว่า

1. ถ้า $t_n = c$ ทุกจำนวนเต็มบวก n แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} c = c$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n = cA$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A+B$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A-B$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A\cdot B$
6. ถ้า $b_n \neq 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n และ $B \neq 0$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{A}{B}$

พิสูจน์

1. ให้ c เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริง n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $\varepsilon > 0$

   จาก $t_n = c$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

   จะได้ว่า $|t_n - c| = |c-c| = 0 < \varepsilon$

   นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} c = c$

2. ให้ c เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริง และ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $|c| \geq 0$

ดังนั้น $|c| + 1 > 0$

จะได้ว่า $\dfrac{\varepsilon}{|c|+1} > 0$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{|c|+1}$ ทุก $n \geq N$

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ที่ $n \geq N$

$$|ca_n - cA| = |c| \cdot |a_n - A| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|+1} < \varepsilon$$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = cA = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

3. ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง $|a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ ทุก $n \geq N_1$

และจาก $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง $|b_n - B| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ ทุก $n \geq N_2$

ให้ $N = \max\{N_1, N_2\}$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ที่ $n \geq N$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (A + B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

4. ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง $|a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ ทุก $n \geq N_1$

และจาก $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ ทุก $n \geq N_2$

ให้ $N = \max\{N_1, N_2\}$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ที่ $n \geq N$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}|(a_n - b_n) - (A - B)| &= |(a_n - A) - (b_n - B)| \\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

5. ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}$ ทุก $n \geq N_1$

เนื่องจาก ลำดับ a_n เป็นลำดับลู่เข้า

โดยบทแทรก vii จะได้ว่า ลำดับ a_n เป็นลำดับที่มีขอบเขต

ดังนั้น จะมี $M > 0$ ซึ่ง $|a_n| < M$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2M}$ ทุก $n \geq N_2$

ให้ $N = \max\{N_1, N_2\}$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ที่ $n \geq N$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}|a_n b_n - AB| &= |a_n b_n + (-a_n B + a_n B) - AB| \\ &= |(a_n b_n - a_n B) + (a_n B - AB)| \\ &\leq |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB| \\ &= |a_n||b_n - B| + |B||a_n - A| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |B| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

6. ให้ $b_n \neq 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n และ $B \neq 0$

ต้องการแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{B}$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง

$$\begin{aligned}
|b_n - B| &< \frac{|B|}{2} && \text{ทุก } n \geq N_1 \\
|B| - |b_n| &\leq |B - b_n| < \frac{|B|}{2} && \text{ทุก } n \geq N_1 \\
|b_n| &> |B| - \frac{|B|}{2} && \text{ทุก } n \geq N_1 \\
|b_n| &> \frac{|B|}{2} && \text{ทุก } n \geq N_1 \\
\frac{1}{|b_n|} &< \frac{2}{|B|} && \text{ทุก } n \geq N_1
\end{aligned}$$

ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง $|b_n - B| < \dfrac{|B|^2 \varepsilon}{2}$ ทุก $n \geq N_2$

ให้ $N = \max\{N_1, N_2\}$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ที่ $n \geq N$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| &= \left|\frac{B - b_n}{b_n B}\right| \\
&= \frac{1}{|b_n|} \cdot \frac{1}{|B|} \cdot |b_n - B| \\
&< \frac{2}{|B|} \cdot \frac{1}{|B|} \cdot \frac{|B|^2 \varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{B}$

จากบทพิสูจน์ก่อนหน้า จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(a_n\cdot\frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}(a_n)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\right) = A\cdot\frac{1}{B} = \frac{A}{B}$$

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ เมื่อ $B \neq 0$

- **ทฤษฎีบท 4**

ให้ a_n เป็นลำดับซึ่ง $a_n \neq 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$ แล้ว ลำดับ a_n เป็นลำดับลู่ออก

พิสูจน์

จะแสดงว่า ถ้า $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$ แล้ว ลำดับ a_n เป็นลำดับลู่ออก

โดยแสดงว่า ลำดับ a_n เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต

ให้ a_n เป็นลำดับซึ่ง $a_n \neq 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และ $M > 0$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$

จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \frac{1}{M} \qquad \text{สำหรับ } n \geq N$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{|a_N|} < \frac{1}{M}$$

$$|a_N| > M$$

นั่นคือ ลำดับ a_n เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต

โดยบทแทรก viii จะได้ว่า ลำดับ a_n เป็นลำดับลู่ออก

- **ทฤษฎีบท 5**

ให้ a_n เป็นลำดับของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ L เป็นจำนวนจริง และ m เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับสอง จะได้ว่า ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[m]{L}$

พิสูจน์

ให้ m เป็นจำนวนเต็ม ที่ $m \geq 2$ และ $f_m : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ โดยที่ $f_m(x) = \sqrt[m]{x}$

สำหรับ $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

จะเห็นว่า f_m มีความต่อเนื่องบน $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

สมมติให้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

เนื่องจาก f_m ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ลำดับ a_n เป็นลำดับบน $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ และ $L \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

โดยทฤษฎีบท ix จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} f_m(a_n) = f_m\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) = f_m(L)$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[m]{L}$

หมายเหตุ สำหรับจำนวนเต็ม m ที่ $m \geq 2$ ฟังก์ชัน $f_m : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f_m(x) = \sqrt[m]{x}$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ จะมีความต่อเนื่อง สามารถพิสูจน์ได้ในแคลคูลัส

- **ทฤษฎีบท 6**

กำหนดให้อนุกรมเรขาคณิตมี a_1 เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วนร่วม

1. ถ้า $|r| < 1$ แล้ว อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ $\dfrac{a_1}{1-r}$
2. ถ้า $|r| \geq 1$ แล้ว อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

พิสูจน์

1. จะแสดงว่าอนุกรมเรขาคณิต $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และลู่เข้าสู่ค่า $\dfrac{a_1}{1-r}$ เมื่อ $|r| < 1$

   สมมติให้ $|r| < 1$

   ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

พิจารณาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ จะได้ว่า

$$S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

เนื่องจาก $|r|<1$ โดยทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-r^n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} r^n = 1$

ฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r} = \dfrac{a_1}{1-r}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-r^n\right) = \dfrac{a_1}{1-r}$

นั่นคือ อนุกรมเรขาคณิต $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และลู่เข้าสู่ค่า $\dfrac{a_1}{1-r}$ เมื่อ $|r|<1$

2. จะแสดงว่าอนุกรมเรขาคณิต $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $|r|\geq 1$ โดยการพิสูจน์หาข้อขัดแย้ง

ให้ $|r|\geq 1$

สมมติว่าอนุกรมเรขาคณิต $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยเป็นลำดับลู่เข้า

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

จะแยกพิจารณา r เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณี 1 $r=1$

จาก $r=1$ จะได้ว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1$

และมีลำดับของผลบวกย่อย คือ $a_1, 2a_1, 3a_1, \ldots, na_1, \ldots$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} na_1$ ไม่มีค่า

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยเป็นลำดับลู่ออก

จะได้ว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนด

กรณี 2 $|r| \geq 1$ โดยที่ $r \neq 1$

พิจารณาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ จะได้ว่า

$$S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

จากอนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยเป็นลำดับลู่เข้า

นั่นคือ จะมีจำนวนจริง S ที่ $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

ดังนั้น $$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r} = \frac{a_1}{1-r} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-r^n\right) \qquad \text{----- (*)}$$

จาก $|r| \geq 1$ โดยที่ $r \neq 1$ จะแยกพิจารณาออกเป็น 2 กรณีย่อย ดังนี้

กรณีย่อย 1 $r > 1$

พิจารณาเมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด

จาก $r > 1$ จะได้ว่า r^n จะมีค่ามากขึ้นและไม่เข้าใกล้จำนวนจริงใดจำนวนหนึ่ง

ดังนั้น $-r^n$ จะมีค่าลดลงและไม่เข้าใกล้จำนวนจริงใดจำนวนหนึ่ง

จะได้ว่า $1-r^n$ จะมีค่าลดลงและไม่เข้าใกล้จำนวนจริงใดจำนวนหนึ่ง

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\left(1-r^n\right)$ ไม่มีค่า ซึ่งขัดแย้งกับ (*)

กรณีย่อย 2 $r \leq 1$

พิจารณาเมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด

จาก $r \leq 1$ จะได้ว่า r^n จะมีค่าแกว่งกวัดและไม่เข้าใกล้จำนวนจริงใดจำนวนหนึ่ง

ดังนั้น $-r^n$ จะมีค่าแกว่งกวัดและไม่เข้าใกล้จำนวนจริงใดจำนวนหนึ่ง

จะได้ว่า $1-r^n$ จะมีค่าแกว่งกวัดและไม่เข้าใกล้จำนวนจริงใดจำนวนหนึ่ง

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\left(1-r^n\right)$ ไม่มีค่า ซึ่งขัดแย้งกับ (*)

จากทั้ง 2 กรณี สรุปได้ว่า อนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $|r| \geq 1$

หมายเหตุ คำว่า “มีค่าแกว่งกวัด” ในที่นี้หมายความว่า มีค่าเป็นจำนวนจริงลบและจำนวนจริงบวกสลับกัน หรือจำนวนจริงบวกและจำนวนจริงลบสลับกัน

- **ทฤษฎีบท 7**

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะได้ว่า

1. $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริง
2. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริง
3. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
4. $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

พิสูจน์

1. ให้ $P(n)$ แทน $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริง

พิจารณา $P(1)$

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{1} c = c = 1 \cdot c$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $\sum_{i=1}^{k} c = kc$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} c &= \sum_{i=1}^{k} c + c \\ &= kc + c \\ &= (k+1)\cdot c\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ ทุก n ที่เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

2. ให้ $P(n)$ แทน $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริง

พิจารณา $P(1)$

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{1} ca_i = ca_1 = c \cdot \sum_{i=1}^{1} a_i$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $\sum_{i=1}^{k} ca_i = c\sum_{i=1}^{k} a_i$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} ca_i &= \sum_{i=1}^{k} ca_i + ca_{k+1} \\ &= c\sum_{i=1}^{k} a_i + ca_{k+1} \\ &= c\left(\sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}\right) \\ &= c\sum_{i=1}^{k+1} a_i\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$ ทุก n ที่เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

3. ให้ $P(n)$ แทน $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

พิจารณา $P(1)$

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{1} (a_i + b_i) = a_1 + b_1 = \sum_{i=1}^{1} a_i + \sum_{i=1}^{1} b_i$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $\sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=1}^{k} b_i$

พิจารณา $\sum_{i=1}^{k+1}(a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{k}(a_i+b_i)+(a_{k+1}+b_{k+1})$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k}a_i+\sum_{i=1}^{k}b_i\right)+(a_{k+1}+b_{k+1})$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k}a_i+a_{k+1}\right)+\left(\sum_{i=1}^{k}b_i+b_{k+1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1}a_i+\sum_{i=1}^{k+1}b_i$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i$ ทุก n ที่เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

4. ให้ $P(n)$ แทน $\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i) = \sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}b_i$

พิจารณา $P(1)$

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{1}(a_i-b_i) = a_1-b_1 = \sum_{i=1}^{1}a_i-\sum_{i=1}^{1}b_i$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $\sum_{i=1}^{k}(a_i-b_i) = \sum_{i=1}^{k}a_i-\sum_{i=1}^{k}b_i$

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{k+1}(a_i-b_i) = \sum_{i=1}^{k}(a_i-b_i)+(a_{k+1}-b_{k+1})$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k}a_i-\sum_{i=1}^{k}b_i\right)+(a_{k+1}-b_{k+1})$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k}a_i+a_{k+1}\right)-\left(\sum_{i=1}^{k}b_i+b_{k+1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1}a_i-\sum_{i=1}^{k+1}b_i$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$ ทุก n ที่เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

- **ทฤษฎีบท 8**

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะได้ว่า

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$

พิสูจน์

1. ให้ $P(n)$ แทน $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

พิจารณา $P(1)$

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=1}^{k} i + (k+1)\\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)\\ &= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)\\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ ทุก n ที่เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

2. ให้ $P(n)$ แทน $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

พิจารณา $P(1)$

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= (k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right) \\
&= \frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ทุก n ที่เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

3. ให้ $P(n)$ แทน $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

พิจารณา $P(1)$

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $\sum_{i=1}^{k} i^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 \\
&= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 \\
&= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{2^2} + (k+1)\right) \\
&= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{2^2} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{2^2} \\
&= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ทุก n ที่เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

1.6 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทและเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

ในส่วนนี้จะนำเสนอตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทที่ 1 ลำดับและอนุกรม สำหรับรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 ซึ่งครูสามารถเลือกนำไปใช้ได้ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดผลประเมินผล

ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. จงหาพจน์ที่ 20 ของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์ที่ 3 และพจน์ที่ 17 เป็น 12 และ 40 ตามลำดับ
2. จงหาอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์ที่ 2 เป็น $\frac{2}{\sqrt{3}}$ และพจน์ที่ 7 เป็น $-\frac{2}{27}$
3. จำนวนเต็มบวกที่อยู่ระหว่าง 301 กับ 450 ที่หารด้วย 3 ลงตัว แต่หารด้วย 6 ไม่ลงตัว มีทั้งหมดกี่จำนวน
4. จงหาว่า $-\left(2^{-9}\right)$ เป็นพจน์ที่เท่าใดของลำดับเรขาคณิตที่มี $a_2 = 4,\ a_6 = \frac{1}{4}$
5. จงพิจารณาว่าลำดับในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้าจงหาลิมิต

   1) $a_n = \frac{1-n^2}{2+3n^2}$ 2) $a_n = \frac{n^2-n+7}{2n^3+n^2}$

   3) $a_n = 2-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 4) $a_n = 1+(-1)^n$
6. ให้ a_n เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์ที่ 8 เป็น 50 และมีผลบวกห้าพจน์แรกเป็น 50 จงหาผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตนี้
7. ให้ a_n เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์ที่ 5 เป็น 2 และมีอัตราส่วนร่วมเป็น $-\frac{1}{2}$ จงหาผลบวก 5 พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตนี้
8. จงหาผลบวกของจำนวนนับไม่เกิน 200 ที่หารด้วย 4 ลงตัว
9. ลำดับเรขาคณิตหนึ่งมี $S_9 = 513$ และ $S_{10} = 1,026$ จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับเรขาคณิตนี้
10. จงเขียนทศนิยมซ้ำ $0.24\dot{9}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วน โดยใช้ความรู้เรื่องอนุกรมอนันต์

11. จงพิจารณาว่าอนุกรมในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า จงหาผลบวกของอนุกรม

    1) $\frac{4}{3}+\left(-\frac{8}{9}\right)+\frac{16}{27}+\left(-\frac{32}{81}\right)+\cdots+\frac{4}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\cdots$

    2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}+\cdots$

12. จงหาผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรม $1(1-1)+2(2-1)+3(3-1)+\cdots+n(n-1)+\cdots$

13. โรงละครแห่งหนึ่งจัดเก้าอี้เป็นแถวสำหรับผู้เข้าชม โดยแถว A มี 8 ที่นั่ง และแถวต่อไปจะเพิ่มจำนวนเก้าอี้จากแถวก่อนหน้า 3 ตัวเสมอ ถ้าโรงละครนี้มีที่นั่งตั้งแต่แถว A ถึง Z จงหาว่าโรงละครแห่งนี้สามารถจุผู้ชมได้ทั้งหมดกี่คน

14. นิวฝากเงิน 10,000 บาท กับสถาบันการเงินแห่งหนึ่งที่ให้อัตราดอกเบี้ย 2% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน จงหาเงินรวมของนิวเมื่อฝากเงินครบ 2 ปี โดยที่ไม่มีการฝากและถอนเงินในระหว่างนี้

15. นิดต้องการฝากเงินกับสถาบันการเงินแห่งหนึ่งซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 2% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน ถ้านิดต้องการให้มีเงินในบัญชีประมาณ 10,000 บาท เมื่อสิ้นสุดปีที่ 3 นิดควรฝากเงินกับสถาบันการเงินแห่งนี้อย่างน้อยกี่บาท

16. กุ๊กไก่ซื้อโทรศัพท์มือถือราคา 12,000 บาท โดยจ่ายเงินในวันที่ตัดสินใจซื้อโทรศัพท์มือถือ 2,000 บาท และผ่อนชำระส่วนที่เหลือเป็นจำนวนเงินเท่ากันทุกเดือน เป็นเวลา 6 เดือน โดยผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน ถ้าอัตราดอกเบี้ยผ่อนชำระเป็น 12% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือนแล้ว กุ๊กไก่จะต้องผ่อนชำระประมาณเดือนละเท่าใด

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. จาก $a_3=12,\ a_{17}=40$ และ $a_n=a_1+(n-1)d$

จะได้	12	$=$	$a_1+(3-1)d$	
นั่นคือ	12	$=$	a_1+2d	----- (1)
และ	40	$=$	$a_1+(17-1)d$	
นั่นคือ	40	$=$	a_1+16d	----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = 2$ และ $a_1 = 8$

ดังนั้น $a_{20} = 8 + (20-1)(2) = 8 + (19)(2) = 8 + 38 = 46$

นั่นคือ พจน์ที่ 20 ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 46

2. จาก $a_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}, a_7 = -\frac{2}{27}$ และ $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $\frac{2}{\sqrt{3}} = a_1 r^{2-1}$

นั่นคือ $\frac{2}{\sqrt{3}} = a_1 r$ ----- (1)

และ $-\frac{2}{27} = a_1 r^{7-1}$

นั่นคือ $-\frac{2}{27} = a_1 r^6$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $r = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

ดังนั้น อัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่อยู่ระหว่าง 301 กับ 450 ที่หารด้วย 3 ลงตัว คือ 303

จำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่อยู่ระหว่าง 301 กับ 450 ที่หารด้วย 3 ลงตัว คือ 447

จะได้ว่า ลำดับของจำนวนนับที่อยู่ระหว่าง 301 กับ 450 ที่หารด้วย 3 ลงตัว คือ 303, 306, 309, …, 447 เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 303 ผลต่างร่วมเป็น 3 และพจน์ที่ n เป็น 447

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $447 = 303 + (n-1)(3)$

$149 = 101 + (n-1)$

$n - 1 = 149 - 101$

$n = 48 + 1$

$n = 49$

ดังนั้น จำนวนเต็มบวกที่อยู่ระหว่าง 301 กับ 450 ที่หารด้วย 3 ลงตัว มีทั้งหมด 49 จำนวน

จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่อยู่ระหว่าง 301 กับ 450 ที่หารด้วย 6 ลงตัว คือ 306

จำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่อยู่ระหว่าง 301 กับ 450 ที่หารด้วย 6 ลงตัว คือ 444

จะได้ว่า ลำดับของจำนวนเต็มบวกที่อยู่ระหว่าง 301 กับ 450 ที่หารด้วย 6 ลงตัว เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 306 ผลต่างร่วมเป็น 6 และพจน์ที่ n เป็น 444

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $444 = 306 + (n-1)(6)$

$$74 = 51 + (n-1)$$
$$n-1 = 74-51$$
$$n = 23+1$$
$$n = 24$$

ดังนั้น จำนวนเต็มบวกที่อยู่ระหว่าง 301 กับ 450 ที่หารด้วย 6 ลงตัว มีทั้งหมด 24 จำนวน

นั่นคือ จำนวนเต็มบวกที่อยู่ระหว่าง 301 กับ 450 ที่หารด้วย 3 ลงตัว แต่หารด้วย 6 ไม่ลงตัว มีทั้งหมด $49-24=25$ จำนวน

4. จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $4 = a_1 r^{2-1}$

นั่นคือ $4 = a_1 r$ ----- (1)

และ $\frac{1}{4} = a_1 r^{6-1}$

นั่นคือ $\frac{1}{4} = a_1 r^5$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $r = \frac{1}{2}$ หรือ $r = -\frac{1}{2}$

กรณี $r = \frac{1}{2}$ จะได้ $a_1 = 8$

ให้ $-\left(2^{-9}\right)$ เป็นพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้

จะได้ $-\left(2^{-9}\right) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{-\left(\frac{1}{2^9}\right)}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2^9}\right)\left(\frac{1}{2^3}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2^{12}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

ดังนั้น ไม่มีจำนวนจริงใดที่ทำให้สมการนี้เป็นจริง

กรณี $r = -\frac{1}{2}$ จะได้ $a_1 = -8$

ให้ $-\left(2^{-9}\right)$ เป็นพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้

จะได้ $$-\left(2^{-9}\right) = (-8)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{-\left(\frac{1}{2^9}\right)}{-8}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2^9}\right)\left(\frac{1}{2^3}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{12}}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{12}$$

นั่นคือ $n-1 = 12$

จะได้ $n = 13$

ดังนั้น $-\left(2^{-9}\right)$ เป็นพจน์ที่ 13 ของลำดับเรขาคณิตที่กำหนดให้

5. 1) พิจารณา $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-n^2}{2+3n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{1}{n^2}-1\right)}{n^2\left(\frac{2}{n^2}+3\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-1}{\frac{2}{n^2}+3}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}3}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า มีลิมิตเป็น $-\frac{1}{3}$

2) พิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+7}{2n^3+n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{7}{n^3}\right)}{n^3\left(2+\frac{1}{n}\right)}$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{0}{2}$$

$$= 0$$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า มีลิมิตเป็น 0

3) พิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$$= 2-0$$

$$= 2$$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า มีลิมิตเป็น 2

4) จากพจน์ที่ n ของลำดับ คือ $a_n = 1+(-1)^n$

จะได้ลำดับ a_n คือ $0, 2, 0, 2, \ldots$

นั่นคือ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ พจน์ที่ n ของลำดับ a_n เป็น 0 และเมื่อ n เป็นจำนวนคู่ พจน์ที่ n ของลำดับ a_n เป็น 2

จะได้ว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับนี้ จึงไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่ออก

6. จาก $a_8 = 50$ และ $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $50 = a_1 + (8-1)d$

นั่นคือ $50 = a_1 + 7d$ ----- (1)

จาก $S_5 = 50$ และ $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

จะได้ $50 = \frac{5}{2}(2a_1 + (5-1)d)$

นั่นคือ $10 = a_1 + 2d$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = 8$

ดังนั้น ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 8

7. จาก $a_5 = 2, r = -\frac{1}{2}$ และ $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $2 = a_1\left(-\frac{1}{2}\right)^{5-1}$

$2 = a_1\left(-\frac{1}{2}\right)^{4}$

$2 = a_1\left(\frac{1}{16}\right)$

นั่นคือ $a_1 = 32$

จาก $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

จะได้ $S_5 = \frac{32\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$= \frac{32\left(1+\frac{1}{32}\right)}{\frac{3}{2}}$

$= \left(32 \times \frac{33}{32}\right) \times \frac{2}{3}$

$= 22$

ดังนั้น ผลบวก 5 พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ 22

8. จำนวนนับที่น้อยที่สุดที่ไม่เกิน 200 ที่หารด้วย 4 ลงตัว คือ 4

จำนวนนับที่มากที่สุดที่ไม่เกิน 200 ที่หารด้วย 4 ลงตัว คือ 200

จะได้ว่า ลำดับของจำนวนนับที่ไม่เกิน 200 ที่หารด้วย 4 ลงตัว คือ 4, 8, 12, …, 200 ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มี $a_1 = 4,\ d = 4$ และ $a_n = 200$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $200 = 4 + (n-1)(4)$

$50 = 1 + (n-1)$

$n = 50$

พิจารณาผลบวกของจำนวนนับที่ไม่เกิน 200 ที่หารด้วย 4 ลงตัว โดยพิจารณา S_{50}

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

จะได้ $S_{50} = \frac{50}{2}(4 + 200)$

$S_{50} = 5{,}100$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนนับไม่เกิน 200 ที่หารด้วย 4 ลงตัว เท่ากับ 5,100

9. เนื่องจาก $S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$

และ $S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}$

จะได้ $a_{10} = S_{10} - S_9$

$= 1{,}026 - 513$

$= 513$

ดังนั้น พจน์ที่ 10 ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ 513

10. จาก $0.24\dot{9} = 0.24999\ldots$

$= 0.24 + 0.009 + 0.0009 + 0.00009 + \cdots$

$= \frac{24}{100} + \frac{9}{1{,}000} + \frac{9}{10{,}000} + \frac{9}{100{,}000} + \cdots$

จะได้ว่า $\frac{9}{1{,}000} + \frac{9}{10{,}000} + \frac{9}{100{,}000} + \cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{9}{1{,}000}$ และ $r = \frac{1}{10}$

เนื่องจาก $|r| = \left|\frac{1}{10}\right| < 1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรม

คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{9}{1,000}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{100}$

จะได้ว่า $0.24\dot{9} = \frac{24}{100} + \frac{1}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

11. 1) $\frac{4}{3} + \left(-\frac{8}{9}\right) + \frac{16}{27} + \left(-\frac{32}{81}\right) + \cdots + \frac{4}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^n + \cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี

$a_1 = \frac{4}{3}$ และ $r = -\frac{2}{3}$

เนื่องจาก $|r| = \left|-\frac{2}{3}\right| < 1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรม คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{4}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{4}{5}$

2) สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ จะได้ว่า $\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$

เขียนผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมได้ดังนี้

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}1-\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}1-\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{0}{2+0}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

ดังนั้น อนุกรม $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}+\cdots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า มีผลบวกของอนุกรมเท่ากับ $\frac{1}{2}$

12. จาก $1(1-1)+2(2-1)+3(3-1)+\cdots+n(n-1)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(n(n-1))=\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-n)$

จะได้ ผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ

$$S_{20} = \sum_{n=1}^{20}(n^2-n)$$

$$= \sum_{n=1}^{20}n^2-\sum_{n=1}^{20}n$$

$$= \frac{20(20+1)(2(20)+1)}{6}-\frac{20(20+1)}{2}$$

$$= \frac{20\times21\times41}{6}-\frac{20\times21}{2}$$

$$= (10\times7\times41)-(10\times7\times3)$$

$$= (10\times 7)(41-3)$$
$$= 70\times 38$$
$$= 2{,}660$$

ดังนั้น ผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรม $1(1-1)+2(2-1)+3(3-1)+\cdots+n(n-1)+\cdots$ เท่ากับ 2,660

13. ลำดับของจำนวนเก้าอี้แต่ละแถวในโรงละครจากแถว A ถึง Z คือ $8, 11, 14, \ldots, a_n$ ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มี $a_1 = 8, d = 3$ และ $n = 26$

ดังนั้น จำนวนเก้าอี้ทั้งหมดในโรงละครแห่งนี้ คือ S_{26}

จาก $$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1+(n-1)d\right)$$

จะได้ $$S_{26} = \frac{26}{2}\left(2(8)+(26-1)(3)\right)$$
$$= 13(16+75)$$
$$= 13\times 91$$
$$= 1{,}183$$

ดังนั้น โรงละครแห่งนี้สามารถจุผู้ชมได้ทั้งหมด 1,183 คน

14. ให้ $P = 10000, i = 2, k = 2$ และ $n = 2$ จะได้ $r = \frac{2}{100} = 0.02$

จะได้ จำนวนเงินรวมของนิวเมื่อฝากเงินครบ 2 ปี คือ $10{,}000\left(1+\frac{0.02}{2}\right)^4$ หรือประมาณ 10,406.04 บาท

ดังนั้น เงินรวมของนิวเมื่อฝากเงินครบ 2 ปี โดยที่ไม่มีการฝากและถอนเงินในระหว่างนี้ ประมาณ 10,406.04 บาท

15. ให้ $S = 10000, i = 2, k = 2$ และ $n = 3$ จะได้ $r = \frac{2}{100} = 0.02$

จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงินรวม 10,000 บาท คือ

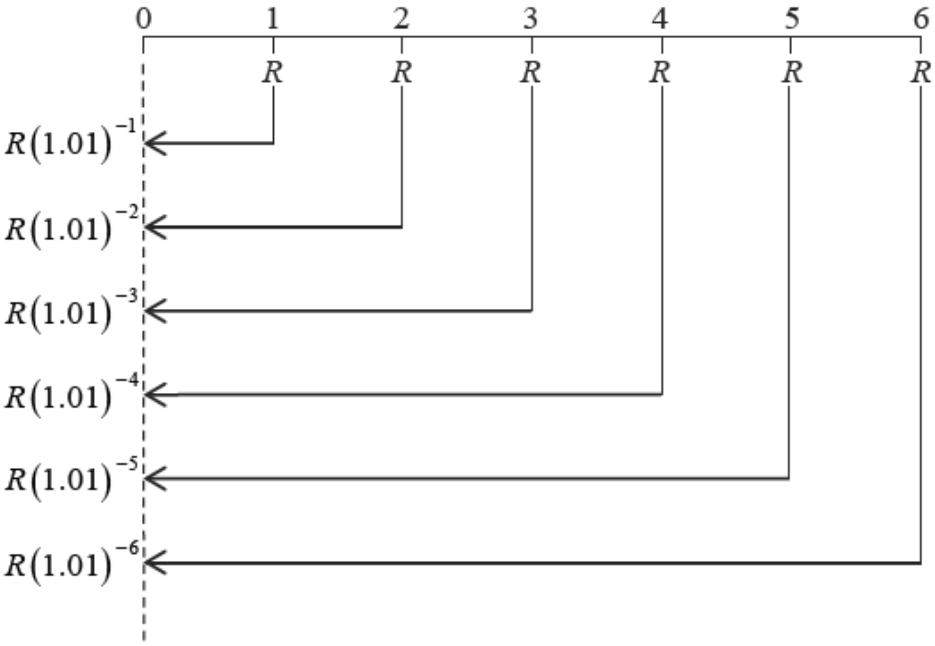
$$P = 10{,}000\left(1+\frac{0.02}{2}\right)^{-(2)(3)} \approx 9{,}420.45$$

ดังนั้น นิดควรนำเงินไปฝากอย่างน้อย 9,420.45 บาท

16. ให้ R แทนค่างวดที่กุ๊กไก่ต้องผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน

และ $i=\frac{12}{12}=1$ จะได้ $r=\frac{1}{100}=0.01$

เนื่องจากกุ๊กไก่จ่ายเงินในวันที่ตัดสินใจซื้อโทรศัพท์มือถือ 2,000 บาท ทำให้เหลือเงินที่ต้องชำระอีก 12,000 – 2,000 = 10,000 บาท โดยกุ๊กไก่จะต้องผ่อนชำระทุกสิ้นเดือนเป็นเวลา 6 เดือน เขียนแผนภาพแสดงมูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนแต่ละงวดได้ดังนี้



จากแผนภาพ จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 1, 2, 3, …, 6 คือ

$R(1.01)^{-1}, R(1.01)^{-2}, R(1.01)^{-3}, ..., R(1.01)^{-6}$ ตามลำดับ

นั่นคือ ผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนทั้ง 6 งวด คือ

$R(1.01)^{-1}+R(1.01)^{-2}+R(1.01)^{-3}+\cdots+R(1.01)^{-6}$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 6 พจน์ โดยพจน์แรก คือ $R(1.01)^{-1}$ และอัตราส่วนร่วม คือ $(1.01)^{-1}$

ดังนั้น ผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนทั้ง 6 งวด คือ $\frac{R(1.01)^{-1}\left(1-(1.01)^{-6}\right)}{1-(1.01)^{-1}}$

จาก กุ๊กไก่เหลือเงินที่ต้องชำระอีก 10,000 บาท จะได้ว่า

$$10,000 = \frac{R(1.01)^{-1}\left(1-(1.01)^{-6}\right)}{1-(1.01)^{-1}}$$

$$R = \frac{10,000\left(1-(1.01)^{-1}\right)}{(1.01)^{-1}\left(1-(1.01)^{-6}\right)}$$

$$R \approx 1,725.48$$

ดังนั้น กุ๊กไก่จะต้องผ่อนชำระเดือนละประมาณ 1,725.48 บาท

บทที่ 2

แคลคูลัสเบื้องต้น

แคลคูลัสเป็นสาระการเรียนรู้ที่สามารถบูรณาการร่วมกับศาสตร์อื่น ๆ อย่างแพร่หลาย เช่น ฟิสิกส์ แพทยศาสตร์ ภูมิศาสตร์ เพื่อศึกษาและสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงที่พบในชีวิตจริง เช่น การเปลี่ยนแปลงความเร็วในการเคลื่อนที่ของวัตถุ การศึกษาการแพร่กระจายของโรคติดเชื้อ การสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์เพื่อทำนายการไหลของมวลน้ำเมื่อเกิดอุทกภัย ซึ่งในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 บทที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น ได้นำเสนอเนื้อหา เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันและทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน และความต่อเนื่องบนช่วง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ เส้นสัมผัสเส้นโค้ง อนุพันธ์อันดับสูง การประยุกต์ของอนุพันธ์ ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต ปริพันธ์จำกัดเขต และพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

ในบทเรียนนี้มุ่งเน้นให้นักเรียนบรรลุผลการเรียนรู้ตามสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม และบรรลุจุดมุ่งหมายดังต่อไปนี้

ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

ผลการเรียนรู้

- ตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่กำหนดให้
- หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้ และนำไปใช้แก้ปัญหา
- หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและจำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้ และนำไปใช้แก้ปัญหา

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

- ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
- อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต
- ปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

จุดมุ่งหมาย

1. หาลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้
2. ตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่กำหนดให้
3. หาความชันของเส้นโค้ง
4. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา
5. หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและจำกัดเขตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ และนำไปใช้แก้ปัญหา

ความรู้ก่อนหน้า

- จำนวนจริง
- ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- เรขาคณิตวิเคราะห์

ipst.me/10551

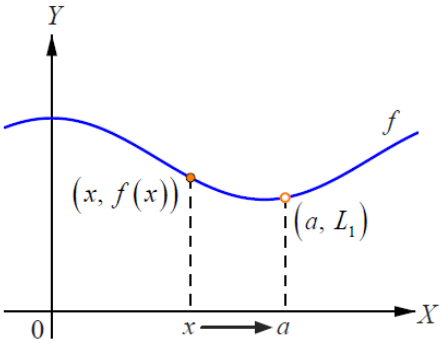
2.1 เนื้อหาสาระ

1. สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a ทั้งทางด้านซ้ายและขวาของ a แล้ว จะเรียก L ว่า **ลิมิตของ** f **ที่** a ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ และกล่าวว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ มีค่าเท่ากับ L

   แต่ถ้าไม่มีจำนวนจริง L ซึ่ง $f(x)$ เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a แล้วจะกล่าวว่า f **ไม่มีลิมิตที่** a หรือกล่าวว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ไม่มีค่า

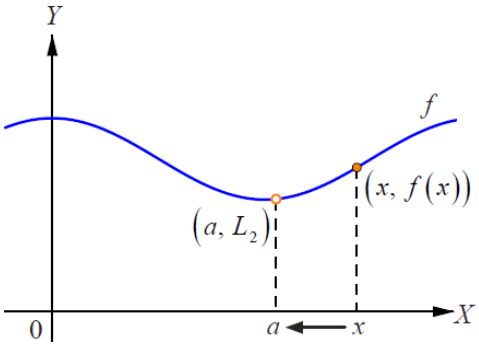
   อาจแทนสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ด้วย $f(x)\to L$ เมื่อ $x\to a$
2. สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ถ้า $f(x)$ เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a แล้ว L อาจไม่เท่ากับ $f(a)$ ก็ได้
3. ในการหาลิมิตของฟังก์ชัน $y=f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a นั้น จะพิจารณาค่าของ $f(x)$ ว่าเข้าใกล้จำนวนจริงใดในขณะที่ x เข้าใกล้ a แต่ $x\neq a$ นั่นหมายความว่า จะไม่พิจารณาค่าของ $f(x)$ ที่ $x=a$ ดังนั้น ฟังก์ชัน f อาจจะนิยามหรือไม่นิยามที่ a ก็ได้ แต่ฟังก์ชัน f จะต้องนิยามที่แต่ละจุดที่ใกล้ a
4. สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง ถ้า $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_1 เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้ายแล้ว จะเรียก L_1 ว่า **ลิมิตซ้ายของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้** a **ทางด้านซ้าย** เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_1$

   ถ้า $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_2 เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวาแล้ว จะเรียก L_2 ว่า **ลิมิตขวาของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้** a **ทางด้านขวา** เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_2$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_1$

รูปที่ 1



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_2$

รูปที่ 2

จากรูปที่ 1 และ 2 จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_1$ และ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_2$

ถ้า $L_1 = L_2$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ มีค่า และ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1 = L_2$

แต่ถ้า $L_1 \neq L_2$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ไม่มีค่า

5. **ทฤษฎีบท 1**

ให้ a เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1) $\lim\limits_{x\to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2) $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$

6. **ทฤษฎีบท 2**

กำหนดให้ a, L และ M เป็นจำนวนจริงใด ๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ แล้ว

1) $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L+M$

3) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = L-M$

4) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L\cdot M$

5) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M\neq 0$

6) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n=L^n$ เมื่อ $n\in\mathbb{N}$

7) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{L}$ เมื่อ $n\in\mathbb{N}-\{1\}$, $\sqrt[n]{f(x)}\in\mathbb{R}$ สำหรับ x ที่เข้าใกล้ a และ $\sqrt[n]{L}\in\mathbb{R}$

7. **ทฤษฎีบท 3**

ให้ p เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to a} p(x)=p(a)$

8. **ทฤษฎีบท 4**

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ p และ q เป็นฟังก์ชันพหุนาม จะได้ว่า

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\dfrac{p(a)}{q(a)}$ สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ ที่ $q(a)\neq 0$

9. ในกรณีที่ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ มีค่า

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

10. **บทนิยาม 1**

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนช่วงเปิด (a,b) และ $c\in(a,b)$ จะกล่าวว่า f เป็น **ฟังก์ชันต่อเนื่อง** ที่ $x=c$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

11. ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=c$ ต้องมีสมบัติครบทั้งสามข้อดังต่อไปนี้

1) $f(c)$ หาค่าได้ (นั่นคือ c อยู่ในโดเมนของ f)

2) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ มีค่า

3) $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

12. **ทฤษฎีบท 5**

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ที่ $x=a$ แล้ว

1) $f+g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$

2) $f-g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$

3) $f\cdot g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$

4) $\dfrac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$ เมื่อ $g(a)\neq 0$

13. **ทฤษฎีบท 6**

สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ ฟังก์ชันพหุนาม p เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$

14. **ทฤษฎีบท 7**

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ p และ q เป็นฟังก์ชันพหุนาม แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $q(a)\neq 0$

15. **ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนด**

1) ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a,b) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง (a,b)

2) ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ

(1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง (a,b) และ

(2) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ และ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

3) ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(a,b]$ ก็ต่อเมื่อ

(1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง (a,b) และ

(2) $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

4) ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b)$ ก็ต่อเมื่อ

(1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง (a,b) และ

(2) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

16. **บทนิยาม 2**

ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ a อยู่ในโดเมนของ f

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก a เป็น $a+h$ คือ

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f เทียบกับ x ขณะที่ $x=a$ คือ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

17. สำหรับฟังก์ชัน f ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f เทียบกับ x เป็นจำนวนจริงบวก แสดงว่า เมื่อ x เพิ่มขึ้น ค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้น แต่ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f เทียบกับ x เป็นจำนวนจริงลบ แสดงว่าเมื่อ x เพิ่มขึ้น ค่าของ $f(x)$ จะลดลง

18. **บทนิยาม 3**

ให้ f เป็นฟังก์ชัน **อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x** เขียนแทนด้วย $f'(x)$ คือ

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

19. ถ้า $f'(x)$ มีค่า จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่ x หรือฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ x ถ้า $f'(x)$ ไม่มีค่า จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f ไม่มีอนุพันธ์ที่ x หรือฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ x

20. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยสมการ $y=f(x)$ เขียนแทน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ด้วยสัญลักษณ์ $\frac{dy}{dx}$ (อ่านว่า ดีวายบายดีเอกซ์) หรือ $\frac{d}{dx}f(x)$ หรือ y'

21. จาก $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ใด ๆ

ดังนั้น สำหรับ a ใด ๆ ที่อยู่ในโดเมนของ f อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ $x=a$ คือ

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

อาจใช้สัญลักษณ์ $\left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}$ หรือ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ แทน $f'(a)$

22. **สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน**

สูตรที่ 1 ถ้า $f(x)=c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $f'(x)=0$

สูตรที่ 2 ถ้า $f(x)=x$ แล้ว $f'(x)=1$

สูตรที่ 3 ถ้า $f(x)=x^a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง แล้ว $f'(x)=a\,x^{a-1}$

สูตรที่ 4 ถ้าฟังก์ชัน f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$

สูตรที่ 5 ถ้าฟังก์ชัน f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$

สูตรที่ 6 ถ้า c เป็นค่าคงตัวและฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว

$$(cf)'(x)=c\left(f'(x)\right)$$

สูตรที่ 7 ถ้าฟังก์ชัน f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว

$$(fg)'(x)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

สูตรที่ 8 ถ้าฟังก์ชัน f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $g(x)\neq 0$ แล้ว

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

สูตรที่ 9 กฎลูกโซ่

ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(x)$ แล้ว

$$(g\circ f)'(x)=g'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$$

23. **บทนิยาม 4**

กำหนดเส้นโค้งซึ่งเป็นกราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$ และ $P(a,\ f(a))$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง **เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด** $P(a,\ f(a))$ คือ เส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชันเท่ากับ $f'(a)$ จะเรียกความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P ว่า **ความชันของเส้นโค้งที่จุด** P

24. **บทนิยาม 5**

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ และอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ จะเรียกอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ว่า **อนุพันธ์อันดับที่ 2** ของฟังก์ชัน f ที่ x และเขียนแทนด้วย $f''(x)$

25. อาจใช้สัญลักษณ์ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ หรือ y'' แทนอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน f ที่ x

26. อนุพันธ์อันดับอื่น และสัญลักษณ์ที่ใช้เขียนแทน มีดังนี้

อนุพันธ์อันดับที่ 3 ของ f เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f เขียนแทนด้วย

$f'''(x)$ หรือ $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ หรือ y'''

อนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ f เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 3 ของ f เขียนแทนด้วย

$f^{(4)}(x)$ หรือ $\dfrac{d^4y}{dx^4}$ หรือ $y^{(4)}$

$\vdots$

อนุพันธ์อันดับที่ n ของ f เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ $n-1$ ของ f เขียนแทนด้วย $f^{(n)}(x)$ หรือ $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ หรือ $y^{(n)}$

27. เนื่องจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $y=f(x)$ เทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ คืออนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ดังนั้น อนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f ที่ x คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $y=f'(x)$ เทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ

28. ในการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวตรง มีปริมาณ 3 ชนิดที่เกี่ยวข้องกับเวลา ได้แก่ ตำแหน่งของวัตถุ ความเร็วของวัตถุ และความเร่งของวัตถุ

- การเคลื่อนที่ของวัตถุสามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชัน $y=s(t)$ โดยที่ $s(t)$ คือ ตำแหน่งของวัตถุ ณ ขณะเวลา t ใด ๆ
- ความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ s เทียบกับ t ณ ขณะเวลา t นั่นคือ ความเร็ว v เป็นอนุพันธ์ของ s เทียบกับ t ดังนั้น v เป็นฟังก์ชันของเวลา t กำหนดโดย

$$v(t)=s'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

จะเห็นว่า v เป็นฟังก์ชันของเวลา t

- ความเร่งของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว v เทียบกับ t ณ ขณะเวลา t นั่นคือ ความเร่ง a เป็นอนุพันธ์ของ v เทียบกับ t นั่นคือ $a(t) = v'(t) = s''(t)$

ดังนั้น ความเร่งคืออนุพันธ์อันดับที่ 1 ของฟังก์ชันความเร็ว v และเป็นอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชันตำแหน่ง s

29. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และ A เป็นสับเซตของโดเมน

f เป็น **ฟังก์ชันเพิ่ม** บนเซต A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$

f เป็น **ฟังก์ชันลด** บนเซต A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

30. **ทฤษฎีบท 8**

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง A ซึ่งเป็นสับเซตของโดเมนของฟังก์ชัน f

ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง A

ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง A

31. **บทนิยาม 6**

ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ ถ้ามีช่วง (a, b) ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของฟังก์ชัน f ที่อยู่ในช่วง (a, b) เรียก $f(c)$ ว่า **ค่าสูงสุดสัมพัทธ์** ของฟังก์ชัน f และเรียกจุด $(c, f(c))$ ว่า **จุดสูงสุดสัมพัทธ์** ของฟังก์ชัน f

ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ ถ้ามีช่วง (a, b) ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของฟังก์ชัน f ที่อยู่ในช่วง (a, b) เรียก $f(c)$ ว่า **ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** ของฟังก์ชัน f และเรียกจุด $(c, f(c))$ ว่า **จุดต่ำสุดสัมพัทธ์** ของฟังก์ชัน f

32. **ทฤษฎีบท 9**

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$ ถ้าฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ และ $f'(c)$ มีค่า แล้ว $f'(c) = 0$

33. **บทนิยาม 7**

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง (a, b) เรียกจำนวนจริง $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มีค่า ว่า **ค่าวิกฤต** ของฟังก์ชัน f และเรียกจุด $(c, f(c))$ ว่า **จุดวิกฤต** ของฟังก์ชัน f

34. **ทฤษฎีบท 10**

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$ เป็นค่าวิกฤตของ f

ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนจริงบวกเป็นจำนวนจริงลบ เมื่อ x เพิ่มขึ้นรอบ ๆ c แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนจริงลบเป็นจำนวนจริงบวก เมื่อ x เพิ่มขึ้นรอบ ๆ c แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

35. **ทฤษฎีบท 11**

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$ เป็นค่าวิกฤตของ f ซึ่ง $f'(c) = 0$ และ $f''(c)$ มีค่า

1) ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f
2) ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

36. **บทนิยาม 8**

ฟังก์ชัน f มี**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์** ที่ $x = c$ เมื่อ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก $x \in D_f$

ฟังก์ชัน f มี**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์** ที่ $x = c$ เมื่อ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก $x \in D_f$

37. **ทฤษฎีบท 12**

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว f จะมีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วงปิด $[a, b]$

38. ถ้าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b) แล้ว สามารถหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f บนช่วงปิด $[a, b]$ ได้ดังนี้

1) หาค่าวิกฤตทั้งหมดในช่วงเปิด (a, b)
2) หาค่าของฟังก์ชัน ณ ค่าวิกฤตที่ได้จากข้อ 1)
3) หาค่าของฟังก์ชันที่จุดปลายของช่วงปิด $[a, b]$ นั่นคือ หา $f(a)$ และ $f(b)$
4) เปรียบเทียบค่าที่ได้ทั้งหมดจากข้อ 2) และ 3) ซึ่งจะทำให้ได้ข้อสรุปว่า
   - ค่ามากที่สุดเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f
   - ค่าน้อยที่สุดเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f

39. **หลักการทั่วไปในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด**

1) ทำความเข้าใจปัญหาอย่างละเอียด ว่ามีปริมาณใดบ้างที่เกี่ยวข้องกัน และเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่แทนปริมาณที่เกี่ยวข้องให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันบนช่วงที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ปัญหา
2) หาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนั้น

40. **บทนิยาม 9**

ให้ f เป็นฟังก์ชัน ถ้า F เป็นฟังก์ชันซึ่ง $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในโดเมนของ f แล้วจะเรียกฟังก์ชัน F ว่าเป็น **ปฏิยานุพันธ์** หนึ่งของฟังก์ชัน f

41. $F(x)+c$ เป็นรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x)dx$ เรียกว่า **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต** ของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x เรียกสั้น ๆ ว่า ปริพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x

ดังนั้น ถ้า $F'(x) = f(x)$

แล้ว $\int f(x)dx = F(x)+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

กล่าวคือ ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ f ก็คือ รูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของ f นั่นเอง

เรียกการหา $\int f(x)dx$ ว่า **การหาปริพันธ์** เรียกเครื่องหมาย " $\int$ " ว่า **เครื่องหมายปริพันธ์** และเรียก $f(x)$ ว่า **ปริพัทธ์** โดยสัญลักษณ์ dx คือ การบอกว่าหาปริพันธ์นี้เทียบกับตัวแปร x

เครื่องหมายปริพันธ์

$$\int f(x)dx = \underbrace{F(x)+c}$$

ปริพัทธ์

รูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f

42. **สูตรสำหรับหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันบางฟังก์ชัน**

สูตรที่ 1 ถ้า k เป็นค่าคงตัว แล้ว $\int k\,dx = kx + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

สูตรที่ 2 ถ้า a เป็นจำนวนจริงและ $a \neq -1$ แล้ว $\int x^a\,dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

สูตรที่ 3 ถ้า k เป็นค่าคงตัว แล้ว $\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx$

สูตรที่ 4 $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

สูตรที่ 5 $\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

43. ถ้า $k_1, k_2, \ldots, k_n$ เป็นค่าคงตัว แล้ว

$$\int (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x))dx = k_1\int f_1(x)dx + k_2\int f_2(x)dx + \cdots + k_n\int f_n(x)dx$$

44. ในการหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f เมื่อกำหนด $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ มาให้ สามารถทำได้ดังนี้

จาก $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$

ดังนั้น $\int \dfrac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx$

หรือ $y = \int f(x)dx$

45. **ปริพันธ์จำกัดเขต** ของฟังก์ชัน f บนช่วงปิด $[a, b]$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

เรียก a ว่า **ลิมิตล่าง** ของปริพันธ์ และเรียก b ว่า **ลิมิตบน** ของปริพันธ์

46. **ทฤษฎีบท 13 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส**

กำหนด f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f แล้ว $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

47. กำหนดให้ $F(x)\Big|_a^b$ คือ $F(b) - F(a)$

48. **ทฤษฎีบท 14**

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ A เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน X จาก a ถึง b

1) ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แล้ว $A = \int_a^b f(x)\,dx$

2) ถ้า $f(x) \leq 0$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แล้ว $A = -\int_a^b f(x)\,dx$

2.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน

ลิมิตของฟังก์ชัน

กิจกรรม : ลิมิตของฟังก์ชัน

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อสอน เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

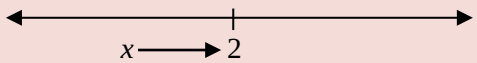
1. ครูให้นักเรียนพิจารณาและยกตัวอย่างประกอบข้อความ “ x เข้าใกล้ 2 แต่ $x \neq 2$ ”

   แนวคำตอบ

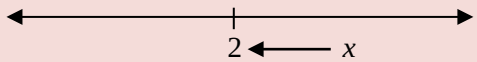
   คำตอบของนักเรียนมีได้หลายแบบ ซึ่งคำตอบของนักเรียนจะมี 2 กลุ่ม คือ กลุ่มค่าของ x ที่มีค่าน้อยกว่า 2 ที่เข้าใกล้ 2 เช่น 1.9 , 1.99, 1.999, … และกลุ่มค่าของ x ที่มีค่ามากกว่า 2 ที่เข้าใกล้ 2 เช่น 2.1 , 2.01, 2.001, …

2. จากคำตอบที่ได้ในข้อ 2 ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อให้ได้ว่า x เข้าใกล้ 2 แต่ $x \neq 2$ สามารถสรุปได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

   - กรณีที่ x เข้าใกล้ 2 แต่ $x \neq 2$ โดยที่ $x < 2$ จะเรียกว่า x เข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย แทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to 2^-$

   - กรณีที่ x เข้าใกล้ 2 แต่ $x \neq 2$ โดยที่ $x > 2$ จะเรียกว่า x เข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา แทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to 2^+$

3. ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า x เข้าใกล้ 2 แต่ $x \neq 2$ เป็นการพิจารณา x ที่เข้าใกล้ 2 ทั้งทางด้านซ้ายและขวาของ 2 ($x < 2$ และ $x > 2$) แทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to 2$

4. ครูจับคู่นักเรียนแบบคละความสามารถ แล้วให้นักเรียนแต่ละคู่เปิดไฟล์ ipst.me/11546
5. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่ศึกษาการหาค่าของฟังก์ชัน $y = f(x) = x^2$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย โดยให้นักเรียนคลิกที่รูปสี่เหลี่ยมหน้าข้อความ “x เข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย” จากนั้นคลิกลากปุ่มบนสไลเดอร์ d และสังเกตค่าที่เปลี่ยนไปของ x และ $f(x)$
6. จากข้อ 5 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปให้ได้ว่า “เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย แล้ว $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ 4”
7. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่คลิกที่รูปสี่เหลี่ยมหน้าข้อความ “x เข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย” อีกครั้ง เพื่อซ่อน x และ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย
8. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่ศึกษาการหาค่าของฟังก์ชัน $y = f(x) = x^2$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา โดยให้นักเรียนคลิกที่รูปสี่เหลี่ยมหน้าข้อความ “x เข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา” จากนั้นคลิกลากปุ่มบนสไลเดอร์ e และสังเกตค่าที่เปลี่ยนไปของ x และ $f(x)$
9. จากข้อ 8 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปให้ได้ว่า “เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา แล้ว $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ 4”
10. จากคำตอบที่ได้ในข้อ 7 และ 9 ครูสรุปว่า
    - เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย แล้ว $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ 4 ซึ่งเรียกว่า ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย เท่ากับ 4 เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$
    - เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา แล้ว $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ 4 ซึ่งเรียกว่า ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา เท่ากับ 4 เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$
11. จากข้อ 10 ครูสรุปว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้ายและด้านขวา แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 4 จะกล่าวว่า ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 เท่ากับ 4 เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

12. ครูอธิบายสรุปเกี่ยวกับกรณีทั่วไปดังนี้

- สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง

  ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a ทั้งทางด้านซ้ายและขวาของ a แล้วจะเรียก L ว่า **ลิมิตของ f ที่ a** ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \to a} f(x) = L$ และกล่าวว่า $\lim_{x \to a} f(x)$ มีค่าเท่ากับ L

  แต่ถ้าไม่มีจำนวนจริง L ซึ่ง $f(x)$ เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a แล้วจะกล่าวว่า “ f ไม่มีลิมิตที่ a ” หรือกล่าวว่า “$\lim_{x \to a} f(x)$ ไม่มีค่า”

- สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง

  ถ้า $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_1 เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้ายแล้ว จะเรียก L_1 ว่า **ลิมิตซ้ายของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย** เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$

  ถ้า $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_2 เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา จะเรียก L_2 ว่า **ลิมิตขวาของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา** เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- เมื่อสอนเรื่องลิมิตของ f ที่ a ครูควรให้นักเรียนเข้าใจความหมายของ x เข้าใกล้ a ก่อน ซึ่งสามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี ได้แก่
  - กรณีที่ x เข้าใกล้ a โดยที่ $x<a$ จะเรียกว่า x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย แทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to a^-$
  - กรณีที่ x เข้าใกล้ a โดยที่ $a>2$ จะเรียกว่า x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา แทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to a^+$

  ทั้งนี้ การพิจารณาว่า x เข้าใกล้ a ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to a$ ต้องพิจารณาทั้ง x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้ายและ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา
- การพิจารณาว่า $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ มีค่าหรือไม่ ในตัวอย่างที่ 2 อาจพิจารณาโดยไม่ใช้กราฟได้ดังนี้

  จาก $f(x)=\begin{cases} 1 & ;x\geq 0 \\ -1 & ;x<0 \end{cases}$

  เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย นั่นคือ $x<0$ จะได้ว่า $f(x)=-1$

  ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$

  เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา นั่นคือ $x>0$ จะได้ว่า $f(x)=1$

  ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 1=1$

  จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ไม่มีค่า
- ครูควรเน้นย้ำกับนักเรียนว่า สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ถึงแม้ว่า $f(x)$ เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a แต่ L อาจไม่เท่ากับ $f(a)$ ก็ได้
- การหา $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ โดยใช้ทฤษฎีบท 2 ข้อ 5 จะทำได้ในกรณีที่ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ หาค่าได้ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ เท่านั้น สำหรับกรณีที่ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ อาจหา $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ ได้โดยการจัดรูปของฟังก์ชัน ดังแสดงในตัวอย่างที่ 10 และ 11

- ลิมิต “ไม่มีค่า” ที่กล่าวถึงในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 หมายถึงกรณีที่ลิมิตซ้ายไม่เท่ากับลิมิตขวา สำหรับลิมิตไม่มีค่าในกรณีอื่น ๆ นักเรียนจะได้ศึกษาในระดับอุดมศึกษา
- ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 นี้ สำหรับฟังก์ชัน f ที่มีโดเมนเป็น $[a,b],[a,b),(a,b]$ หรือ (a,b) จะไม่พิจารณา $\lim_{x\to a} f(x)$ และ $\lim_{x\to b} f(x)$ เช่น ฟังก์ชัน $f(x)=\sqrt{x}$ ที่มีโดเมนเป็น $[0,1)$ จะไม่พิจารณา $\lim_{x\to 0} f(x)$ และ $\lim_{x\to 1} f(x)$ แต่นักเรียนจะได้ศึกษาในระดับอุดมศึกษา
- ในการจัดการเรียนรู้ในบทที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น ของหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 จะไม่พิจารณาลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ อย่างไม่มีที่สิ้นสุด $(x\to\infty)$ และลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x ลดลงเรื่อย ๆ อย่างไม่มีที่สิ้นสุด $(x\to-\infty)$ ซึ่งนักเรียนจะได้ศึกษาในระดับอุดมศึกษา
- ในการจัดการเรียนรู้ในบทที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น ของหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 จะไม่กล่าวถึงฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งนักเรียนจะได้ศึกษาในระดับอุดมศึกษา

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

- การหาลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ โดยพิจารณาจากกราฟของฟังก์ชัน เช่น แบบฝึกหัด 2.1ก ข้อ 2 – 6 นั้น ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนให้เหตุผลประกอบการพิจารณาว่าลิมิตของฟังก์ชันในข้อใดมีค่า และลิมิตของฟังก์ชันในข้อใดไม่มีค่า
- การหาลิมิตของฟังก์ชันบางฟังก์ชันโดยใช้ทฤษฎีบท 2 อาจมีลำดับขั้นตอนการหาที่แตกต่างกัน เช่น แบบฝึกหัด 2.1ข ข้อ 1 4) อาจหาคำตอบโดย

วิธีที่ 1 จาก $\lim\limits_{x\to -1}\left((x+3)(x^2+2)\right) = \left(\lim\limits_{x\to -1}(x+3)\right)\left(\lim\limits_{x\to -1}(x^2+2)\right)$ (ท.บ.2 ข้อ 4)

$= \left(\lim\limits_{x\to -1} x + \lim\limits_{x\to -1} 3\right)\left(\lim\limits_{x\to -1} x^2 + \lim\limits_{x\to -1} 2\right)$ (ท.บ.2 ข้อ 2)

$= (-1+3)\left((-1)^2+2\right)$ (ท.บ.1)

$= 6$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -1}\left((x+3)(x^2+2)\right) = 6$

วิธีที่ 2 จาก $(x+3)(x^2+2) = x^3+3x^2+2x+6$

จะได้ $\lim\limits_{x\to -1}\left((x+3)(x^2+2)\right)$

$= \lim\limits_{x\to -1}\left(x^3+3x^2+2x+6\right)$

$= \lim\limits_{x\to -1} x^3 + \lim\limits_{x\to -1}(3x^2) + \lim\limits_{x\to -1}(2x) + \lim\limits_{x\to -1} 6$ (ท.บ.2 ข้อ 2)

$= \lim\limits_{x\to -1} x^3 + 3\lim\limits_{x\to -1} x^2 + 2\lim\limits_{x\to -1} x + \lim\limits_{x\to -1} 6$ (ท.บ.2 ข้อ 1)

$= (-1)^3 + 3(-1)^2 + 2(-1) + 6$ (ท.บ.1)

$= 6$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -1}\left((x+3)(x^2+2)\right) = 6$

- การหาลิมิตของฟังก์ชันที่มีการกำหนดโดเมนออกเป็นช่วงย่อยมากกว่า 1 ช่วง เช่น ในแบบฝึกหัด 2.1ข ข้อ 4 ครูควรตรวจสอบว่านักเรียนเลือกใช้ค่าของฟังก์ชันได้ตรงกับช่วงย่อยที่พิจารณาหรือไม่ เช่น เมื่อพิจารณา $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ ในข้อ 2) ต้องเลือกใช้ $f(x) = x^2$

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

- นักเรียนบางคนอาจเข้าใจผิดเกี่ยวกับสัญลักษณ์ $x \to a^-$ และ $x \to a^+$ ว่า $x \to 2^-$ หมายถึง x เข้าใกล้ -2 ทั้งนี้ ครูควรย้ำนักเรียนว่า $x \to a^-$ แสดงถึงการพิจารณาค่าของ x ที่น้อยกว่า a และ $x \to a^+$ แสดงถึงการพิจารณาค่าของ x ที่มากกว่า a

- นักเรียนบางคนอาจเข้าใจผิดว่า $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ เสมอ ทั้งนี้ครูควรยกตัวอย่างฟังก์ชันที่ $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ เช่น ฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 1 \ , & x \neq 0 \\ 0 \ , & x = 0 \end{cases}$ มี $f(0) = 0$ แต่ $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ จะเห็นว่า $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

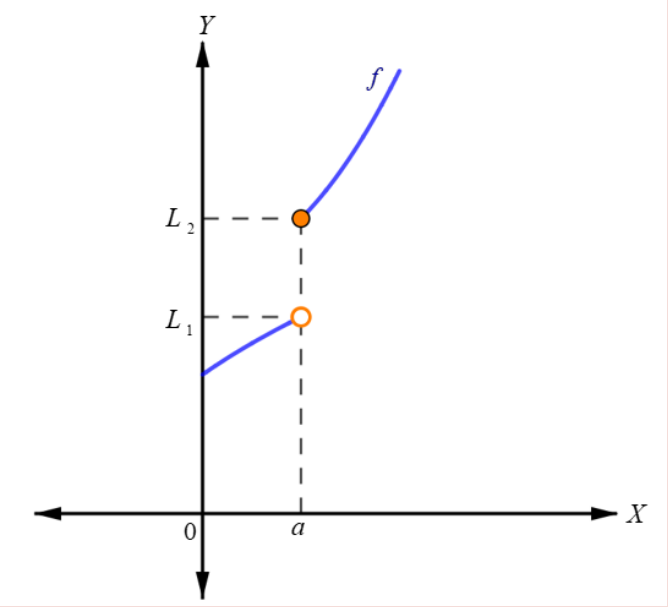
กิจกรรม : ฟังก์ชันต่อเนื่อง

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

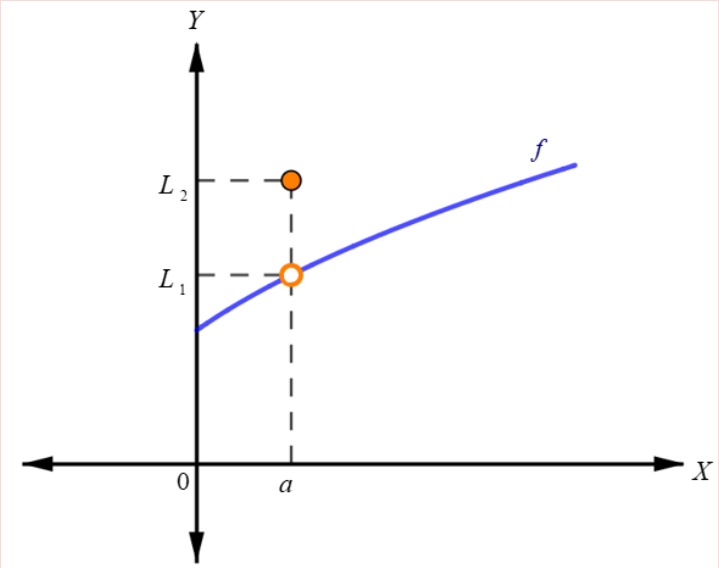
กิจกรรมนี้ใช้เพื่อสอน เรื่อง ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

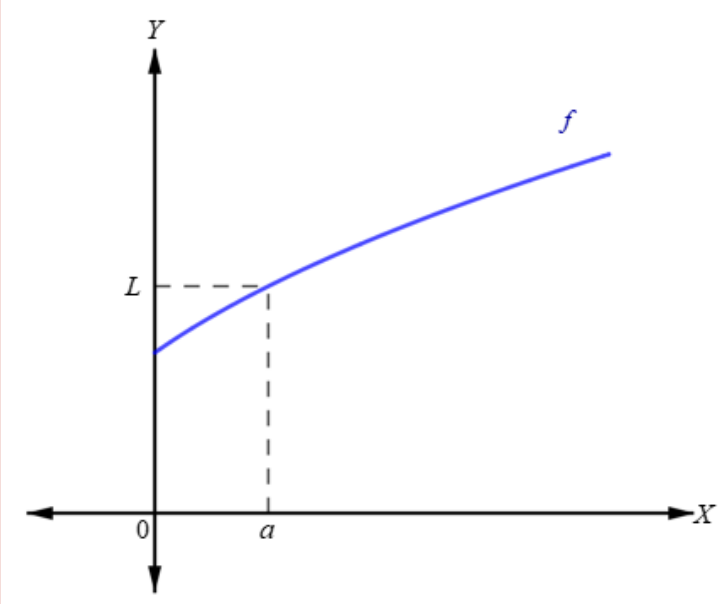
1. ครูจับคู่นักเรียนแบบคละความสามารถ จากนั้นครูแสดงกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้



รูปที่ 1



รูปที่ 2



รูปที่ 3

2. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่พิจารณากราฟของฟังก์ชันในแต่ละรูปที่กำหนดให้ในข้อ 1 และเติมข้อมูลลงในตารางต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

รูปที่	$\lim_{x\to a^-} f(x)$	$\lim_{x\to a^+} f(x)$	$\lim_{x\to a} f(x)$	$f(a)$
1				
2				
3				

แนวคำตอบ

รูปที่	$\lim_{x\to a^-} f(x)$	$\lim_{x\to a^+} f(x)$	$\lim_{x\to a} f(x)$	$f(a)$
1	L_1	L_2	ไม่มีค่า	L_2
2	L_1	L_1	L_1	L_2
3	L	L	L	L

3. จากคำตอบที่ได้ในข้อ 2 ครูให้นักเรียนพิจารณาว่าฟังก์ชัน f รูปใดที่ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

แนวคำตอบ

รูปที่ 3

4. ครูอธิบายว่าฟังก์ชัน f ที่มีสมบัติ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ ดังนั้น ฟังก์ชัน f ในรูปที่ 3 เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$

5. ครูและนักเรียนร่วมกันสังเกตลักษณะกราฟของฟังก์ชันในรูปที่ $1-3$ ในประเด็นต่อไปนี้
   - กราฟของฟังก์ชันในแต่ละรูปขาดตอนหรือไม่
   - โดเมนของฟังก์ชันในแต่ละรูปมีการแบ่งเป็นช่วงย่อยหรือไม่

แนวคำตอบ

กราฟของฟังก์ชัน f ในรูปที่ 1 มีลักษณะขาดตอน และโดเมนของฟังก์ชันแบ่งออกเป็น 2 ช่วงย่อย ได้แก่ $x < a$ และ $x \geq a$

กราฟของฟังก์ชัน f ในรูปที่ 2 มีลักษณะขาดตอน และโดเมนของฟังก์ชันแบ่งออกเป็น 2 ช่วงย่อย ได้แก่ $x = a$ และ $x \neq a$

กราฟของฟังก์ชัน f ในรูปที่ 3 มีลักษณะไม่ขาดตอน และโดเมนของฟังก์ชันไม่มีการแบ่งเป็นช่วงย่อย

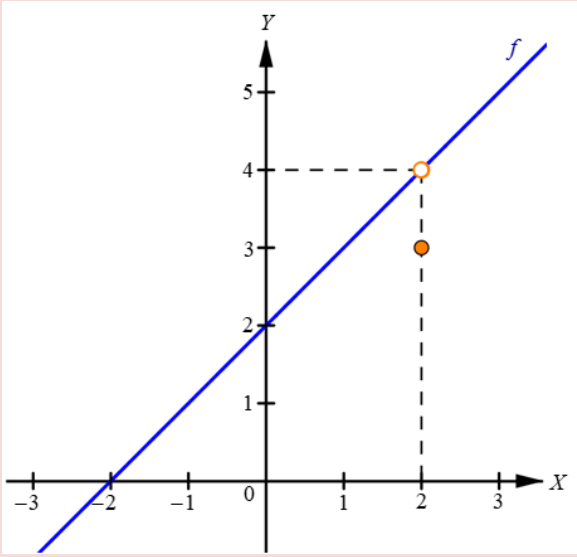
6. ครูอธิบายเกี่ยวกับบทนิยามของความต่อเนื่องของฟังก์ชันตามบทนิยาม 1

หมายเหตุ

- จากคำตอบที่ได้ในข้อ 2 และ 3 ครูอาจอธิบายเพิ่มเติมว่า
  - จากรูปที่ 1 จะเห็นว่า $f(a)$ หาค่าได้ (f นิยามที่ a) แต่ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ไม่มีค่า
  - จากรูปที่ 2 จะเห็นว่า $f(a)$ หาค่าได้ (f นิยามที่ a) และ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ มีค่า แต่ $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$
- ฟังก์ชัน f ในรูปที่ 1 และ 2 เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = a$
- ครูอาจเปลี่ยนกราฟของฟังก์ชันที่ให้นักเรียนพิจารณาในข้อ 1 เป็นรูปแบบอื่น

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

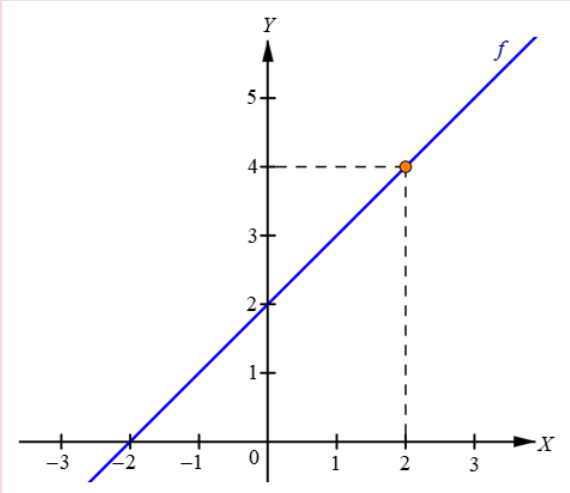
- ในการยกตัวอย่างฟังก์ชันเพื่อให้นักเรียนตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = c$ ครูควรเลือกฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$
- การพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = c$ หรือไม่ อาจพิจารณาโดยใช้กราฟ เช่น ฟังก์ชัน f ในตัวอย่างที่ 14 เขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟจะเห็นว่า $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ แต่ $f(2) = 3$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

และฟังก์ชัน f ในตัวอย่างที่ 15 เขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟจะเห็นว่า $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ และ $f(2) = 4$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$

- การตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันในตัวอย่างที่ 17 อาจทำได้ดังนี้

  จาก $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

  จะได้ $f(0) = \dfrac{0^2-9}{0^2-5(0)+6} = -\dfrac{9}{6} = -\dfrac{3}{2}$

  และ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

  เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-5x+6\right)=6\neq 0$ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้

  $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \frac{0^2-9}{0^2-5(0)+6} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$$

  เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

  ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$

- ครูควรเน้นย้ำเกี่ยวกับการแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a,b) นั้น จะต้องแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง (a,b) โดยสมมติให้ c เป็นจุดใด ๆ ในช่วง (a,b) แล้วแสดงว่า f ต่อเนื่องที่ $x=c$
- สำหรับฟังก์ชัน f ที่ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b],(a,b]$ หรือ $[a,b)$ จะมีความต่อเนื่องที่จุดปลายของช่วงเป็นดังนี้
  - สำหรับฟังก์ชัน f ที่ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ซึ่ง $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ และ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$ นั้น จะได้ว่า f ต่อเนื่องทางด้านขวาที่ $x=a$ และ f ต่อเนื่องทางด้านซ้ายที่ $x=b$ ตามลำดับ
  - สำหรับฟังก์ชัน f ที่ต่อเนื่องบนช่วง $(a,b]$ ซึ่ง $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$ นั้น จะได้ว่า f ต่อเนื่องทางด้านซ้ายที่ $x=b$
  - สำหรับฟังก์ชัน f ที่ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b)$ ซึ่ง $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ นั้น จะได้ว่า f ต่อเนื่องทางด้านขวาที่ $x=a$

หมายเหตุ

- f ต่อเนื่องทางด้านขวาที่ $x=a$ คือ f is continuous from the right at $x=a$
- f ต่อเนื่องทางด้านซ้ายที่ $x=b$ คือ f is continuous from the left at $x=b$

- ช่วงที่พิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชันต้องเป็นสับเซตของโดเมนของฟังก์ชันนั้น เช่น ตัวอย่างที่ 18 – 19

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

การพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน g บนช่วง $(-\infty, 1]$ ในแบบฝึกหัด 2.2 ข้อ 4 ซึ่งมีขั้นตอนการพิจารณา ได้แก่

1) g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง $(-\infty, 1)$ และ

2) $\lim_{x \to 1^-} g(x) = g(1)$

เนื่องจากฟังก์ชัน g ที่กำหนดให้ มีโดเมนเป็นช่วงย่อย 3 ช่วง ได้แก่ $(-\infty, -2), [-2, 1]$ และ $(1, \infty)$ ดังนั้น การพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน g ที่ทุกจุดในช่วง $(-\infty, 1)$ ต้องพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน g บนช่วง $(-\infty, -2)$ และ $[-2, 1)$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- การแก้ปัญหาเกี่ยวกับอัตราการเปลี่ยนแปลงที่สอดคล้องกับชีวิตจริง ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนแปลความหมายจากผลลัพธ์ที่ได้ เช่น จากตัวอย่างที่ 20 ซึ่งอัตราการเปลี่ยนแปลงของ V เทียบกับ r เป็นจำนวนจริงบวก แสดงว่าเมื่อ r เพิ่มขึ้น $V(r)$ จะเพิ่มขึ้น จึงอธิบายได้ว่าเมื่อความยาวของรัศมีของลูกบอลเพิ่มขึ้น ปริมาตรของลมในลูกบอลจะเพิ่มขึ้น แต่ในตัวอย่างที่ 21 ซึ่งอัตราการเปลี่ยนแปลงของ Q เทียบกับ t เป็นจำนวนจริงลบ แสดงว่าเมื่อ t เพิ่มขึ้น $Q(t)$ จะลดลง จึงอธิบายได้ว่าเมื่อเวลาเพิ่มขึ้นปริมาตรของน้ำในสระจะลดลง

- นักเรียนสามารถเลือกใช้สัญลักษณ์แทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ด้วย $f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}f(x)$ หรือ y' โดยในกรณีที่ใช้สัญลักษณ์ y' ครูควรชี้แนะให้นักเรียนระมัดระวังว่า เป็นการเขียนแทนอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีการละตัวแปรต้นไว้ ซึ่งนักเรียนควรทราบว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้มีตัวแปรใดเป็นตัวแปรต้น เช่น

  สมการ $y = f(x)$ ดังนั้น y' จะแทนอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร x

  สมการ $y = g(t)$ ดังนั้น y' จะแทนอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร t
- สำหรับฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x ใด ๆ ในโดเมน จะพบว่า ฟังก์ชันนั้นต่อเนื่องที่ x ด้วย แต่ในทางกลับกัน ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x อาจหาค่าอนุพันธ์ที่ x ไม่ได้ เช่น ฟังก์ชัน $f(x) = |x|$ พบว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$ $(\lim_{x \to 0} f(x) = f(0))$ แต่จากตัวอย่างที่ 25 จะเห็นว่า $f'(0)$ ไม่มีค่า

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

ปริมาตรของกรวยกลมตรงในแบบฝึกหัด 2.3 ข้อ 8 หาได้จาก $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ เมื่อ r แทนความยาวของรัศมีของฐาน และ h แทนส่วนสูง ทั้งนี้ ในข้อ 1) กำหนดให้ส่วนสูงเป็นค่าคงตัว ดังนั้น V เป็นฟังก์ชันของตัวแปร r ในทำนองเดียวกัน ข้อ 2) V เป็นฟังก์ชันของตัวแปร h

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ครูควรยกตัวอย่างฟังก์ชันที่จะหาอนุพันธ์โดยใช้สูตรที่ 4 – 8 ให้สอดคล้องกับความรู้พื้นฐานของนักเรียน
- การหา $f'(a)$ โดยใช้สูตร จะต้องหา $f'(x)$ ก่อน แล้วจึงแทน x ด้วย a ดังแสดงในตัวอย่างที่ 33
- การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่จุดแบ่งของช่วงในกรณีที่ฟังก์ชันมีการกำหนดโดเมนออกเป็นช่วงย่อยมากกว่า 1 ช่วง นั้น ไม่สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่จุดแบ่งของช่วงโดยใช้สูตรได้ แต่ต้องใช้บทนิยาม 3 ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

- นักเรียนบางคนอาจเข้าใจผิดว่า อนุพันธ์ของผลคูณเท่ากับผลคูณของอนุพันธ์ของแต่ละฟังก์ชัน เช่น นักเรียนเข้าใจผิดว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y=(2x+1)(2x-1)$ คือ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(2x+1)\cdot\frac{d}{dx}(2x-1)=2(2)=4$ ในกรณีนี้ ครูควรแสดงรายละเอียดการหาอนุพันธ์ของผลคูณโดยใช้สูตรที่ 7 ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left((2x+1)(2x-1)\right)\\ &= (2x+1)\frac{d}{dx}(2x-1)+(2x-1)\frac{d}{dx}(2x+1)\\ &= (2x+1)(2)+(2x-1)(2)\\ &= 8x\end{aligned}$$

- นักเรียนบางคนอาจเข้าใจผิดว่า อนุพันธ์ของผลหารเท่ากับผลหารของอนุพันธ์ของแต่ละฟังก์ชัน เช่น นักเรียนเข้าใจผิดว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y=\frac{x^2}{x-2}$ คือ $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d}{dx}\left(x^2\right)}{\frac{d}{dx}(x-2)}=2x$

  ในกรณีนี้ ครูควรแสดงรายละเอียดการหาอนุพันธ์ของผลหารโดยใช้สูตรที่ 8 ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{x-2}\right)\\ &= \frac{(x-2)\frac{d}{dx}\left(x^2\right)-\left(x^2\right)\frac{d}{dx}(x-2)}{(x-2)^2}\\ &= \frac{(x-2)(2x)-x^2}{(x-2)^2}\\ &= \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}\end{aligned}$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

นักเรียนอาจประสบปัญหาในการกำหนดฟังก์ชัน u ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และเขียนฟังก์ชัน y ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันของตัวแปร u เมื่อกำหนด y เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x ดังนั้น ครูควรให้นักเรียนฝึกทักษะเพิ่มเติม ตามลำดับขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 กำหนดฟังก์ชัน u ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x

ขั้นที่ 2 เขียนฟังก์ชัน y ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันของตัวแปร u

(ฟังก์ชัน y ต้องเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์โดยใช้สูตรได้)

เช่น สำหรับฟังก์ชัน $y=\sqrt{2x-1}$ สามารถทำได้ดังนี้

วิธีที่	ขั้นที่ 1	ขั้นที่ 2
1	ให้ $u = 2x$	จะได้ $y = \sqrt{u-1}$
2	ให้ $u = 2x-1$	จะได้ $y = \sqrt{u}$

จะเห็นว่าในขั้นที่ 2 ของวิธีที่ 1 ฟังก์ชัน $y = \sqrt{u-1}$ ไม่สามารถหาอนุพันธ์โดยใช้สูตรได้โดยตรง แต่ในขั้นที่ 2 ของวิธีที่ 2 ฟังก์ชัน $y = \sqrt{u}$ สามารถหาอนุพันธ์โดยใช้สูตรได้ ดังนั้นควรเลือก $u = 2x-1$

เส้นสัมผัสเส้นโค้ง

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- การหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P(a, f(a))$ หรือความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P(a, f(a))$ ครูควรตระหนักว่าจะพิจารณาเฉพาะจุดที่ $f'(a)$ หาค่าได้
- การแก้ปัญหาเกี่ยวกับเส้นสัมผัสเส้นโค้งบางปัญหาต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ ดังนั้นครูควรทบทวนเนื้อหาที่เกี่ยวข้องให้กับนักเรียนด้วย
- จากหมายเหตุในตัวอย่างที่ 42 สามารถใช้ความรู้เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ในการหาความชันและสมการของเส้นสัมผัสวงกลมได้ ดังนี้

  จากสมการวงกลม $x^2 + y^2 = 25$

  จะได้ว่า วงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ และมีรัศมียาว 5 หน่วย

  เนื่องจาก จุด $(-3, 4)$ อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมนี้

  จะได้ว่า ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่าง $(0, 0)$ และ $(-3, 4)$ เป็นรัศมีของวงกลม

  ซึ่งมีความชันเป็น $\dfrac{4-0}{-3-0} = -\dfrac{4}{3}$

เนื่องจาก รัศมีของวงกลมที่ลากผ่าน $(-3, 4)$ ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดนั้น จะได้ว่า ผลคูณของความชันของรัศมีวงกลมที่ลากผ่าน $(-3, 4)$ กับความชันของเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดนั้นเป็น -1

เนื่องจาก รัศมีของวงกลมที่ลากผ่าน $(-3, 4)$ มีความชันเป็น $-\frac{4}{3}$

จะได้ว่า เส้นสัมผัสวงกลมที่ $(-3, 4)$ มีความชันเป็น $\frac{3}{4}$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด $(-3, 4)$ คือ $y-4=\frac{3}{4}(x-(-3))$

หรือ $y=\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$

อนุพันธ์อันดับสูง

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

การหาอนุพันธ์อันดับสูงที่ $x=a$ จะต้องหาอนุพันธ์อันดับสูงที่ x ก่อน แล้วจึงแทน x ด้วย a ดังแสดงในตัวอย่างที่ 48

การประยุกต์ของอนุพันธ์

กิจกรรม : ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งของฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อสอน เรื่อง ความชันของฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูทบทวนบทนิยาม 4
2. ครูจับคู่นักเรียนแบบคละความสามารถ จากนั้นครูให้นักเรียนเปิดเว็บไซต์ ipst.me/11547
3. ครูให้นักเรียนสำรวจความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งบนช่วง (a, b), (b, c), (c, d) และ (d, e) โดยคลิกลากจุด P ไปตามแนวเส้นโค้ง พร้อมทั้งสังเกตความชันของเส้นโค้งที่จุด P ซึ่งแสดงบนหน้าจอ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

   3.1 ช่วงใดบ้างที่ความชันของเส้นโค้งเป็นจำนวนจริงบวก

   แนวคำตอบ ช่วง (b, c) และ (d, e)

   3.2 ช่วงใดบ้างที่ความชันของเส้นโค้งเป็นจำนวนจริงลบ

   แนวคำตอบ ช่วง (a, b) และ (c, d)
4. ครูทบทวนความรู้ของนักเรียนเกี่ยวกับฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด
5. จากข้อ 2 ครูให้นักเรียนหาว่าช่วงใดบ้างที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

   แนวคำตอบ

   - f เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง (b, c) และ (d, e)
   - f เป็นฟังก์ชันลดในช่วง (a, b) และ (c, d)

6. ครูให้นักเรียนเปรียบเทียบคำตอบที่ได้ในข้อ 3 และข้อ 5 โดยเติมข้อมูลลงในตารางต่อไปนี้

ช่วง	ความชันของเส้นโค้ง เป็นจำนวนจริงบวก/ ลบ	ฟังก์ชันเพิ่ม/ ลด
(a, b)		
(b, c)		
(c, d)		
(d, e)		

แนวคำตอบ

ช่วง	ความชันของเส้นโค้ง เป็นจำนวนจริงบวก/ ลบ	ฟังก์ชันเพิ่ม/ ลด
(a, b)	เป็นจำนวนจริงลบ	ฟังก์ชันลด
(b, c)	เป็นจำนวนจริงบวก	ฟังก์ชันเพิ่ม
(c, d)	เป็นจำนวนจริงลบ	ฟังก์ชันลด
(d, e)	เป็นจำนวนจริงบวก	ฟังก์ชันเพิ่ม

7. ครูอธิบายสรุปว่า ถ้าทุก ๆ จุดในช่วงมีความชันของเส้นโค้งเป็นจำนวนจริงบวก แล้วฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วงนั้น ในทางตรงกันข้าม ถ้าทุก ๆ จุดในช่วงมีความชันของเส้นโค้งเป็นจำนวนจริงลบ แล้วฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันลดในช่วงนั้น
8. ครูอธิบายทฤษฎีบท 8

กิจกรรม : ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และจุดวิกฤต

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้สอนทฤษฎีบท 9 บทนิยาม 7 และทฤษฎีบท 10 ทั้งนี้ครูควรทบทวนความหมายของค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ในบทนิยาม 6 ก่อนให้นักเรียนทำกิจกรรม

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูจับคู่นักเรียนแบบคละความสามารถ จากนั้น ครูให้นักเรียนเปิดเว็บไซต์ ipst.me/11548
2. จากกราฟของฟังก์ชัน f ที่แสดงบนหน้าจอ ครูให้นักเรียนหาจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f

   แนวคำตอบ

   - ฟังก์ชัน f มีจุดสูงสุดสัมพัทธ์อยู่ที่จุด $B(-1, 3)$ หรือที่ $x=-1$
   - ฟังก์ชัน f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์อยู่ที่จุด $A(-8, -1)$ และ $C(6, -4)$ หรือ $x=-8$ และ $x=6$ ตามลำดับ
3. ครูให้นักเรียนสำรวจความชันของเส้นโค้งของฟังก์ชัน f ที่จุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยคลิกลากจุด P ไปตามแนวเส้นโค้ง แล้วหาความชันของเส้นโค้งของฟังก์ชันที่จุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์แต่ละจุด

   แนวคำตอบ

   - ความชันของเส้นโค้งของฟังก์ชัน f ที่จุดสูงสุดสัมพัทธ์ B เท่ากับ 0
   - ความชันของเส้นโค้งของฟังก์ชัน f ที่จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ A เท่ากับ 0
   - ความชันของเส้นโค้งของฟังก์ชัน f ที่จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ C เท่ากับ 0
4. ครูอธิบายเชื่อมโยงคำตอบที่ได้จากข้อ 3 กับบทนิยาม 4 ดังนี้
   - ที่จุดสูงสุดสัมพัทธ์ B จะได้ว่า $f'(-1)=0$
   - ที่จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ A จะได้ว่า $f'(-8)=0$
   - ที่จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ A จะได้ว่า $f'(6)=0$

5. จากคำตอบที่ได้ในข้อ 4 ครูอธิบายสรุปทฤษฎีบท 9 จากนั้นแนะนำค่าวิกฤตและจุดวิกฤตในบทนิยาม 7
6. ครูให้นักเรียนหาค่าวิกฤตและจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f ในข้อ 1

   แนวคำตอบ

   - ค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f คือ $-8, -1$ และ 6
   - จุดวิกฤตของฟังก์ชัน f คือ $(-8, -1), (-1, 3)$ และ $(6, -4)$
7. ครูให้นักเรียนสำรวจการเปลี่ยนแปลงค่าของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f รอบ ๆ จุดวิกฤต โดยคลิกลากจุด P ไปตามแนวเส้นโค้ง จากด้านซ้ายไปด้านขวาของจุดวิกฤตแต่ละจุด และหาว่าค่าของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f มีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร

   แนวคำตอบ

   - ที่จุดวิกฤต $(-8, -1)$ พบว่า ค่าของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เปลี่ยนจากจำนวนจริงลบเป็นจำนวนจริงบวก
   - ที่จุดวิกฤต $(-1, 3)$ พบว่า ค่าของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เปลี่ยนจากจำนวนจริงบวกเป็นจำนวนจริงลบ
   - ที่จุดวิกฤต $(6, -4)$ พบว่า ค่าของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เปลี่ยนจากจำนวนจริงลบเป็นจำนวนจริงบวก
8. ครูอธิบายสรุปทฤษฎีบท 10

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ความเร็วและอัตราเร็วในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 มีความหมายไม่แตกต่างกันและสามารถใช้แทนกันได้ แต่ในวิชาฟิสิกส์ความเร็วและอัตราเร็วมีความหมายที่แตกต่างกัน โดยความเร็วเป็นปริมาณเวกเตอร์ ส่วนอัตราเร็วเป็นปริมาณสเกลาร์

- การหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ สามารถทำได้โดยใช้บทนิยาม 6 หรือ ทฤษฎีบท 10 หรือ ทฤษฎีบท 11 แต่การใช้ทฤษฎีบท 11 มีข้อจำกัดที่ค่าวิกฤต c ของฟังก์ชัน f ซึ่ง $f'(c)=0$ และ $f''(c)$ มีค่าและไม่เท่ากับ 0 เช่น ในการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=x^4-2x^3$ ทำได้ดังนี้

  จาก $f(x)=x^4-2x^3$

  จะได้ $f'(x)=4x^3-6x^2=x^2(4x-6)$

  ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=0$ หรือ $x=\frac{3}{2}$

  จะได้ว่า ค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f มี 2 ค่า คือ 0 และ $\frac{3}{2}$

  ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่สองของฟังก์ชัน f จะได้ $f''(x)=12x^2-12x$

  เนื่องจาก $f''(0)=0$ และ $f''\left(\frac{3}{2}\right)=9$

  จากทฤษฎีบท 11 จะได้ว่า $f'\left(\frac{3}{2}\right)=0$ และ $f''\left(\frac{3}{2}\right)=9$ ซึ่งมากกว่า 0

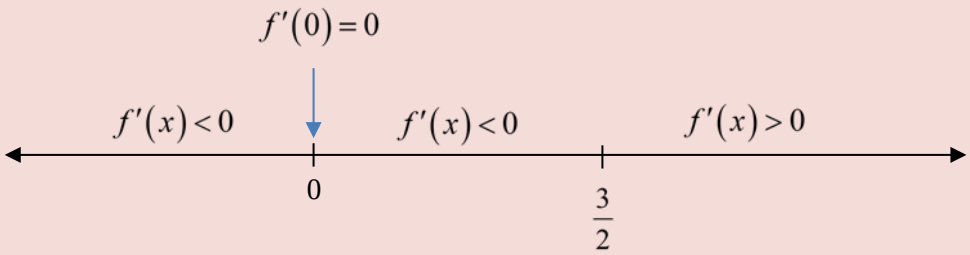
  ดังนั้น f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=\frac{3}{2}$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $f\left(\frac{3}{2}\right)$

  แต่ในกรณีที่ $x=0$ จะได้ $f''(0)=0$ จึงไม่สามารถใช้ทฤษฎีบท 11 ได้

  ดังนั้น จะพิจารณาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์โดยใช้ทฤษฎีบท 10 ดังนี้

  จาก $f'(x)=4x^3-6x^2$ และค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f มี 2 ค่า คือ 0 และ $\frac{3}{2}$

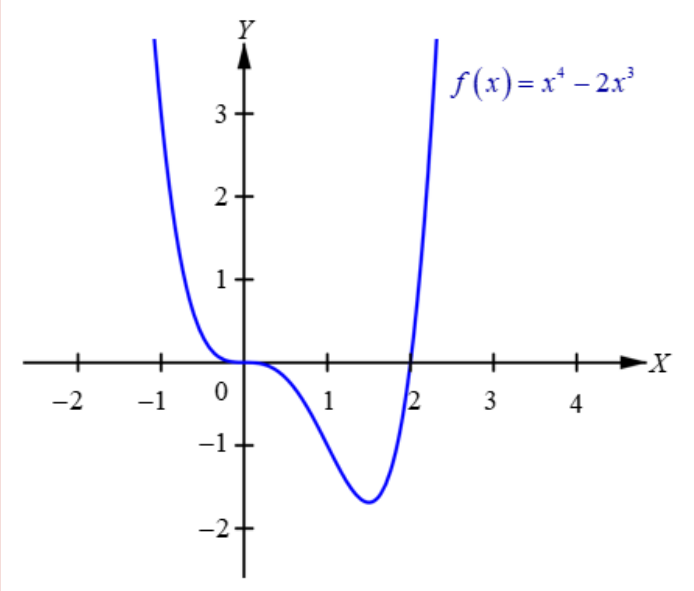
  จะได้ว่า การเปลี่ยนแปลงของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เป็นดังนี้



จากรูป จะเห็นว่าค่าของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f รอบ $x=0$ ไม่มีการเปลี่ยนแปลงจากจำนวนจริงบวกเป็นจำนวนจริงลบ หรือไม่มีการเปลี่ยนแปลงจากจำนวนจริงลบเป็นจำนวนจริงบวก

ดังนั้น $x=0$ เป็นค่าวิกฤตที่ไม่ได้ทำให้ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

ดังจะเห็นได้จากกราฟของฟังก์ชัน f ดังนี้



- การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดในหัวข้อ 2.8.3 ครูควรเน้นย้ำว่าการกำหนดโดเมนของฟังก์ชันต้องพิจารณาบริบทของปัญหาด้วย เช่น ตัวอย่างที่ 56 ซึ่งกำหนดฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่และความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก จะได้ว่า 0 ไม่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชันนี้ เนื่องจากความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากต้องมากกว่า 0 หน่วย และในตัวอย่างที่ 59 ซึ่งกำหนดฟังก์ชันแทนรายได้ต่อวันของเจ้าของโรงแรม จะได้ว่า 0 อยู่ในโดเมนของฟังก์ชันนี้ เนื่องจากเจ้าของโรงแรมอาจไม่ขึ้นราคาค่าห้องพักต่อวัน

ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ในการหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ นักเรียนอาจหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ได้แตกต่างกัน ครูควรให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบที่ได้โดยหาอนุพันธ์ของคำตอบที่ได้แล้วพิจารณาว่าเท่ากับฟังก์ชัน f หรือไม่ เช่น นักเรียนอาจตอบว่าปฏิยานุพันธ์ของ $2x-\frac{1}{x^2}$ คือ $x^2+\frac{1}{x}+c$ หรือ $x^2+x^{-1}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว ทั้งนี้ ครูควรชี้แนะให้นักเรียนตรวจสอบโดยหาอนุพันธ์ของปฏิยานุพันธ์ที่ได้ ซึ่งจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+\frac{1}{x}+c\right) = 2x-\frac{1}{x^2}$$

และ

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+x^{-1}+c\right) = 2x-\frac{1}{x^2}$$

จะเห็นว่า อนุพันธ์ของคำตอบทั้งสองเท่ากัน ซึ่งเท่ากับ $2x-\frac{1}{x^2}$

- การหาปฏิยานุพันธ์ของ $\frac{1}{x}$ หรือ x^{-1} ไม่สามารถทำได้โดยใช้สูตรที่ 2 ทั้งนี้นักเรียนจะได้ศึกษาในระดับอุดมศึกษาต่อไป
- ตัวอย่างที่ 74 ข้อ 3) จะได้คำตอบจากการแก้สมการกำลังสองเป็น $t=0$ หรือ $t=4$ แต่ $t=0$ คือ เวลาเริ่มต้นโยนวัตถุไม่ใช่เวลาที่วัตถุตกถึงพื้นดิน ดังนั้นเมื่อเวลาผ่านไป 4 วินาที วัตถุจึงจะตกถึงพื้นดิน

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

นักเรียนอาจเข้าใจผิดว่า $\int \frac{dy}{dx}dx = \int \frac{dy}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = \int dy$ ทั้งนี้ ครูควรชี้แจงว่า $\frac{dy}{dx}$ ไม่ใช่เศษส่วน แต่เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนอนุพันธ์อันดับ 1 ของ y เทียบกับ x แต่ $\int \frac{dy}{dx}dx$ คือ การหาปริพันธ์ที่มี $\frac{dy}{dx}$ เป็นปริพัทธ์ และมี dx เป็นสัญลักษณ์ที่บอกว่าการหาปริพันธ์นี้เทียบกับตัวแปร x

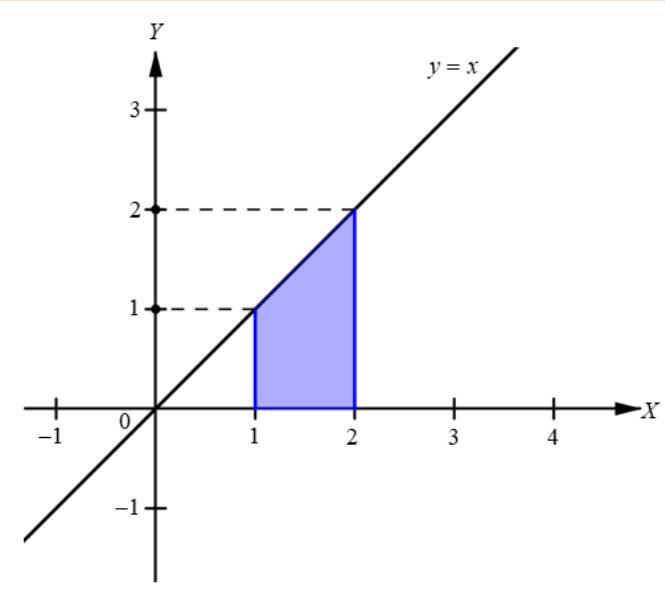
ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

- การหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันในแบบฝึกหัด 2.9 ข้อ 2 อาจต้องจัดรูปฟังก์ชันที่กำหนดให้ ก่อนใช้สูตรการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต เช่น ข้อ 8) สามารถจัดรูป $x^2(x-3)$ ได้เป็น x^3-3x^2
- แบบฝึกหัด 2.9 ข้อ 7 3) จะได้คำตอบจากการแก้สมการกำลังสองเป็น $t=3$ หรือ $t=17$ ซึ่งเป็นไปได้ทั้ง 2 คำตอบ โดย $t=3$ เป็นเวลาที่วัตถุกำลังเคลื่อนที่ขึ้นและอยู่ในตำแหน่งที่สูงจากพื้นดิน 249.9 เมตร และ $t=17$ เป็นเวลาที่วัตถุกำลังเคลื่อนที่ลงและอยู่ในตำแหน่งที่สูงจากพื้นดิน 249.9 เมตร

ปริพันธ์จำกัดเขตและพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ครูอาจเริ่มต้นการสอนเกี่ยวกับพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งโดยยกตัวอย่างการหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y=x$, แกน X, เส้นตรง $x=1$ ถึง $x=2$ โดยใช้สูตรหาพื้นที่ของรูปเรขาคณิตที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว จากนั้นจึงเปรียบเทียบกับการใช้ปริพันธ์จำกัดเขต ดังนี้



วิธีที่ 1 การหาพื้นที่ส่วนที่แรเงาโดยใช้สูตรหาพื้นที่ของรูปเรขาคณิต

จะเห็นว่า พื้นที่ส่วนที่แรเงาเป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

ดังนั้น พื้นที่ส่วนที่แรเงา $= \frac{1}{2} \times$ ผลบวกของความยาวด้านคู่ขนาน $\times$ ความสูง

$= \frac{1}{2} \times (1+2) \times 1$

$= \frac{3}{2}$ ตารางหน่วย

วิธีที่ 2 การหาพื้นที่ส่วนที่แรเงาโดยใช้ปริพันธ์จำกัดเขต

จะได้ พื้นที่ส่วนที่แรเงา $= \int_1^2 x\,dx$

$$= \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2$$

$$= \frac{4}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \text{ ตารางหน่วย}$$

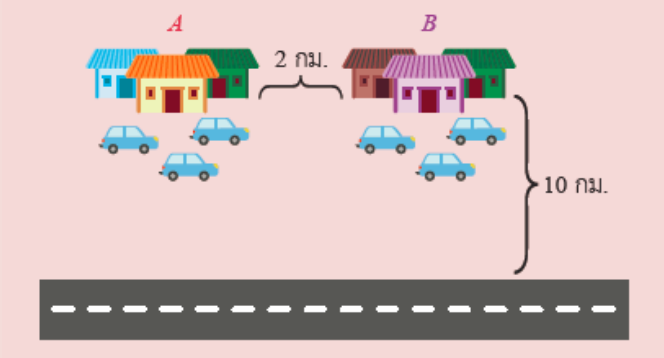
จะเห็นว่า พื้นที่ที่ได้จากการหาวิธีที่ 1 เท่ากับวิธีที่ 2

- ให้ A เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน X จาก a ถึง b จะพบว่า
  - ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ แล้ว $A = \int_a^b f(x)\,dx$
  - ถ้า $f(x) \leq 0$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ แล้ว $A = -\int_a^b f(x)\,dx$
  - ถ้า $c \in [a,b]$ ซึ่ง $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [a,c]$ และ $f(x) \leq 0$ สำหรับทุก $x \in [c,b]$ แล้ว $A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$

2.3 แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน

กิจกรรม : สร้างถนนอย่างไรให้ประหยัดงบ

หมู่บ้าน A และหมู่บ้าน B อยู่ห่างกัน 2 กิโลเมตร และหมู่บ้านทั้งสองอยู่ห่างจากถนนสายหลัก 10 กิโลเมตร ดังรูป



ถ้าต้องการสร้างถนนเชื่อมระหว่างหมู่บ้านทั้งสองเชื่อมกับถนนสายหลักโดยมีเงื่อนไขว่าระยะทางจากแต่ละหมู่บ้านไปยังถนนสายหลักต้องเท่ากัน จะสร้างถนนให้มีความยาวสั้นที่สุด เพื่อให้ประหยัดงบประมาณในการสร้างมากที่สุด ได้อย่างไร

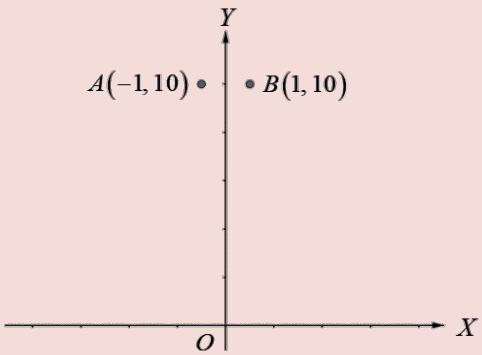
ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. นักเรียนมีแนวคิดที่จะสร้างถนนอย่างไร ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้น
2. นำแผนผังของหมู่บ้านทั้งสองและถนนสายหลัก มาเขียนลงในระบบพิกัดฉาก โดยให้แกน X แทนถนนสายหลัก จุด $A(-1,10)$ แทนตำแหน่งของหมู่บ้าน A และจุด $B(1,10)$ แทนตำแหน่งของหมู่บ้าน B
3. กำหนด $c \in [0,10]$ และจุด C เป็นจุดบนเส้นตรง $y=c$ จงหาพิกัดของจุด C ที่ทำให้ $AC=BC$
4. ให้จุด D อยู่บนแกน X จงหาพิกัดของจุด D ที่ทำให้ CD น้อยที่สุด และจงหา CD ที่น้อยที่สุดในรูปของ c

5. จงหา c ที่ทำให้ $AC+BC+CD$ น้อยที่สุด และจงหา $AC+BC+CD$ ที่น้อยที่สุด
6. จากข้อ $2-5$ จงอธิบายว่าจะสร้างถนนเชื่อมระหว่างหมู่บ้านทั้งสองและเชื่อมกับถนนสายหลักอย่างไร ให้ระยะทางจากแต่ละหมู่บ้านไปยังถนนสายหลักเท่ากัน และถนนมีความยาวสั้นที่สุด พร้อมทั้งหาความยาวของถนนที่สั้นที่สุดและระยะทางจากแต่ละหมู่บ้านไปยังถนนสายหลัก

เฉลยกิจกรรม : สร้างถนนอย่างไรให้ประหยัดงบ

1. คำตอบในข้อนี้เป็นเพียงการคาดการณ์ นักเรียนสามารถตอบได้อย่างอิสระ ทั้งนี้ นักเรียนส่วนใหญ่อาจมีแนวคิดที่จะสร้างถนนโดยเริ่มจากสร้างถนนเชื่อมระหว่างหมู่บ้านทั้งสอง แล้วสร้างถนนอีกเส้นจากจุดกึ่งกลางถนนเส้นแรกไปตั้งฉากกับถนนเส้นหลัก จะได้ความยาวของถนนทั้งหมด 12 กิโลเมตร ซึ่งยังไม่ใช่ถนนที่สั้นที่สุด โดยนักเรียนจะได้ศึกษาวิธีการหาถนนที่สั้นที่สุดในขั้นตอนต่อ ๆ ไป
2. นำแผนผังของหมู่บ้านทั้งสองและถนนสายหลัก มาเขียนลงในระบบพิกัดฉากได้ดังนี้



3. พิกัดของจุด C คือ $(0, c)$
4. CD น้อยที่สุด เมื่อ $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับแกน X ดังนั้นจุด D ต้องมีพิกัดเป็น $(0,0)$ และ CD ที่น้อยที่สุด คือ c กิโลเมตร
5. เนื่องจาก $AC + BC + CD = 2\sqrt{1+(c-10)^2} + c$

   ให้ $f(c) = 2\sqrt{1+(c-10)^2} + c$ เมื่อ $c \in [0,10]$

   ดังนั้น $f'(c) = \dfrac{2(c-10)}{\sqrt{1+(c-10)^2}} + 1$

   ถ้า $f'(c) = 0$ แล้วจะได้ $\dfrac{2(c-10)}{\sqrt{1+(c-10)^2}} + 1 = 0$ นั่นคือ $c = 10 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

   ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงเปิด $(0,10)$ คือ $10 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

ต่อไปคำนวณหา $f(0)$, $f\left(10-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ และ $f(10)$

จะได้ $f(0)=2\sqrt{101}$

$$f\left(10-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=10+\sqrt{3}$$

$$f(10)=12$$

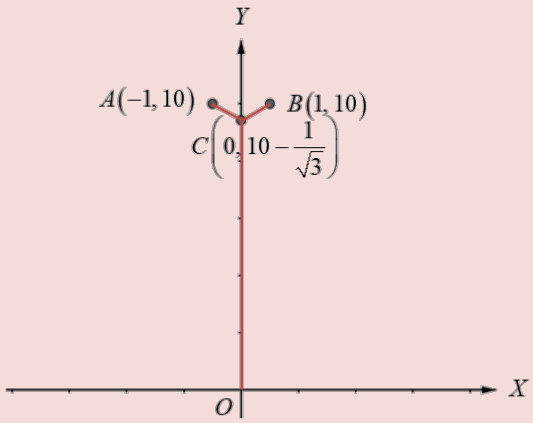
สรุปได้ว่า $c=10-\frac{1}{\sqrt{3}}$ จะให้ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วง $[0,10]$

และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ คือ $f\left(10-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=10+\sqrt{3}\approx 11.732$

ดังนั้น $AC+BC+CD$ น้อยที่สุด เมื่อ $c=10-\frac{1}{\sqrt{3}}$

และ $AC+BC+CD$ ที่น้อยที่สุด คือ $10+\sqrt{3}$ ซึ่งมีค่าประมาณ 11.732

6.



จากรูป เนื่องจากจุด C มีพิกัดเป็น $\left(0,10-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ดังนั้น จะต้องสร้างถนนจากแต่ละหมู่บ้านมาเชื่อมกันที่จุดที่ห่างจากจุดกึ่งกลางระหว่างหมู่บ้านทั้งสอง (ซึ่งมีพิกัดเป็น $(0,10)$) เป็นระยะทาง $10-\left(10-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ กิโลเมตร หรือประมาณ 577 เมตร จากนั้น สร้างถนนจากจุดนี้ไปตั้งฉากกับถนนสายหลัก จึงจะทำให้ความยาวของถนนที่สร้างสั้นที่สุด โดยถนนที่สร้างจะมีความยาวประมาณ 11.732 กิโลเมตร แต่เนื่องจากระยะทางจากแต่ละหมู่บ้านไป

ยังจุด C มีความยาวประมาณ $\sqrt{\left[10-\left(10-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}$ กิโลเมตร หรือประมาณ 1.155 กิโลเมตร ดังนั้น ระยะทางจากแต่ละหมู่บ้านไปยังถนนสายหลักมีความยาวประมาณ $11.732-1.155=10.577$ กิโลเมตร

แนวทางการจัดกิจกรรม : สร้างถนนอย่างไรให้ประหยัดงบ

เวลาในการจัดกิจกรรม 50 นาที

กิจกรรมนี้เสนอไว้ให้นักเรียนใช้ความรู้ เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น เพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ โดยกิจกรรมนี้มีสื่อ/แหล่งการเรียนรู้ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรม “สร้างถนนอย่างไรให้ประหยัดงบ”
2. เครื่องคำนวณซึ่งสามารถเขียนกราฟได้

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูจับคู่นักเรียนแบบคละความสามารถ จากนั้นแจกใบกิจกรรม “สร้างถนนอย่างไรให้ประหยัดงบ” ให้กับนักเรียนทุกคน แล้วให้นักเรียนศึกษาสถานการณ์ปัญหา
2. ครูควรนำอภิปรายเกี่ยวกับสถานการณ์ปัญหาในใบกิจกรรมเพื่อให้นักเรียนทุกคนเข้าใจตรงกัน
3. ครูให้นักเรียนตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 1 ในใบกิจกรรม
4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายคำตอบที่ได้ในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 1 – 3 โดยไม่ต้องคำนึงถึงความถูกต้องของคำตอบ
5. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่ร่วมกันตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 2 – 6 ในใบกิจกรรม ทั้งนี้ครูควรชี้แนะให้นักเรียนใช้เครื่องคอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือช่วยในการเขียนกราฟและการคำนวณหาค่าประมาณ
6. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบที่ได้ในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 2 – 6

2.4 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน

การวัดผลระหว่างเรียนมีจุดมุ่งหมายเพื่อปรับปรุงการเรียนรู้และพัฒนาการเรียนการสอน และตรวจสอบนักเรียนแต่ละคนว่ามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่ครูสอนมากน้อยเพียงใด การให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเป็นแนวทางหนึ่งที่ครูอาจใช้เพื่อประเมินผลด้านความรู้ระหว่างเรียนของนักเรียน ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดที่ครอบคลุมเนื้อหาที่สำคัญของแต่ละบทไว้ สำหรับในบทที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น ครูอาจใช้แบบฝึกหัดเพื่อวัดผลประเมินผลความรู้ในแต่ละเนื้อหาได้ดังนี้

เนื้อหา	แบบฝึกหัด	
การหาลิมิตของฟังก์ชันจากตารางและกราฟ	2.1ก	ข้อ 1 – 7
การหาลิมิตของฟังก์ชันโดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต	2.1ข	ข้อ 1 – 6
การพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุด	2.2	ข้อ 1, 5
การพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง	2.2	ข้อ 2 – 4
อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยและการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้บทนิยาม	2.3	ข้อ 1 – 12
การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร	2.4	ข้อ 1 – 7
การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ	2.5	ข้อ 1 – 7
การหาความชันของเส้นโค้งและเส้นสัมผัสเส้นโค้ง	2.6	ข้อ 1 – 11
การหาอนุพันธ์อันดับสูง	2.7	ข้อ 1 – 5
การประยุกต์ของอนุพันธ์เกี่ยวกับการเคลื่อนที่แนวตรง	2.8.1	ข้อ 1 – 4

เนื้อหา	แบบฝึกหัด	
การประยุกต์ของอนุพันธ์เกี่ยวกับค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน	2.8.2	ข้อ 1 – 4
การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด	2.8.3	ข้อ 1 – 16
การหาปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต และการแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต	2.9	ข้อ 1 – 12
การหาปริพันธ์จำกัดเขตและการแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับปริพันธ์ไม่จำกัดเขต	2.10	ข้อ 1 – 2
การหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง	2.11	ข้อ 1 – 4

2.5 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 มีจุดมุ่งหมายว่าเมื่อนักเรียนได้เรียนจบบทที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น แล้วนักเรียนสามารถ

1. หาลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้
2. ตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่กำหนดให้
3. หาความชันของเส้นโค้ง
4. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา
5. หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและจำกัดเขตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ และนำไปใช้แก้ปัญหา

ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดท้ายบทที่ประกอบด้วยโจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียน โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมาย ซึ่งประกอบด้วยโจทย์ฝึกทักษะหรือโจทย์ที่มีความน่าสนใจและโจทย์ท้าทาย ครูอาจเลือกใช้แบบฝึกหัดท้ายบทวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบทเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนมีความสามารถตามจุดมุ่งหมายเมื่อเรียนจบบทเรียนหรือไม่

ทั้งนี้ แบบฝึกหัดท้ายบทแต่ละข้อในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 บทที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียน ดังนี้

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
1. หาลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้	1	1) – 8)
	2	1) – 6)
	3	1) – 4)
	9*	
	10	1)

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
2. ตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่กำหนดให้	4	1) – 4)
	5	1) – 4)
	6	1) – 4)
	7	1) – 2)
	8	
	9*	
	10	2)
	12	1) – 2)
3. หาความชันของเส้นโค้ง	15	1) – 2)
	16	
	17	
	19	
	20	
4. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา	13	1) – 4)
	14	1) – 10)
	18	
	21	
	22	
	23	
	24	
	25	
	26	
	27	1) – 4)

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
4. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา (ต่อ)	28	1) – 3)
	29	1) – 2)
	30	1) – 4)
	31	
	32	1) – 2)
	33	
	34	
	35	
	36	1) – 2)
	37	1) – 4)
	38	1) – 2)
	39	
	40	
	44	
5. หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและจำกัดเขตของฟังก์ชันที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา	45	1) – 8)
	46	
	47	1) – 2)
	48	1) – 2)
	50	
	51	
	52	
	53	1) – 3)
	55	1) – 4), 6) – 7)

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
5. หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและจำกัดเขตของฟังก์ชันที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา (ต่อ)	56	1) – 3)
	57	
	58	
	59	
	60	
	62	1) – 2)
	63	1) – 2)
	64	
โจทย์ฝึกทักษะ/โจทย์ที่มีความน่าสนใจ	11	
	49	
โจทย์ท้าทาย	41	
	42	
	43	1) – 2)
	54	
	55	5), 8)
	61	

หมายเหตุ

แบบฝึกหัดท้ายบทข้อ 9 สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียนมากกว่า 1 จุดมุ่งหมาย

2.6 ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู

ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครูที่จะกล่าวถึงในคู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 บทที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น มี 3 หัวข้อ ได้แก่

1. การพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับแคลคูลัสที่กล่าวถึงแต่ไม่ได้แสดงการพิสูจน์ไว้ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1
2. ความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์และความต่อเนื่องของฟังก์ชัน f ที่จุด c
3. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (Improper Integral)

โดยมีรายละเอียดในแต่ละหัวข้อเป็นดังนี้

การพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับแคลคูลัสที่กล่าวถึงในหนังสือเรียน

หัวข้อนี้แบ่งการนำเสนอเป็น 2 ส่วน ได้แก่

ส่วนที่ 1 ทฤษฎีบท บทนิยาม และบทแทรกที่ใช้ในการพิสูจน์

ส่วนที่ 2 แนวทางการพิสูจน์ทฤษฎีบทในหนังสือเรียน

โดยมีรายละเอียดในแต่ละส่วนเป็นดังนี้

ส่วนที่ 1 ทฤษฎีบท บทนิยาม และบทแทรกที่ใช้ในการพิสูจน์

- **ทฤษฎีบท i**

  ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

  1. $|a-b| = |b-a|$
  2. $|a+b| \le |a|+|b|$ (อสมการสามเหลี่ยม : Triangle Inequality)
  3. $|a-b| \le |a|+|b|$
  4. $|a|-|b| \le |a-b|$

- **ทฤษฎีบท ii**

  ให้ x และ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$x^n - a^n = (x-a)\cdot\left(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}\right)$$

- **บทนิยาม iii**

ให้ $A \subset \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า $x \in \mathbb{R}$ เป็น**จุดลิมิต (limit point)** ของเซต A ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ ช่วง $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ จะต้องมีสมาชิกในเซต A ในช่วง $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ ที่ไม่ใช่จุด x กล่าวคือ x เป็นจุดลิมิตของเซต A ก็ต่อเมื่อ $\forall \varepsilon > 0, (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing$

ตัวอย่าง

จำนวนจริงทุกจำนวนเป็นจุดลิมิตของเซตของจำนวนจริง เนื่องจาก สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (\mathbb{R} - \{x\}) \neq \varnothing$ ทุก $\varepsilon > 0$

- **บทนิยาม iv**

ให้ $A \subset \mathbb{R}$ ฟังก์ชัน $f : A \to \mathbb{R}$ และ $a \in A$ จะกล่าวว่า จำนวนจริง L เป็นลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ a ซึ่งเขียนแทนด้วย $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ สำหรับทุก $x \in A$ ที่ $|x-a| < \delta$ กล่าวคือ $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A, |x-a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

- **ทฤษฎีบท v**

ให้ $A \subset \mathbb{R}$ ฟังก์ชัน $f : A \to \mathbb{R}$ และ $a \in A$

1. ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) > 0$ แล้ว จะมี δ ซึ่ง $f(x) > 0$ ทุก $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (A - \{a\})$
2. ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) < 0$ แล้ว จะมี δ ซึ่ง $f(x) < 0$ ทุก $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (A - \{a\})$
3. ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) \neq 0$ แล้ว จะมี δ ซึ่ง $f(x) \neq 0$ ทุก $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (A - \{a\})$

- **บทนิยาม vi**

ให้ $A \subset \mathbb{R}$ ฟังก์ชัน $f : A \to \mathbb{R}$ และ $c \in A$ จะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่อง**ที่ $x = c$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

- **บทนิยาม vii**

  ให้ $A \subset \mathbb{R}$ ฟังก์ชัน $f : A \to \mathbb{R}$ และ $a \in A$ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ a เขียนแทนด้วย $f'(a)$ คือ

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

  ถ้าเราให้ $x = a + h$ เราจะเห็นว่า เมื่อ h ลู่เข้าสู่ 0 แล้ว x จะลู่เข้าสู่ a โดยการเปลี่ยนตัวแปร จะสามารถเขียนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ a ได้อีกวิธีดังนี้

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- **ทฤษฎีบท viii**

  ให้ $A \subset \mathbb{R}$ ฟังก์ชัน $f : A \to \mathbb{R}$ และ $a \in A$ ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ a แล้ว f จะมีความต่อเนื่องที่ a

- **ทฤษฎีบท ix (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม : Mean Value Theorem)**

  ให้ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และมีอนุพันธ์ที่ทุกจุดในช่วง (a, b) แล้ว จะมี $c \in (a, b)$ ซึ่ง

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- **บทนิยาม x**

  ให้ $A \subset \mathbb{R}$ และ $f : A \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน จะกล่าวว่า

  1. f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function)** ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x, y \in A$ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) < f(y)$
  2. f เป็น**ฟังก์ชันลด (decreasing function)** ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x, y \in A$ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) > f(y)$

- **บทนิยาม xi**

  ให้ $A \subset \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า

  1. u เป็น**ขอบเขตบน (upper bound)** ของเซต A ถ้า $u \geq a$ ทุก $a \in A$ และจะกล่าวว่า A **มีขอบเขตบน (bounded above)** เมื่อมีจำนวนจริง u ที่เป็นขอบเขตบนของ A
  2. l เป็น**ขอบเขตล่าง (lower bound)** ของเซต A ถ้า $l \leq a$ ทุก $a \in A$ และจะกล่าวว่า A **มีขอบเขตล่าง (bounded below)** เมื่อมีจำนวนจริง l ที่เป็นขอบเขตล่างของ A

  จะกล่าวว่า A เป็นเซต**มีขอบเขต (bounded set)** เมื่อ A มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

- **ทฤษฎีบท xii**

  ให้ $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ แล้วเรนจ์ของ f เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต

- **บทนิยาม xiii**

  ให้ $A \subset \mathbb{R}$ เรียกจำนวนจริง x ว่าเป็น**ขอบเขตบนน้อยสุด (least upper bound)** หรือ **ซูพรีมัม (supremum)** ของ A เขียนแทนด้วย $x = \sup A$ ก็ต่อเมื่อ

  1. x เป็นขอบเขตบนของ A
  2. ถ้า y เป็นขอบเขตบนของ A แล้ว $x \leq y$

- **บทนิยาม xiv**

  ให้ $A \subset \mathbb{R}$ เรียกจำนวนจริง x ว่าเป็น**ขอบเขตล่างมากสุด (greatest lower bound)** หรือ **อินฟิมัม (infimum)** ของ A เขียนแทนด้วย $x = \inf A$ ก็ต่อเมื่อ

  1. x เป็นขอบเขตล่างของ A
  2. ถ้า y เป็นขอบเขตล่างของ A แล้ว $y \leq x$

- **ทฤษฎีบท xv**

  ให้ A เป็นเซตปิดที่ไม่เป็นเซตว่าง

  1. ถ้า A มีขอบเขตบน แล้ว $\sup A \in A$
  2. ถ้า A มีขอบเขตล่าง แล้ว $\inf A \in A$

ส่วนที่ 2 แนวทางการพิสูจน์ทฤษฎีบทในหนังสือเรียน

- **ทฤษฎีบท 1**

ให้ a เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
2. $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$

พิสูจน์

1. จากบทนิยาม iv จะเห็นว่าในที่นี้ $f(x) = c$ $L = c$ และ $A = \mathbb{R}$

   ให้ $\varepsilon > 0$

   เลือก $\delta = \varepsilon$

   ให้ $x \in A$ ที่ $|x - a| < \delta$

   จะได้ว่า $|f(x) - L| = |c - c| = 0 < \varepsilon$

   นั่นคือ $\lim\limits_{x\to a} c = c$

2. ในการพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$ จะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 ขั้น คือ

   ขั้นที่ 1 จะแสดงว่า $\lim\limits_{x\to a} x = a$

   ขั้นที่ 2 จะแสดงว่า $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ โดยที่ $n \neq 1$

   ขั้นที่ 1

   ให้ $\varepsilon > 0$

   เลือก $\delta_1 = \varepsilon$

   สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ ที่ $|x - a| < \delta_1$ จะได้ว่า $|x - a| < \varepsilon$

   นั่นคือ $\lim\limits_{x\to a} x = a$

   ขั้นที่ 2

   ให้ $n \in \mathbb{N}$ โดยที่ $n \neq 1$

   เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to a} x = a$

   จะมี $\delta_2 > 0$ ที่สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $|x - a| < \delta_2$ แล้ว

$$\begin{aligned} |x-a| &< 1 \\ |x|-|a| \le |x-a| &< 1 \\ |x| &< 1+|a| \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} &\left|x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}\right| \\ &\le \left|x^{n-1}\right|+\left|ax^{n-2}\right|+\left|a^2x^{n-3}\right|+\cdots+\left|a^{n-2}x\right|+\left|a^{n-1}\right| \\ &= |x|^{n-1}+|a||x|^{n-2}+\left|a^2\right||x|^{n-3}+\cdots+\left|a^{n-2}\right||x|+\left|a^{n-1}\right| \\ &< (1+|a|)^{n-1}+|a|(1+|a|)^{n-2}+\left|a^2\right|(1+|a|)^{n-3}+\cdots+\left|a^{n-2}\right|(1+|a|)+\left|a^{n-1}\right| \end{aligned}$$

ให้ $k_n=(1+|a|)^{n-1}+|a|(1+|a|)^{n-2}+\left|a^2\right|(1+|a|)^{n-3}+\cdots+\left|a^{n-2}\right|(1+|a|)+\left|a^{n-1}\right|$

จะได้ว่า $k_n>0$

ให้ $\varepsilon>0$

ดังนั้น $\dfrac{\varepsilon}{k_n}>0$

เลือก $\delta=\min\left\{\delta_2,\dfrac{\varepsilon}{k_n}\right\}$

ให้ $x\in A$ ที่ $|x-a|<\delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &\left|x^n-a^n\right| \\ &=\left|(x-a)\cdot\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}\right)\right| \\ &=|x-a|\cdot\left|x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}\right| \\ &\le |x-a|\cdot\left((1+|a|)^{n-1}+|a|(1+|a|)^{n-2}+\left|a^2\right|(1+|a|)^{n-3}+\cdots+\left|a^{n-2}\right|(1+|a|)+\left|a^{n-1}\right|\right) \\ &<\delta\cdot k_n \\ &\le \frac{\varepsilon}{k_n}\cdot k_n \\ &=\varepsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to a}x^n=a^n$ เมื่อ $n\in\mathbb{N}$

- **ทฤษฎีบท 2**

กำหนดให้ a, L และ M เป็นจำนวนจริงใด ๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ แล้ว

1. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริง
2. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L+M$
3. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = L-M$
4. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L\cdot M$
5. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
6. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^n = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n = L^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$

พิสูจน์

1. สมมติ $D_f = D_g = A$ โดยที่ A เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริงที่ไม่เป็นเซตว่าง

   ให้ c เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริง และ $\varepsilon > 0$

   เนื่องจาก $|c| \geq 0$

   ดังนั้น $|c|+1 > 0$

   จะได้ว่า $\dfrac{\varepsilon}{|c|+1} > 0$

   เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

   จะมี $\delta > 0$ ที่สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $|x-a| < \delta$ แล้ว $|f(x)-L| < \dfrac{\varepsilon}{|c|+1}$

   ให้ $x \in A$ ที่ $|x-a| < \delta$ จะได้ว่า

   $$|cf(x)-cL| = |c||f(x)-L| < |c|\cdot\frac{\varepsilon}{|c|+1} < \varepsilon$$

   นั่นคือ $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = cL = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$

2. ให้ $\varepsilon > 0$

   เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

จะมี $\delta_1 > 0$ ที่สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $|x-a| < \delta_1$ แล้ว $|f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2}$

เนื่องจาก $\lim_{x\to a} g(x) = M$

จะมี $\delta_2 > 0$ ที่สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $|x-a| < \delta_2$ แล้ว $|g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

ให้ $x \in A$ ที่ $|x-a| < \delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|\left(f(x)+g(x)\right)-(L+M)\right| &= \left|\left(f(x)-L\right)+\left(g(x)-M\right)\right| \\
&\le \left|f(x)-L\right|+\left|g(x)-M\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right) = L+M = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

3. ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\lim_{x\to a} f(x) = L$

จะมี $\delta_1 > 0$ ที่สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $|x-a| < \delta_1$ แล้ว $|f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2}$

เนื่องจาก $\lim_{x\to a} g(x) = M$

จะมี $\delta_2 > 0$ ที่สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $|x-a| < \delta_2$ แล้ว $|g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

ให้ $x \in A$ ที่ $|x-a| < \delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|\left(f(x)-g(x)\right)-(L-M)\right| &= \left|\left(f(x)-L\right)-\left(g(x)-M\right)\right| \\
&\le \left|f(x)-L\right|+\left|g(x)-M\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right) = L-M = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

4. ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$

จะมี $\delta_1 > 0$ ที่สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $|x-a| < \delta_1$ แล้ว

$$|g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}$$

และจะมี $\delta_2 > 0$ ที่สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $|x-a| < \delta_2$ แล้ว

$$\begin{aligned} |g(x)-M| &< 1 \\ |g(x)|-|M| < |g(x)-M| &< 1 \\ |g(x)| &< 1+|M| \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

จะมี $\delta_3 > 0$ ที่สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $|x-a| < \delta_3$ แล้ว

$$|f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2(1+|M|)}$$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$

ให้ $x \in A$ ที่ $|x-a| < \delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |f(x)\cdot g(x)-L\cdot M| &= |f(x)\cdot g(x)-L\cdot g(x)+L\cdot g(x)-L\cdot M| \\ &= |(f(x)\cdot g(x)-L\cdot g(x))+(L\cdot g(x)-L\cdot M)| \\ &\le |f(x)\cdot g(x)-L\cdot g(x)|+|L\cdot g(x)-L\cdot M| \\ &= |g(x)|\cdot|f(x)-L|+|L|\cdot|g(x)-M| \\ &< (1+|M|)\cdot\frac{\varepsilon}{2(1+|M|)}+|L|\cdot\frac{\varepsilon}{2(|L|+1)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot M = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$

5. สมมติให้ $M \neq 0$

ต้องการแสดงว่า $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{M}$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M \neq 0$

โดยทฤษฎีบท v จะได้ว่ามี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $g(x) \neq 0$ สำหรับ $x \in (a-\delta_1, a+\delta_1) \cap (A - \{a\})$

กล่าวคือ ที่รอบ ๆ จุด a ค่าของ $g(x) \neq 0$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$

ดังนั้น สำหรับ $|x-a| < \delta_1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |g(x) - M| &< \frac{|M|}{2} \\ |M| - |g(x)| \leq |M - g(x)| &< \frac{|M|}{2} \\ |g(x)| &> \frac{|M|}{2} \\ \frac{1}{|g(x)|} &< \frac{2}{|M|} \end{aligned}$$

ให้ $\varepsilon > 0$

จะได้ว่า $\dfrac{|M|^2 \varepsilon}{2} > 0$

จาก $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$

จะมี $\delta_2 > 0$ ที่สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $|x-a| < \delta_2$ แล้ว

$$|g(x) - M| < \frac{|M|^2 \varepsilon}{2}$$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

ให้ $x \in A$ ที่ $|x-a| < \delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{M}\right| &= \left|\frac{M-g(x)}{M\cdot g(x)}\right| \\
&= \frac{1}{|M|}\cdot\frac{1}{|g(x)|}\cdot|M-g(x)| \\
&= \frac{1}{|M|}\cdot\frac{1}{|g(x)|}\cdot|g(x)-M| \\
&< \frac{1}{|M|}\cdot\frac{2}{|M|}\cdot\frac{|M|^2\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{M}$

จากบทพิสูจน์ก่อนหน้า จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) \\
&= \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} \\
&= L\cdot\frac{1}{M} \\
&= \frac{L}{M} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{L}{M}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

6. เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

จะมี $\delta_1>0$ ที่สำหรับทุก $x\in A$ ถ้า $|x-a|<\delta_1$ แล้ว

$$\begin{aligned}
|f(x)-L| &< 1 \\
|f(x)|-|L| \le |f(x)-L| &< 1 \\
|f(x)| &< 1+|L|
\end{aligned}$$

ให้ $n \in \mathbb{N}$ โดยที่ $n \neq 1$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
&\left|\left(f(x)\right)^{n-1} + L\cdot\left(f(x)\right)^{n-2} + L^2\cdot\left(f(x)\right)^{n-3} + \cdots + L^{n-2}\cdot f(x) + L^{n-1}\right| \\
&\leq \left|\left(f(x)\right)^{n-1}\right| + \left|L\cdot\left(f(x)\right)^{n-2}\right| + \left|L^2\cdot\left(f(x)\right)^{n-3}\right| + \cdots + \left|L^{n-2}\cdot f(x)\right| + \left|L^{n-1}\right| \\
&= \left|f(x)\right|^{n-1} + |L|\cdot\left|f(x)\right|^{n-2} + \left|L^2\right|\cdot\left|f(x)\right|^{n-3} + \cdots + \left|L^{n-2}\right|\cdot\left|f(x)\right| + \left|L^{n-1}\right| \\
&< \left(1+|L|\right)^{n-1} + |L|\left(1+|L|\right)^{n-2} + \left|L^2\right|\left(1+|L|\right)^{n-3} + \cdots + \left|L^{n-2}\right|\left(1+|L|\right) + \left|L^{n-1}\right|
\end{aligned}$$

ให้ $k_n = \left(1+|L|\right)^{n-1} + |L|\left(1+|L|\right)^{n-2} + \left|L^2\right|\left(1+|L|\right)^{n-3} + \cdots + \left|L^{n-2}\right|\left(1+|L|\right) + \left|L^{n-1}\right|$

จะเห็นว่า $k_n > 0$

สมมติ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

จะมี $\delta_2 > 0$ ที่สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $|x-a| < \delta_2$ แล้ว $\left|f(x) - L\right| < \dfrac{\varepsilon}{k_n}$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

ให้ $x \in A$ ที่ $|x-a| < \delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&\left|\left(f(x)\right)^n - L^n\right| \\
&= \left|\left(f(x)-L\right)\cdot\left(\left(f(x)\right)^{n-1} + L\cdot\left(f(x)\right)^{n-2} + L^2\cdot\left(f(x)\right)^{n-3} + \cdots + L^{n-2}\cdot f(x) + L^{n-1}\right)\right| \\
&= \left|f(x)-L\right|\cdot\left|\left(f(x)\right)^{n-1} + L\cdot\left(f(x)\right)^{n-2} + L^2\cdot\left(f(x)\right)^{n-3} + \cdots + L^{n-2}\cdot f(x) + L^{n-1}\right| \\
&\leq \left|f(x)-L\right|\cdot\left(\left(1+|L|\right)^{n-1} + |L|\left(1+|L|\right)^{n-2} + \left|L^2\right|\left(1+|L|\right)^{n-3} + \cdots + \left|L^{n-2}\right|\left(1+|L|\right) + \left|L^{n-1}\right|\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{k_n}\cdot k_n \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^n = L^n = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$

- **ทฤษฎีบท 3**

ให้ p เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$

พิสูจน์

ให้ $p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1 x + c_0$ เมื่อ $c_0, c_1, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} p(x) &= \lim_{x\to a}\left(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1 x + c_0\right) \\
&= \lim_{x\to a}\left(c_n x^n\right) + \lim_{x\to a}\left(c_{n-1}x^{n-1}\right) + \lim_{x\to a}\left(c_{n-2}x^{n-2}\right) + \cdots + \lim_{x\to a}\left(c_1 x\right) + \lim_{x\to a} c_0 \\
&= c_n \lim_{x\to a} x^n + c_{n-1}\lim_{x\to a} x^{n-1} + c_{n-2}\lim_{x\to a} x^{n-2} + \cdots + c_1 \lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} c_0 \\
&= c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + c_{n-2}a^{n-2} + \cdots + c_1 a + c_0 \\
&= p(a)
\end{aligned}$$

- **ทฤษฎีบท 4**

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ p และ q เป็นฟังก์ชันพหุนาม

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dfrac{p(a)}{q(a)}$ สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ ที่ $q(a) \neq 0$

พิสูจน์

ให้ $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม

พิจารณา สำหรับ $a \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $q(a) \neq 0$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} p(x)}{\lim\limits_{x\to a} q(x)} = \dfrac{p(a)}{q(a)}$

- **ทฤษฎีบท 5**

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ แล้ว

1. $f + g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$
2. $f - g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$
3. $f \cdot g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$
4. $\dfrac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ $g(a) \neq 0$

พิสูจน์

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ และ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$

1. $$\begin{aligned} \lim_{x \to a}(f+g)(x) &= \lim_{x \to a}\big(f(x)+g(x)\big) \\ &= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \\ &= f(a)+g(a) \\ &= (f+g)(a) \end{aligned}$$

   นั่นคือ $f + g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$

2. $$\begin{aligned} \lim_{x \to a}(f-g)(x) &= \lim_{x \to a}\big(f(x)-g(x)\big) \\ &= \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) \\ &= f(a)-g(a) \\ &= (f-g)(a) \end{aligned}$$

   นั่นคือ $f - g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$

3. $$\begin{aligned} \lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) &= \lim_{x \to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) \\ &= \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) \\ &= f(a) \cdot g(a) \\ &= (f \cdot g)(a) \end{aligned}$$

   นั่นคือ $f \cdot g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$

4. พิจารณา สำหรับ $a \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $g(a) \neq 0$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \\ &= \frac{f(a)}{g(a)} \\ &= \left(\frac{f}{g}\right)(a)\end{aligned}$$

นั่นคือ $\frac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ $g(a) \neq 0$

- **ทฤษฎีบท 6**

สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ ฟังก์ชันพหุนาม p เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$

พิสูจน์

ให้ p เป็นฟังก์ชันพหุนาม

โดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า $\lim_{x\to\infty} p(x) = p(a)$

นั่นคือ ฟังก์ชันพหุนาม p เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$

- **ทฤษฎีบท 7**

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ p และ q เป็นฟังก์ชันพหุนาม

แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ a จำนวนจริงใด ๆ ที่ $q(a) \neq 0$

พิสูจน์

ให้ $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม

พิจารณา สำหรับ $a \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $q(a) \neq 0$

โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{p(a)}{q(a)}$

นั่นคือ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ a จำนวนจริงใด ๆ ที่ $q(a) \neq 0$

- **สูตรที่ 9**

ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(x)$ แล้ว

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

พิสูจน์

สมมติให้ f หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(x)$

พิจารณา $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{เมื่อ } f(x+h) - f(x) \neq 0$$

เนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้ที่ x

จะได้ว่า $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$

พิจารณา $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)}$

ให้ $k = f(x+h) - f(x)$

จะเห็นว่า ถ้า h เข้าใกล้ 0 แล้ว k จะเข้าใกล้ 0

ดังนั้น $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{k}$

จาก g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(x)$

จะได้ว่า $\lim\limits_{k \to 0} \dfrac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{k} = g'(f(x))$

ดังนั้น $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g\big(f(x+h)\big)-g\big(f(x)\big)}{f(x+h)-f(x)}\cdot\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{g\big(f(x)+k\big)-g\big(f(x)\big)}{k}\cdot\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x)$

นั่นคือ $(g\circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x)$

- **ทฤษฎีบท 8**

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง A ซึ่งเป็นสับเซตของโดเมนของฟังก์ชัน f

1. ถ้า $f'(x)>0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง A
2. ถ้า $f'(x)<0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง A

พิสูจน์

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง A

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง A

ให้ $a, b\in A$ โดยที่ $a<b$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ มีอนุพันธ์บนช่วง (a, b)

โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิม จะมี $c\in(a, b)$ ที่ $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

1. สมมติให้ $f'(x)>0$ สำหรับทุก x ในช่วง A

   จะได้ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$

   ดังนั้น $f(b)-f(a)>0$ หรือ $f(b)>f(a)$

   นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง A

2. สมมติให้ $f'(x)<0$ สำหรับทุก x ในช่วง A

   จะได้ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$

   ดังนั้น $f(b)-f(a)<0$ หรือ $f(b)<f(a)$

   นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง A

- **ทฤษฎีบท 9**

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$

ถ้าฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ และ $f'(c)$ มีค่า

แล้ว $f'(c) = 0$

พิสูจน์

สมมติให้ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ และ $f'(c)$ มีค่า

จะได้ว่า $f(c) \geq f(x)$ ทุก x ในช่วง (a, b)

เมื่อ $x > c$

จาก $x - c > 0$ และ $f(c) \geq f(x)$

จะได้ $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$

เมื่อ $x < c$

จาก $x - c < 0$ และ $f(c) \geq f(x)$

จะได้ $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$

เนื่องจาก $f'(c)$ มีค่า ดังนั้น $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0$

หมายเหตุ

กรณี ถ้า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ และ $f'(c)$ มีค่า แล้ว $f'(c) = 0$ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

- **ทฤษฎีบท 10**

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$ เป็นค่าวิกฤตของ f

ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนจริงบวกเป็นจำนวนจริงลบ เมื่อ x เพิ่มขึ้นรอบ ๆ c

แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนจริงลบเป็นจำนวนจริงบวก เมื่อ x เพิ่มขึ้นรอบ ๆ c

แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

พิสูจน์

สมมติ $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนจริงบวกเป็นจำนวนจริงลบ เมื่อ x เพิ่มขึ้นรอบ ๆ c

นั่นคือ จะมี $\delta > 0$ ที่ $f'(x) > 0$ ทุก $x \in (c-\delta, c)$ และ $f'(x) < 0$ ทุก $x \in (c, c+\delta)$

ให้ $x \in (c-\delta, c)$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $[x, c]$ และมีอนุพันธ์บนช่วง (x, c)

โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิม จะมี $d \in (x, c)$ ที่ $f'(d) = \dfrac{f(c) - f(x)}{c - x}$ และ $f'(d) > 0$

จะได้ว่า $f(c) - f(x) > 0$ เนื่องจาก $c - x > 0$

ดังนั้น $f(c) > f(x)$ ทุก x ในช่วง $(c-\delta, c)$

ให้ $x \in (c, c+\delta)$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $[c, x]$ และมีอนุพันธ์บนช่วง (c, x)

โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิม จะมี $e \in (c, x)$ ที่ $f'(e) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ และ $f'(e) < 0$

จะได้ว่า $f(x) - f(c) < 0$ เนื่องจาก $x - c > 0$

ดังนั้น $f(c) > f(x)$ ทุก x ในช่วง $(c, c+\delta)$

ฉะนั้น $f(c) \geq f(x)$ ทุก x ในช่วง (a, b)

นั่นคือ $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

หมายเหตุ

กรณี ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนจริงลบเป็นจำนวนจริงบวก เมื่อ x เพิ่มขึ้นรอบ ๆ c แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

- **ทฤษฎีบท 11**

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$ เป็นค่าวิกฤตของ f ซึ่ง $f'(c) = 0$ และ $f''(c)$ มีค่า

1. ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f
2. ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

พิสูจน์

สมมติให้ $f''(c) > 0$

จากบทนิยามของอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c}$$

เนื่องจาก $f''(c) > 0$

จะได้ว่า $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} > 0$

กรณี $x < c$

จะเห็นว่า $x - c < 0$

ดังนั้น $f'(x) < 0$

กรณี $x > c$

จะเห็นว่า $x - c > 0$

ดังนั้น $f'(x) > 0$

โดยทฤษฎีบท 10 จะได้ว่า $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

หมายเหตุ

กรณี ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

- **ทฤษฎีบท 12**

  ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ แล้ว f จะมีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วง $[a, b]$

  พิสูจน์

  เนื่องจาก $[a, b]$ เป็นช่วงปิด และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$

  โดยทฤษฎีบท xii จะได้ว่า R_f เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต

  ให้ $z = \sup R_f$ และ $w = \inf R_f$

  จะได้ว่า $w \le f(x) \le z$ ทุก x ในช่วง $[a, b]$

  เนื่องจาก R_f เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต

  โดยทฤษฎีบท xv จะได้ว่า $z \in R_f$ และ $w \in R_f$

  ดังนั้น จะมี $c, d \in [a, b]$ ที่ $z = f(c)$ และ $w = f(d)$

  จาก $f(c) \ge f(x)$ และ $f(d) \le f(x)$ ทุก x ในช่วง $[a, b]$

  จะเห็นว่า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และ $f(d)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ บนช่วง $[a, b]$

  นั่นคือ f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วง $[a, b]$

ความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์และความต่อเนื่องของฟังก์ชัน f ที่จุด c

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิด (a, b) และ $c \in (a, b)$

ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ c แล้ว f จะมีความต่อเนื่องที่ c

แสดงการพิสูจน์ได้ดังนี้

พิสูจน์

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิด (a, b) และ $c \in (a, b)$

สมมติว่า f มีอนุพันธ์ที่ c

สำหรับ $x \in (a, b)$ ซึ่ง $x \ne c$ จะได้ว่า

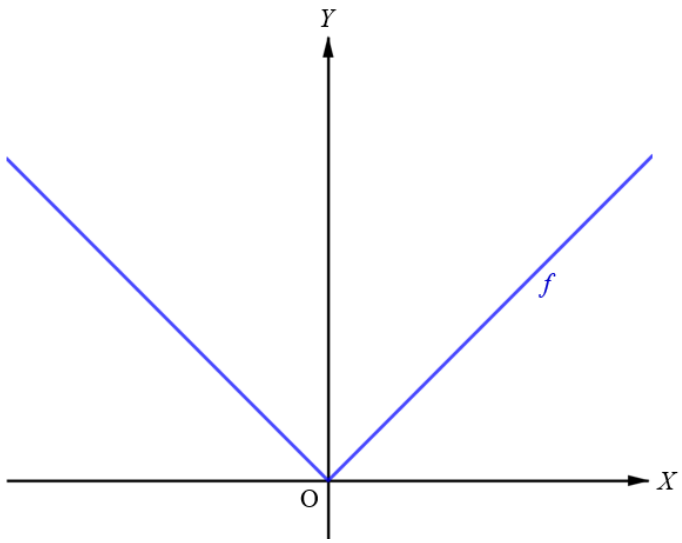
$$
\begin{aligned}
f(x)-f(c) &= \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot(x-c) \\
\lim_{x\to c}\left(f(x)-f(c)\right) &= \left(\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)\cdot\left(\lim_{x\to c}(x-c)\right) \\
&= f'(c)\cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$

ดังนั้น f มีความต่อเนื่องที่ c

หมายเหตุ

ในทางตรงกันข้าม ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ c แล้ว อนุพันธ์ของ f ที่ c อาจไม่มีค่าก็ได้ เช่น ในกรณีที่ $f(x)=|x|$ เขียนกราฟของ f ได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$ แต่จากตัวอย่างที่ 25 จะได้ว่า $f'(0)$

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (Improper Integral)

ปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x)\,dx$ ที่มีค่า a หรือ b เป็นอนันต์ หรือฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องอย่างน้อย 1 จุด ในช่วง $[a,b]$ เราจะเรียกปริพันธ์ที่อยู่ในรูปดังกล่าวว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ**

บทนิยามที่สำคัญเกี่ยวกับปริพันธ์ไม่ตรงแบบมีดังนี้

บทนิยาม 1 (ปริพันธ์ไม่ตรงแบบเมื่อช่วงของการหาปริพันธ์เป็นอนันต์)

1. ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องบน $[a,\infty)$ แล้ว

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx \text{ เมื่อ } \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx \text{ มีค่า}$$

2. ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องบน $(-\infty,b]$ แล้ว

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx \text{ เมื่อ } \lim_{t\to\infty}\int_t^b f(x)\,dx \text{ มีค่า}$$

จะกล่าวว่า**ปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่เข้า**เมื่อ**ลิมิตมีค่า** และจะกล่าวว่า**ปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่ออก**เมื่อ**ลิมิตไม่มีค่า**

3. ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องบน $(-\infty,\infty)$ แล้ว

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ และ $\int_c^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่เข้า

บทนิยาม 2 (ปริพันธ์ไม่ตรงแบบเมื่อฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องบางจุดในช่วงของการหาปริพันธ์)

1. ในช่วง $[a,b]$ ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องทุกค่า x ยกเว้นที่ $x=a$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx \text{ เมื่อ } \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx \text{ มีค่า}$$

2. ในช่วง $[a,b]$ ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องทุกค่า x ยกเว้นที่ $x=b$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx \text{ เมื่อ } \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx \text{ มีค่า}$$

จะกล่าวว่า**ปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่เข้า**เมื่อ**ลิมิตมีค่า** และจะกล่าวว่า**ปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่ออก**เมื่อ**ลิมิตไม่มีค่า**

3. ในช่วง $[a,b]$ ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องทุกค่า x ยกเว้นที่ $x=c$ เมื่อ $c\in(a,b)$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \text{ เมื่อ } \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \text{ และ } \int_c^{\infty} f(x)\,dx \text{ ลู่เข้า}$$

2.7 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทและเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

ในส่วนนี้จะนำเสนอตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น สำหรับรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 ซึ่งครูสามารถเลือกนำไปใช้ได้ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดผลประเมินผล

ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. จงหา

   1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{2x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$ เมื่อ $f(x)=16x^2$

2. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ณ จุดที่กำหนดหรือไม่

   1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & , \ x\neq -1\\ -2 & , \ x=-1\end{cases}$ ที่จุด $x=-1$

   2) $f(x)=\begin{cases}-x & , \ x\leq 0\\ x^2 & , \ x>0\end{cases}$ ที่จุด $x=0$

3. กำหนดให้ A, B และ C เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$, $f(1)=B$ และ

   $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & , \ x<1\\ 0 & , \ x=1\\ 3x-C & , \ x>1\end{cases}$ ถ้า f ต่อเนื่องที่ $x=1$ แล้ว $\dfrac{A+B}{C}$ เท่ากับเท่าใด

4. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2+\sqrt{5-b}}{x+1} & , \ x\leq 1\\ \dfrac{x^3-1}{x^2-1} & , \ 1<x<6\\ \dfrac{\sqrt{x-2}+a}{13-x} & , \ x\geq 6\end{cases}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

   ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$ และ $x=6$ แล้ว $\lim\limits_{x\to 14}\dfrac{\sqrt[3]{a-x}}{x-b}$ เท่ากับเท่าใด

5. กำหนดให้ $y=\frac{1}{x^3+3}+\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2-5x-4\right)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

6. เส้นตรง l สัมผัสเส้นโค้ง $y=f\left(x\right)$ โดยที่ $y=\frac{5x^3+2x^2-7x+9}{3x}$ ที่ $x=1$ จงหาว่าเส้นตรง l ทำมุมกี่องศากับแกน X ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

7. จงหา $\left(f\circ g\right)'\left(2\right)$ เมื่อกำหนดให้ $f\left(x\right)=\frac{2x^2-1}{x}$ และ $g\left(x\right)=\sqrt{x^3+8}$

8. กำหนดให้ $f\left(x\right)=\left(1-2x\right)^4$ จงหา $f''\left(x\right)$

9. จงหา

   1) $\int\left(\frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\right)dx$ 2) $\int\left(3x+4\right)^2\,dx$

10. กำหนดให้ $y=f\left(x\right)$ และอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x คือ $ax^3-12x+8$ เมื่อ x และ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ถ้า $f\left(0\right)=1$ และ $f'\left(1\right)=0$ แล้ว $f\left(a-2\right)$ เท่ากับเท่าใด

11. กำหนดให้ $g\left(x\right)=\frac{x^6}{6}-3x$ ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\int_{-a}^{a}g''\left(x\right)\,dx=-\frac{1}{16}$ แล้ว $g'\left(a\right)$ เท่ากับเท่าใด

12. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=x^2+4x$ กับแกน X จาก $x=-5$ ถึง $x=1$

13. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $\left[1,2\right]$ โดยที่ $f\left(x\right)+1=g\left(x\right)+x$ จงหา $\int_{1}^{2}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)^2\,dx$

14. กำหนดให้ เส้นโค้ง ℓ มีความชันที่จุด $\left(1,3\right)$ เท่ากับ -1 และ $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ ถ้า $\int_{0}^{1}f\left(x\right)\,dx=0$ แล้ว $f\left(2\right)$ เท่ากับเท่าใด

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. 1) จาก $f(x)=\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{2x}$

จะได้

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{2x}\cdot\frac{\sqrt{5+x}+\sqrt{5}}{\sqrt{5+x}+\sqrt{5}}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{5+x}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}{2x\left(\sqrt{5+x}+\sqrt{5}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{5+x-5}{2x\left(\sqrt{5+x}+\sqrt{5}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x}{2x\left(\sqrt{5+x}+\sqrt{5}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\left(\sqrt{5+x}+\sqrt{5}\right)} \\
&= \frac{1}{2\left(\sqrt{5+0}+\sqrt{5}\right)} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

2) จาก $f(x)=16x^2$

จะได้

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} &= \lim_{x\to 3}\frac{16x^2-16\left(3^2\right)}{x-3} \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{16\left(x^2-3^2\right)}{x-3} \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{16(x-3)(x+3)}{x-3} \\
&= \lim_{x\to 3}\left(16(x+3)\right) \\
&= 16(3+3) \\
&= 96
\end{aligned}$$

2. 1) จากฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้

จะได้ $f(-1)=-2$

และ
$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1} f(x) &= \lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)\\ &= \lim_{x\to -1}\left(\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}\right)\\ &= \lim_{x\to -1}(x-1)\\ &= -1-1\\ &= -2\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=-1$

2) จากฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้

จะได้ $f(0)=0$

จาก $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0$

และ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$

จะได้ว่า $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

จะเห็นว่า $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$

3. จาก
$$A = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}$$

จะได้
$$\begin{aligned}A &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}(x+1)\\ &= \lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}1\\ &= 2+1\end{aligned}$$

ดังนั้น $A = 3$ ----- (1)

จาก $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & , \quad x<1 \\ 0 & , \quad x=1 \\ 3x-C & , \quad x>1 \end{cases}$

จะได้ $f(1) = 0$

ดังนั้น $B=0$ ----- (2)

จาก f ต่อเนื่องที่ $x=1$ จะได้ว่า $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$

จาก $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(3x-C)$

จะได้ $0 = 3-C$

ดังนั้น $C = 3$ ----- (3)

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ว่า $\dfrac{A+B}{C}=\dfrac{3+0}{3}=1$

4. จาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ----- (1)

จากฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ จะได้ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{2+\sqrt{5-b}}{x+1}\right)=\dfrac{2+\sqrt{5-b}}{2}$ ----- (2)

และ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x^3-1}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\right)=\dfrac{3}{2}$ ----- (3)

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ $\dfrac{2+\sqrt{5-b}}{2}=\dfrac{3}{2}$

ดังนั้น $b=4$ ----- (4)

จาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=6$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 6} f(x)=f(6)$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^+} f(x)$ ----- (5)

จากฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ จะได้ $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 6^-}\left(\dfrac{x^3-1}{x^2-1}\right) = \dfrac{43}{7}$ ----- (6)

และ $\lim\limits_{x\to 6^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 6^+}\left(\dfrac{\sqrt{x-2}+a}{13-x}\right) = \dfrac{2+a}{7}$ ----- (7)

จาก (5), (6) และ (7) จะได้ $\dfrac{43}{7} = \dfrac{2+a}{7}$

ดังนั้น $a = 41$ ----- (8)

จาก (4) และ (8) จะได้ $\lim\limits_{x\to 14}\dfrac{\sqrt[3]{a-x}}{x-b} = \lim\limits_{x\to 14}\dfrac{\sqrt[3]{41-x}}{x-4} = \dfrac{3}{10}$

5. จาก $y = \dfrac{1}{x^3+3} + (x^2+2x+1)(x^2-5x-4) = (x^3+3)^{-1} + (x^2+2x+1)(x^2-5x-4)$

จะได้
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left((x^3+3)^{-1} + (x^2+2x+1)(x^2-5x-4)\right)\\ &= \frac{d}{dx}(x^3+3)^{-1} + \frac{d}{dx}\left((x^2+2x+1)(x^2-5x-4)\right)\end{aligned}$$

พิจารณา $\dfrac{d}{dx}(x^3+3)^{-1}$

ให้ $u = x^3+3$

จะได้
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^3+3)^{-1} &= \frac{d}{du}(u^{-1})\cdot\frac{du}{dx}\\ &= -u^{-2}\cdot\frac{d}{dx}(x^3+3)\\ &= -\frac{3x^2}{(x^3+3)^2} \qquad \text{----- (1)}\end{aligned}$$

พิจารณา $\dfrac{d}{dx}\left((x^2+2x+1)(x^2-5x-4)\right)$

จาก $\dfrac{d}{dx}\left((x^2+2x+1)(x^2-5x-4)\right)$
$$\begin{aligned}&= (x^2-5x-4)\frac{d}{dx}(x^2+2x+1) + (x^2+2x+1)\frac{d}{dx}(x^2-5x-4)\\ &= (x^2-5x-4)(2x+2) + (x^2+2x+1)(2x-5)\\ &= (2x^3-8x^2-18x-8) + (2x^3-x^2-8x-5)\\ &= 4x^3-9x^2-26x-13 \qquad \text{----- (2)}\end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2}{\left(x^3+3\right)^2}+\left(4x^3-9x^2-26x-13\right)$$

6. จาก $y=f\left(x\right)$ โดยที่ $y=\dfrac{5x^3+2x^2-7x+9}{3x}$

จะได้ $f\left(x\right)=\dfrac{5x^3+2x^2-7x+9}{3x}=\dfrac{5}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x-\dfrac{7}{3}+3x^{-1}$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=f\left(x\right)$ นี้ ที่ x ใด ๆ คือ

$$\begin{aligned} f'\left(x\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}+3x^{-1}\right) \\ &= \frac{10}{3}x+\frac{2}{3}-\frac{3}{x^2} \end{aligned}$$

จาก เส้นตรง l สัมผัสเส้นโค้ง $y=f\left(x\right)$ ที่ $x=1$

จะได้ว่า ความชันของเส้นตรง l คือ $f'(1)=\dfrac{10}{3}(1)+\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{(1)^2}=\dfrac{10}{3}+\dfrac{2}{3}-3=1$

ดังนั้น เส้นตรง l ทำมุม 45 องศากับแกน X ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

7. จาก $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-1}{x}=2x-x^{-1}$

จะได้ $f'(x)=2+\dfrac{1}{x^2}$

จาก $g\left(x\right)=\sqrt{x^3+8}$

จะได้ $g\left(2\right)=\sqrt{2^3+8}=4$

ให้ $u=x^3+8$

จะได้ $g\left(x\right)=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} g'\left(x\right) &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \\ &= \left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right)\left(3x^2\right) \\ &= \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+8}} \end{aligned}$$

จาก $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}(f\circ g)'(2) &= f'(g(2))\cdot g'(2)\\ &= f'(4)\cdot g'(2)\\ &= \left(2+\frac{1}{4^2}\right)\left(\frac{3(2^2)}{2\sqrt{2^3+8}}\right)\\ &= \left(\frac{33}{16}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\\ &= \frac{99}{32}\end{aligned}$$

8. ให้ $u = 1-2x$

จะได้ $y = (1-2x)^4 = u^4$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \frac{d}{du}(u^4)\cdot\frac{d}{dx}(1-2x)\\ &= (4u^3)(-2)\\ &= -8(1-2x)^3\end{aligned}$$

ให้ $u = 1-2x$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = -8(1-2x)^3 = -8u^3$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\\ &= \frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \frac{d}{du}(-8u^3)\cdot\frac{d}{dx}(1-2x)\\ &= (-24u^2)(-2)\\ &= 48(1-2x)^2\end{aligned}$$

9. 1) $\int\left(\frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\right)dx = \int\left(\frac{x^3}{x^2}+\frac{5x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right)dx$

$= \int\left(x+5-4x^{-2}\right)dx$

$= \frac{x^2}{2}+5x+4x^{-1}+C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

2) $\int(3x+4)^2\,dx = \int\left(9x^2+24x+16\right)dx$

$= 3x^3+12x^2+16x+C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

10. จาก $y=f(x)$ และอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x คือ $ax^3-12x+8$

จะได้ $f'(x)=ax^3-12x+8$

จาก $f'(1)=0$

จะได้ $0 = a\left(1^3\right)-12(1)+8$

นั่นคือ $a = 4$

ดังนั้น $f'(x)=4x^3-12x+8$

จะได้ $f(x) = \int\left(4x^3-12x+8\right)dx$

$= x^4-6x^2+8x+C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

จาก $f(0)=1$

จะได้ $1 = 0^4-6\left(0^2\right)+8(0)+C$

นั่นคือ $C = 1$

ดังนั้น $f(x)=x^4-6x^2+8x+1$

พิจารณา $f(a-2) = f(4-2)$

$= f(2)$

$= 2^4-6\left(2^2\right)+8(2)+1$

$= 9$

ดังนั้น $f(a-2)=9$

11. จาก $\int g''(x)\,dx = g'(x) + C$

จะได้ $\int_{-a}^{a} g''(x)\,dx = g'(a) - g'(-a)$ ----- (1)

จาก $g(x) = \frac{x^6}{6} - 3x$

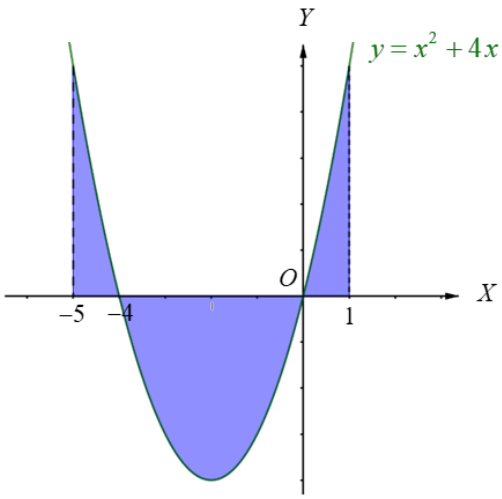
จะได้ $g'(x) = x^5 - 3$

จาก $\int_{-a}^{a} g''(x)\,dx = -\frac{1}{16}$ และ (1) จะได้

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{16} &= g'(a) - g'(-a) \\
-\frac{1}{16} &= \left(a^5 - 3\right) - \left((-a)^5 - 3\right) \\
-\frac{1}{16} &= a^5 - 3 + a^5 + 3 \\
-\frac{1}{16} &= 2a^5 \\
a^5 &= -\frac{1}{32} \\
a &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $g'(a) = g'\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 - 3 = -\frac{97}{32}$

12. พิจารณากราฟของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 4x$ กับแกน X จาก $x = -5$ ถึง $x = 1$ ดังนี้



จะได้ว่าพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 4x$ กับแกน X จาก $x = -5$ ถึง $x = 1$ เท่ากับ $\int_{-5}^{-4}\left(x^2+4x\right)dx - \int_{-4}^{0}\left(x^2+4x\right)dx + \int_{0}^{1}\left(x^2+4x\right)dx$ ตารางหน่วย

จาก $\int\left(x^2+4x\right)dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

จะได้

$$\begin{aligned}
\int_{-5}^{-4}\left(x^2+4x\right)dx &= \left(\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Bigg|_{-5}^{-4} \\
&= \left(\frac{(-4)^3}{3}+2(-4)^2\right)-\left(\frac{(-5)^3}{3}+2(-5)^2\right) \\
&= \frac{61}{3}-18 \\
\int_{-4}^{0}\left(x^2+4x\right)dx &= \left(\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Bigg|_{-4}^{0} \\
&= \left(\frac{0^3}{3}+2\left(0^2\right)\right)-\left(\frac{(-4)^3}{3}+2(-4)^2\right) \\
&= \frac{64}{3}-32
\end{aligned}$$

และ $\int_0^1 (x^2+4x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Big|_0^1$

$= \left(\frac{1^3}{3}+2(1^2)\right)-\left(\frac{0^3}{3}+2(0^2)\right)$

$= \frac{1}{3}+2$

ดังนั้น พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยด้วยเส้นโค้ง $y=x^2+4x$ กับแกน X จาก $x=-5$ ถึง $x=1$

เท่ากับ $\left(\frac{61}{3}-18\right)-\left(\frac{64}{3}-32\right)+\left(\frac{1}{3}+2\right)=\frac{46}{3}$ ตารางหน่วย

13. จาก $f(x)+1=g(x)+x$

จะได้ $f(x)-g(x)=x-1$

และ $(f(x)-g(x))^2=(x-1)^2=x^2-2x+1$

ดังนั้น $\int_1^2 (f(x)-g(x))^2\,dx = \int_1^2 (x^2-2x+1)\,dx$

$= \left(\frac{x^3}{3}-x^2+x\right)\Big|_1^2$

$= \left(\frac{2^3}{3}-2^2+2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-1^2+1\right)$

$= \frac{1}{3}$

14. จาก $f(x)=ax^2+bx+c$

จะได้ $f'(x)=2ax+b$

และ $\int f(x)\,dx=\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx+D$ เมื่อ D เป็นค่าคงตัวใด ๆ

เนื่องจาก เส้นโค้งของฟังก์ชัน f มีความชันที่จุด $(1,3)$ เท่ากับ -1

จะได้ว่า $f(1)=3$ และ $f'(1)=-1$

นั่นคือ $a+b+c=3$ ----- (1)

และ $2a+b=-1$ ----- (2)

จาก $\int_0^1 f(x)\,dx=0$

จะได้ว่า $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=0$ นั่นคือ $2a+3b+6c=0$ ----- (3)

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ $a=-\frac{21}{2}, b=20$ และ $c=-\frac{13}{2}$

นั่นคือ $f(x)=-\frac{21}{2}x^2+20x-\frac{13}{2}$

ดังนั้น $f(2)=-\frac{21}{2}(2^2)+20(2)-\frac{13}{2}=-\frac{17}{2}$

เฉลยแบบฝึกหัดและวิธีทำโดยละเอียด

บทที่ 1 ลำดับและอนุกรม

แบบฝึกหัด 1.1.1

1. 1) แทน n ใน $a_n = 2n+5$ ด้วย $1, 2, 3$ และ 4 จะได้ สี่พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = 2(1)+5 = 7$$
$$a_2 = 2(2)+5 = 9$$
$$a_3 = 2(3)+5 = 11$$
$$a_4 = 2(4)+5 = 13$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ $7, 9, 11$ และ 13

2) แทน n ใน $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ด้วย $1, 2, 3$ และ 4 จะได้ สี่พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$
$$a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
$$a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$
$$a_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ และ $\frac{1}{16}$

3) แทน n ใน $a_n = (-2)^n$ ด้วย $1, 2, 3$ และ 4 จะได้ สี่พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = (-2)^1 = -2$$
$$a_2 = (-2)^2 = 4$$
$$a_3 = (-2)^3 = -8$$
$$a_4 = (-2)^4 = 16$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ $-2, 4, -8$ และ 16

4) แทน n ใน $a_n = \frac{n+1}{n}$ ด้วย $1, 2, 3$ และ 4 จะได้ สี่พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$a_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$a_4 = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ และ $\frac{5}{4}$

5) แทน n ใน $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ ด้วย $1, 2, 3$ และ 4 จะได้ สี่พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = \frac{1+(-1)^1}{1} = \frac{1-1}{1} = 0$$

$$a_2 = \frac{1+(-1)^2}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$a_3 = \frac{1+(-1)^3}{3} = \frac{1-1}{3} = 0$$

$$a_4 = \frac{1+(-1)^4}{4} = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ $0, 1, 0$ และ $\frac{1}{2}$

6) แทน n ใน $a_n = \frac{2^n}{3^n}$ ด้วย $1, 2, 3$ และ 4 จะได้ สี่พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = \frac{2^1}{3^1} = \frac{2}{3}$$

$$a_2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$a_3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

$$a_4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}$ และ $\frac{16}{81}$

7) แทน n ใน $a_n = (n-1)(n+1)$ ด้วย $1, 2, 3$ และ 4 จะได้ สี่พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$\begin{aligned} a_1 &= (1-1)(1+1) = 0(2) = 0 \\ a_2 &= (2-1)(2+1) = 1(3) = 3 \\ a_3 &= (3-1)(3+1) = 2(4) = 8 \\ a_4 &= (4-1)(4+1) = 3(5) = 15 \end{aligned}$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ $0, 3, 8$ และ 15

8) แทน n ใน $a_n = n(n-1)(n-2)$ ด้วย $1, 2, 3$ และ 4 จะได้ สี่พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$\begin{aligned} a_1 &= 1(1-1)(1-2) = 1(0)(-1) = 0 \\ a_2 &= 2(2-1)(2-2) = 2(1)(0) = 0 \\ a_3 &= 3(3-1)(3-2) = 3(2)(1) = 6 \\ a_4 &= 4(4-1)(4-2) = 4(3)(2) = 24 \end{aligned}$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ $0, 0, 6$ และ 24

2. 1) แทน n ใน $a_n = a_{n-1} + n - 1$ ด้วย $2, 3, 4$ และ 5 จะได้

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 2 - 1 = 0 + 2 - 1 = 1 \\ a_3 &= a_2 + 3 - 1 = 1 + 3 - 1 = 3 \\ a_4 &= a_3 + 4 - 1 = 3 + 4 - 1 = 6 \\ a_5 &= a_4 + 5 - 1 = 6 + 5 - 1 = 10 \end{aligned}$$

ดังนั้น ห้าพจน์แรกของลำดับนี้ คือ $0, 1, 3, 6$ และ 10

2) แทน n ใน $a_n = 1 + (0.05)a_{n-1}$ ด้วย $2, 3, 4$ และ 5 จะได้

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 + (0.05)a_1 = 1 + (0.05)(1{,}000) = 51 \\ a_3 &= 1 + (0.05)a_2 = 1 + (0.05)(51) = 3.55 \\ a_4 &= 1 + (0.05)a_3 = 1 + (0.05)(3.55) = 1.1775 \\ a_5 &= 1 + (0.05)a_4 = 1 + (0.05)(1.1775) = 1.058875 \end{aligned}$$

ดังนั้น ห้าพจน์แรกของลำดับนี้ คือ $1000, 51, 3.55, 1.1775$ และ 1.058875

3) แทน n ใน $a_n = 6a_{n-1}$ ด้วย 2, 3, 4 และ 5 จะได้

$$a_2 = 6a_1 = 6(2) = 12$$
$$a_3 = 6a_2 = 6(12) = 72$$
$$a_4 = 6a_3 = 6(72) = 432$$
$$a_5 = 6a_4 = 6(432) = 2{,}592$$

ดังนั้น ห้าพจน์แรกของลำดับนี้ คือ 2, 12, 72, 432 และ 2,592

4) แทน n ใน $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ ด้วย 3, 4 และ 5 จะได้

$$a_3 = a_2 + 2a_1 = 2 + 2(1) = 4$$
$$a_4 = a_3 + 2a_2 = 4 + 2(2) = 8$$
$$a_5 = a_4 + 2a_3 = 8 + 2(4) = 16$$

ดังนั้น ห้าพจน์แรกของลำดับนี้ คือ 1, 2, 4, 8 และ 16

5) แทน n ใน $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ด้วย 3, 4 และ 5 จะได้

$$a_3 = a_2 + a_1 = 0 + 2 = 2$$
$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 0 = 2$$
$$a_5 = a_4 + a_3 = 2 + 2 = 4$$

ดังนั้น ห้าพจน์แรกของลำดับนี้ คือ 2, 0, 2, 2 และ 4

3. เนื่องจากจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 2 และ 7 ลงตัว คือ จำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 14 ลงตัว จะได้ว่า จำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 2 และ 7 ลงตัว เขียนอยู่ในรูป $14n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก นั่นคือ ลำดับของจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 2 และ 7 ลงตัว มีพจน์ทั่วไป คือ $a_n = 14n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

แทน n ใน $a_n = 14n$ ด้วย 1, 2, 3, 4, 5, 6 และ 7

จะได้ เจ็ดพจน์แรกของลำดับของจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 2 และ 7 ลงตัว คือ

14, 28, 42, 56, 70, 84 และ 98

แบบฝึกหัด 1.1.2

1. 1) จาก $a_1 = 2$ และ $d = 4$ จะได้

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d = 2 + 4 = 6 \\ a_3 &= a_2 + d = 6 + 4 = 10 \\ a_4 &= a_3 + d = 10 + 4 = 14 \end{aligned}$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $2, 6, 10$ และ 14

2) จาก $a_1 = 3$ และ $d = 5$ จะได้

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d = 3 + 5 = 8 \\ a_3 &= a_2 + d = 8 + 5 = 13 \\ a_4 &= a_3 + d = 13 + 5 = 18 \end{aligned}$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $3, 8, 13$ และ 18

3) จาก $a_1 = -3$ และ $d = 3$ จะได้

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d = -3 + 3 = 0 \\ a_3 &= a_2 + d = 0 + 3 = 3 \\ a_4 &= a_3 + d = 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $-3, 0, 3$ และ 6

4) จาก $a_1 = -4$ และ $d = 2$ จะได้

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d = -4 + 2 = -2 \\ a_3 &= a_2 + d = -2 + 2 = 0 \\ a_4 &= a_3 + d = 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $-4, -2, 0$ และ 2

5) จาก $a_1 = 5$ และ $d = -2$ จะได้

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d = 5 + (-2) = 3 \\ a_3 &= a_2 + d = 3 + (-2) = 1 \\ a_4 &= a_3 + d = 1 + (-2) = -1 \end{aligned}$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $5, 3, 1$ และ -1

6) จาก $a_1 = -3$ และ $d = -4$ จะได้

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d = (-3) + (-4) = -7 \\ a_3 &= a_2 + d = (-7) + (-4) = -11 \end{aligned}$$

$$a_4 = a_3 + d = (-11) + (-4) = -15$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $-3, -7, -11$ และ -15

7) จาก $a_1 = \frac{1}{2}$ และ $d = \frac{1}{2}$ จะได้

$$a_2 = a_1 + d = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$a_3 = a_2 + d = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_4 = a_3 + d = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ และ 2

8) จาก $a_1 = \frac{5}{2}$ และ $d = -\frac{3}{2}$ จะได้

$$a_2 = a_1 + d = \frac{5}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) = 1$$

$$a_3 = a_2 + d = 1 + \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$a_4 = a_3 + d = \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) = -2$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $\frac{5}{2}, 1, -\frac{1}{2}$ และ -2

2. 1) เนื่องจาก $a_1 = 4,\ d = 3$ และ $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$\begin{aligned} a_3 &= 4 + (3-1)(3) \\ &= 4 + (2)(3) \\ &= 10 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a_3 = 10$

2) เนื่องจาก $a_1 = 7,\ d = -3$ และ $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$\begin{aligned} a_{12} &= 7 + (12-1)(-3) \\ &= 7 + (11)(-3) \\ &= -26 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a_{12} = -26$

3) เนื่องจาก $a_1 = \frac{4}{5},\ d = -1$ และ $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$\begin{aligned} a_{20} &= \frac{4}{5} + (20-1)(-1) \\ &= \frac{4}{5} + (19)(-1) \\ &= -\frac{91}{5} \end{aligned}$$

ดังนั้น $a_{20} = -\frac{91}{5}$

4) เนื่องจาก $a_1 = 4,\ d = \frac{1}{2}$ และ $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$\begin{aligned} a_{11} &= 4 + (11-1)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 4 + (10)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 9 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a_{11} = 9$

3. 1) จากลำดับเลขคณิต $-2, 4, 10, \ldots$

จะได้ $a_1 = -2$ และ $d = 4 - (-2) = 6$

เนื่องจากพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้

$$\begin{aligned} a_n &= -2 + (n-1)(6) \\ &= -2 + 6n - 6 \\ &= 6n - 8 \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $6n - 8$

2) จากลำดับเลขคณิต $-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \ldots$

จะได้ $a_1 = -\frac{1}{6}$ และ $d = \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

เนื่องจากพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $a_n = -\frac{1}{6}+(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)$

$= -\frac{1}{6}+\frac{1}{3}n-\frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3}n-\frac{1}{2}$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $\frac{1}{3}n-\frac{1}{2}$

3) จากลำดับเลขคณิต $11, \frac{27}{2}, 16, \ldots$

จะได้ $a_1 = 11$ และ $d = \frac{27}{2}-11 = \frac{5}{2}$

เนื่องจากพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1+(n-1)d$

จะได้ $a_n = 11+(n-1)\left(\frac{5}{2}\right)$

$= 11+\frac{5}{2}n-\frac{5}{2}$

$= \frac{5}{2}n+\frac{17}{2}$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $\frac{5}{2}n+\frac{17}{2}$

4) จากลำดับเลขคณิต $19.74, 22.54, 25.34, \ldots$

จะได้ $a_1 = 19.74$ และ $d = 22.54-19.74 = 2.80$

เนื่องจากพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1+(n-1)d$

จะได้ $a_n = 19.74+(n-1)(2.80)$

$= 19.74+2.80n-2.80$

$= 2.80n+16.94$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $2.80n+16.94$

5) จากลำดับเลขคณิต $x, x+2, x+4, \ldots$

จะได้ $a_1 = x$ และ $d = (x+2)-x = 2$

เนื่องจากพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1+(n-1)d$

จะได้ $a_n = x+(n-1)(2)$

$= x+2n-2$

$= 2n+x-2$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $2n+x-2$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

6) จากลำดับเลขคณิต $3a+2b, 2a+4b, a+6b, \ldots$

จะได้ $a_1 = 3a+2b$ และ $d = (2a+4b)-(3a+2b) = -a+2b$

เนื่องจากพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1+(n-1)d$

จะได้ $a_n = (3a+2b)+(n-1)(-a+2b)$

$= 3a+2b+(-a+2b)n+a-2b$

$= 4a+(-a+2b)n$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $4a+(-a+2b)n$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

4. 1) จาก $a_1 = 13$ และ $a_2 = 25$

จะได้ $d = 25-13 = 12$

นั่นคือ $a_3 = a_2+d = 25+12 = 37$

$a_4 = a_3+d = 37+12 = 49$

$a_5 = a_4+d = 49+12 = 61$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ 37, 49 และ 61 ตามลำดับ

2) จาก $a_1 = 18$, $a_3 = 11$ และ $a_n = a_1+(n-1)d$

จะได้ $11 = 18+(3-1)d$

$d = -\frac{7}{2}$

นั่นคือ $a_2 = a_1+d = 18+\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{29}{2}$

$a_4 = a_3+d = 11+\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{2}$

$a_5 = a_4+d = \frac{15}{2}+\left(-\frac{7}{2}\right) = 4$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ $\frac{29}{2}, \frac{15}{2}$ และ 4 ตามลำดับ

3) จาก $a_1 = 13,\ a_5 = 33$ และ $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $33 = 13 + (5-1)d$

$d = 5$

นั่นคือ $a_2 = a_1 + d = 13 + 5 = 18$

$a_3 = a_2 + d = 18 + 5 = 23$

$a_4 = a_3 + d = 23 + 5 = 28$

$a_6 = a_5 + d = 33 + 5 = 38$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ 18, 23, 28 และ 38 ตามลำดับ

4) จาก $a_3 = 100,\ a_6 = 142$ และ $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$100 = a_1 + (3-1)d$ ----- (1)

$142 = a_1 + (6-1)d$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = 14$ และ $a_1 = 72$

นั่นคือ $a_2 = a_1 + d = 72 + 14 = 86$

$a_4 = a_3 + d = 100 + 14 = 114$

$a_5 = a_4 + d = 114 + 14 = 128$

$a_7 = a_6 + d = 142 + 14 = 156$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ 72, 86, 114, 128 และ 156 ตามลำดับ

5. จากลำดับเลขคณิต 3, 8, 13, 18, 23, …

จะได้ $a_1 = 3$ และ $d = 8 - 3 = 5$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $a_{15} = 3 + (15-1)(5)$

$= 3 + (14)(5)$

$= 73$

ดังนั้น พจน์ที่ 15 ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 73

6. จากพจน์ที่ n ของลำดับที่กำหนดให้ ซึ่งคือ $a_n = -n - 3$

จะได้ $a_{20} = -20 - 3 = -23$

และ $a_{50} = -50 - 3 = -53$

ดังนั้น พจน์ที่ 20 ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ -23 และพจน์ที่ 50 ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ -53

7. จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$12 = a_1 + (6-1)d \quad \text{----- (1)}$$
$$16 = a_1 + (10-1)d \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = 1$ และ $a_1 = 7$

ดังนั้น พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 7

8. จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$20 = a_1 + (3-1)d \quad \text{----- (1)}$$
$$32 = a_1 + (7-1)d \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = 3$ และ $a_1 = 14$

นั่นคือ $a_{25} = 14 + (25-1)(3)$

$= 14 + (24)(3)$

$= 86$

ดังนั้น พจน์ที่ 25 ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 86

9. จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$16 = a_1 + (2-1)d \quad \text{----- (1)}$$
$$116 = a_1 + (12-1)d \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = 10$ และ $a_1 = 6$

นั่นคือ $a_n = 6 + (n-1)(10)$

$= 6 + 10n - 10$

$= 10n - 4$

ดังนั้น $a_n = 10n - 4$ และ $d = 10$

10. ลำดับเลขคณิตที่กำหนดให้มี $a_1 = -1$ และ $d = -6 - (-1) = -5$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $-176 = -1 + (n-1)(-5)$

$n = 36$

ดังนั้น -176 เป็นพจน์ที่ 36 ของลำดับเลขคณิตนี้

11. ให้ a เป็นพจน์ของลำดับเลขคณิตที่อยู่ระหว่าง 39 และ 51

จะได้ $39, a, 51$ เป็นสามพจน์เรียงกันของลำดับเลขคณิต

จาก $d = a_{n+1} - a_n$

จะได้ $d = a_2 - a_1 = a - 39$ และ $d = a_3 - a_2 = 51 - a$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} a - 39 &= 51 - a \\ 2a &= 90 \\ a &= 45 \end{aligned}$$

นั่นคือ 45 เป็นพจน์ของลำดับเลขคณิตที่อยู่ระหว่าง 39 และ 51

12. จำนวนนับที่น้อยที่สุดที่มากกว่า 100 ซึ่งหารด้วย 13 ลงตัว คือ 104

เนื่องจาก 1,000 หารด้วย 13 ได้ผลหาร 76 เหลือเศษ 12

ดังนั้น จำนวนนับที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 1,000 ซึ่งหารด้วย 13 ลงตัว คือ $1,000 - 12 = 988$

จะได้ว่า ลำดับของจำนวนนับที่อยู่ระหว่าง 100 ถึง 1,000 ซึ่งหารด้วย 13 ลงตัว เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 104 ผลต่างร่วมเป็น 13 และพจน์ที่ n เป็น 988

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้
$$\begin{aligned} 988 &= 104 + (n-1)(13) \\ 988 &= 91 + 13n \\ 13n &= 897 \\ n &= 69 \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนนับที่อยู่ระหว่าง 100 ถึง 1,000 ที่หารด้วย 13 ลงตัว มีทั้งหมด 69 จำนวน

13. เนื่องจาก $a, 6a+2, 8a+1$ เป็นสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิต

จาก $d = a_{n+1} - a_n$

จะได้ $d = a_2 - a_1 = (6a+2) - a = 5a + 2$ และ $d = a_3 - a_2 = (8a+1) - (6a+2) = 2a - 1$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} 5a + 2 &= 2a - 1 \\ 3a &= -3 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

นั่นคือ สามพจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ $-1, -4, -7$

จะได้ $a_1 = -1$ และ $d = -4 - (-1) = -3$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้
$$\begin{aligned} a_n &= -1 + (n-1)(-3) \\ &= -1 - 3n + 3 \\ &= 2 - 3n \end{aligned}$$

ดังนั้น a ในลำดับเลขคณิตที่กำหนดให้ คือ -1 และพจน์ทั่วไปของลำดับ คือ $2 - 3n$

14. ให้ a_1, a_2, a_3 เป็นสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิต

โดยที่ $a_1 + a_2 + a_3 = 12$ และ $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = 408$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 12 \\ a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) &= 12 \\ 3a_1 + 3d &= 12 \\ a_1 + d &= 4 \qquad \text{----- (1)} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 &= 408 \\ a_1^3 + (a_1 + d)^3 + (a_1 + 2d)^3 &= 408 \\ (4-d)^3 + 4^3 + (4+d)^3 &= 408 \end{aligned}$$

จาก (1) จะได้

$$\begin{aligned} \left(64 - 3(4^2)d + 3(4)d^2 - d^3\right) + 4^3 + \left(64 + 3(4^2)d + 3(4)d^2 + d^3\right) &= 408 \\ 64 + 12d^2 + 64 + 64 + 12d^2 &= 408 \\ 24d^2 &= 216 \\ d^2 &= 9 \end{aligned}$$

นั่นคือ $d = 3$ หรือ $d = -3$

กรณี $d = 3$ จาก (1) จะได้ $a_1 = 1$

นั่นคือ $a_n = 1 + (n-1)(3) = 3n - 2$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ $3n - 2$

กรณี $d = -3$ จาก (1) จะได้ $a_1 = 7$

นั่นคือ $a_n = 7 + (n-1)(-3) = -3n + 10$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ $-3n + 10$

หมายเหตุ

อาจหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนด โดยให้ $a_2 = a$ จะได้ว่า $a_1 = a - d$ และ $a_3 = a + d$ เมื่อ d เป็นผลต่างร่วม จากนั้นดำเนินการตามวิธีข้างต้น

15. สมศักดิ์ได้รับเงินเดือนเดือนละ 25,000 บาท และได้รับเงินเดือนเพิ่มขึ้นปีละ 1,000 บาท
นั่นคือ เมื่อสมศักดิ์ทำงานได้ 1 ปี เขาจะได้รับเงินเดือนเดือนละ $25,000+1,000=26,000$ บาท
เมื่อสมศักดิ์ทำงานได้ 2 ปี เขาจะได้รับเงินเดือนเดือนละ $26,000+1(1,000)=27,000$ บาท
เมื่อสมศักดิ์ทำงานได้ 3 ปี เขาจะได้รับเงินเดือนเดือนละ $26,000+2(1,000)=28,000$ บาท
ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่าเมื่อสมศักดิ์ทำงานได้ n ปี เขาจะได้รับเงินเดือนเดือนละ
$26,000+(n-1)(1,000)$ บาท
จะได้ว่า ลำดับของเงินเดือนที่สมศักดิ์ได้รับเมื่อทำงานได้ 1, 2, 3, …, n, … ปี คือ

$$26000, 27000, 28000, \ldots, 26000+(n-1)(1000), \ldots$$

ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 26,000 และผลต่างร่วมเป็น 1,000
เมื่อสมศักดิ์ทำงานได้ 6 ปี เขาจะได้รับเงินเดือนเท่ากับพจน์ที่ 6 ของลำดับนี้
ดังนั้น เมื่อสมศักดิ์ทำงานได้ 6 ปี เขาจะได้รับเงินเดือนเดือนละ $26,000+(6-1)(1,000)=31,000$ บาท

16. บริษัทแห่งหนึ่งรับซื้อรถยนต์ที่ใช้แล้ว 1 ปีในราคาที่ต่ำกว่าราคาที่บริษัทขาย 100,000 บาท
สำหรับรถยนต์ที่ใช้แล้วเกิน 1 ปี ราคาซื้อคืนจะลดลงอีกปีละ 70,000 บาท

วิธีที่ 1 พิจารณาราคาที่บริษัทรับซื้อรถคืน
เนื่องจาก ซื้อรถยนต์จากบริษัทนี้มาในราคา 1,000,000 บาท
สำหรับรถยนต์ที่ใช้แล้ว 1 ปี บริษัทจะรับซื้อรถคืนในราคา

$$1,000,000-100,000=900,000 \text{ บาท}$$

สำหรับรถยนต์ที่ใช้แล้ว 2 ปี บริษัทจะรับซื้อรถคืนในราคา

$$900,000-(2-1)(70,000)=830,000 \text{ บาท}$$

สำหรับรถยนต์ที่ใช้แล้ว 3 ปี บริษัทจะรับซื้อรถคืนในราคา

$$900,000-(3-1)(70,000)=760,000 \text{ บาท}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่าสำหรับรถยนต์ที่ใช้แล้ว n ปี บริษัทจะรับซื้อรถคืนในราคา

$$900,000-(n-1)(70,000) \text{ บาท}$$

จะได้ ลำดับของราคาที่บริษัทจะรับซื้อคืน สำหรับรถยนต์ที่ใช้ไปแล้ว 1, 2, 3, …, n, … ปี คือ

$$900000, 830000, 760000, \ldots, 900,000-(n-1)(70,000), \ldots$$

ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 900,000 และผลต่างร่วมเป็น 70,000

เมื่อใช้รถยนต์ไปแล้ว 5 ปี ราคาที่บริษัทจะรับซื้อคืนเท่ากับพจน์ที่ 5 ของลำดับนี้

ดังนั้น เมื่อใช้รถยนต์ไปแล้ว 5 ปี ราคาที่บริษัทจะรับซื้อคืนเท่ากับ

$900,000-(5-1)(70,000)=620,000$ บาท

นั่นคือ เมื่อใช้รถยนต์ไปแล้ว 5 ปี บริษัทจะรับซื้อรถยนต์คืนในราคาที่ต่ำกว่าราคาที่ซื้อจากบริษัท $1,000,000-620,000=380,000$ บาท

วิธีที่ 2 พิจารณาส่วนต่างของราคาขายและราคาซื้อคืน

สำหรับรถยนต์ที่ใช้แล้ว 1 ปี ส่วนต่างของราคาขายและราคาซื้อคืนเท่ากับ 100,000 บาท

สำหรับรถยนต์ที่ใช้แล้ว 2 ปี ส่วนต่างของราคาขายและราคาซื้อคืนเท่ากับ

$100,000+(2-1)70,000=170,000$ บาท

สำหรับรถยนต์ที่ใช้แล้ว 3 ปี ส่วนต่างของราคาขายและราคาซื้อคืนเท่ากับ

$100,000+(3-1)70,000=240,000$ บาท

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่าสำหรับรถยนต์ที่ใช้แล้ว n ปี ส่วนต่างของราคาขายและราคาซื้อคืนเท่ากับ $100,000+(n-1)(70,000)$ บาท

จะได้ ลำดับของส่วนต่างของราคาขายและราคาซื้อคืน สำหรับรถยนต์ที่ใช้ไปแล้ว 1, 2, 3, …, n, … ปี คือ $100000, 170000, 240000, \ldots, 100000+(n-1)(70000), \ldots$

ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 100,000 และผลต่างร่วมเป็น 70,000

เมื่อใช้รถยนต์ไปแล้ว 5 ปี ส่วนต่างของราคาขายและราคาซื้อคืนเท่ากับพจน์ที่ 5 ของลำดับนี้

ดังนั้น เมื่อใช้รถยนต์ไปแล้ว 5 ปี ส่วนต่างของราคาขายและราคาซื้อคืนเท่ากับ

$100,000+(5-1)(70,000)=380,000$ บาท

นั่นคือ เมื่อใช้รถยนต์ไปแล้ว 5 ปี บริษัทจะรับซื้อรถยนต์คืนในราคาที่ต่ำกว่าราคาที่ซื้อจากบริษัท 380,000 บาท

แบบฝึกหัด 1.1.3

1. 1) จาก $7, 9, 11, 13, \ldots, 2n+5$

พิจารณาผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกัน

จะได้ว่า $a_2 - a_1 = 9 - 7 = 2$

$a_3 - a_2 = 11 - 9 = 2$

$a_4 - a_3 = 13 - 11 = 2$

$a_n - a_{n-1} = (2n+5) - (2(n-1)+5) = (2n+5) - (2n+3) = 2$

ดังนั้น ผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกันเป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน ซึ่งเท่ากับ 2

พิจารณาอัตราส่วนของพจน์ที่อยู่ติดกัน

จะได้ว่า $\frac{a_2}{a_1} = \frac{9}{7}$

$\frac{a_3}{a_2} = \frac{11}{9}$

จะเห็นว่า อัตราส่วนของพจน์ที่อยู่ติดกันไม่เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วมเท่ากับ 2 แต่ไม่เป็นลำดับเรขาคณิต

2) จาก $6, -6, 6, -6, \ldots, 6(-1)^{n-1}$

พิจารณาผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกัน

จะได้ว่า $a_2 - a_1 = (-6) - 6 = -12$

$a_3 - a_2 = 6 - (-6) = 12$

จะเห็นว่า ผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกันไม่เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน

พิจารณาอัตราส่วนของพจน์ที่อยู่ติดกัน

จะได้ว่า $\frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{6} = -1$

$\frac{a_3}{a_2} = \frac{6}{-6} = -1$

$\frac{a_4}{a_3} = \frac{-6}{6} = -1$

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{6(-1)^n}{6(-1)^{n-1}} = -1$

จะเห็นว่า อัตราส่วนของพจน์ที่อยู่ติดกันเป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน ซึ่งเท่ากับ -1

ดังนั้น ลำดับนี้ไม่เป็นลำดับเลขคณิต แต่เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเท่ากับ -1

3) จาก $4, 2, 0, -2, \ldots, 6-2n$

พิจารณาผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกัน

จะได้ว่า $a_2 - a_1 = 2 - 4 = -2$

$a_3 - a_2 = 0 - 2 = -2$

$a_4 - a_3 = (-2) - 0 = -2$

$a_n - a_{n-1} = (6-2n) - (6-2(n-1)) = (6-2n) - (8-2n) = -2$

จะเห็นว่า ผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกันเป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน ซึ่งเท่ากับ -2

พิจารณาอัตราส่วนของพจน์ที่อยู่ติดกัน

จะได้ว่า $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{a_3}{a_2} = \frac{0}{2} = 0$

จะเห็นว่า อัตราส่วนของพจน์ที่อยู่ติดกันไม่เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วมเท่ากับ -2 แต่ไม่เป็นลำดับเรขาคณิต

4) จาก $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots, 9\left(\frac{1}{3}\right)^n$

พิจารณาผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกัน

จะได้ว่า $a_2 - a_1 = 1 - 3 = -2$

$a_3 - a_2 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$

จะเห็นว่า ผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกันไม่เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน

พิจารณาอัตราส่วนของพจน์ที่อยู่ติดกัน

จะได้ว่า $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$

$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$

$$\frac{a_4}{a_3}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{9\left(\frac{1}{3}\right)^n}{9\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}=\frac{1}{3}$$

จะเห็นว่า อัตราส่วนของพจน์ที่อยู่ติดกันเป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน ซึ่งเท่ากับ -1

ดังนั้น ลำดับนี้ไม่เป็นลำดับเลขคณิต แต่เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเท่ากับ -1

5) จาก $-\frac{1}{4},-\frac{2}{5},-\frac{1}{2},-\frac{4}{7},\ldots,-\frac{n}{n+3}$

พิจารณาผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกัน

จะได้ว่า $a_2-a_1=\left(-\frac{2}{5}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{20}$

$$a_3-a_2=\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{1}{10}$$

จะเห็นว่า ผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกันไม่เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน

พิจารณาอัตราส่วนของพจน์ที่อยู่ติดกัน

จะได้ว่า $\frac{a_2}{a_1}=\frac{\left(-\frac{2}{5}\right)}{\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{8}{5}$

$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{2}{5}\right)}=\frac{5}{4}$$

จะเห็นว่า อัตราส่วนของพจน์ที่อยู่ติดกันไม่เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน

ดังนั้น ลำดับนี้ไม่เป็นลำดับเลขคณิตและไม่เป็นลำดับเรขาคณิต

2. 1) จากลำดับเรขาคณิต $1, 7, 49, 343, \ldots$

จะได้ $a_1 = 1$ และ $r = \frac{7}{1} = 7$

พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้
$$a_5 = a_1 r^{5-1} = 1\left(7^4\right) = 7^4 = 2{,}401$$
$$a_6 = a_1 r^{6-1} = 1\left(7^5\right) = 7^5 = 16{,}807$$
$$a_7 = a_1 r^{7-1} = 1\left(7^6\right) = 7^6 = 117{,}649$$

ดังนั้น สามพจน์ถัดไปของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ 2401, 16807 และ 117,649

2) จากลำดับเรขาคณิต $-1, 2, -4, 8, \ldots$

จะได้ $a_1 = -1$ และ $r = \frac{2}{-1} = -2$

พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้
$$a_5 = a_1 r^{5-1} = (-1)(-2)^4 = -16$$
$$a_6 = a_1 r^{6-1} = (-1)(-2)^5 = 32$$
$$a_7 = a_1 r^{7-1} = (-1)(-2)^6 = -64$$

ดังนั้น สามพจน์ถัดไปของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $-16, 32$ และ -64

3) จากลำดับเรขาคณิต $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$

จะได้ $a_1 = 3$ และ $r = \frac{1}{3}$

พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้
$$a_5 = a_1 r^{5-1} = 3\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$
$$a_6 = a_1 r^{6-1} = 3\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$
$$a_7 = a_1 r^{7-1} = 3\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$$

ดังนั้น สามพจน์ถัดไปของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{1}{27}, \frac{1}{81}$ และ $\frac{1}{243}$

3. จากลำดับเรขาคณิต $2, 4, 8, 16, \ldots$

จะได้ $a_1 = 2$ และ $r = \frac{4}{2} = 2$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1} = 2(2)^{n-1} = 2^n$

จะได้ $a_9 = 2^9 = 512$

ดังนั้น พจน์ที่ 9 ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ 512

4. จากลำดับเรขาคณิต $2, -10, 50, -250, \ldots$

จะได้ $a_1 = 2$ และ $r = \frac{-10}{2} = -5$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1} = 2(-5)^{n-1}$

จะได้ $a_{11} = 2(-5)^{11-2} = 2(-5)^{10} = 2(5)^{10}$

ดังนั้น พจน์ที่ 11 ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $2(5^{10})$

5. จากลำดับเรขาคณิต $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \ldots$

จะได้ $a_1 = \frac{1}{2}$ และ $r = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

จะได้ $a_8 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{8-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{7} = \frac{1}{2 \times 3^7}$

ดังนั้น พจน์ที่ 8 ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{1}{2 \times 3^7}$

6. 1) จากลำดับเรขาคณิต $-3, -6, -12, \ldots$

จะได้ $a_1 = -3$ และ $r = 2$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $a_n = -3(2)^{n-1}$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $-3(2)^{n-1}$

2) จากลำดับเรขาคณิต $10, -5, \frac{5}{2}, \ldots$

จะได้ $a_1 = 10$ และ $r = -\frac{1}{2}$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $a_n = 10\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $10\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

3) จากลำดับเรขาคณิต $\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{25}{4}, \ldots$

จะได้ $a_1 = \frac{1}{4}$ และ $r = 5$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $a_n = \frac{1}{4}\left(5^{n-1}\right)$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{1}{4}\left(5^{n-1}\right)$

4) จากลำดับเรขาคณิต $\frac{5}{6}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \ldots$

จะได้ $a_1 = \frac{5}{6}$ และ $r = 2$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $a_n = \frac{5}{6}\left(2^{n-1}\right)$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{5}{6}\left(2^{n-1}\right)$

5) จากลำดับเรขาคณิต $-\frac{2}{9}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{32}, \ldots$

จะได้ $a_1 = -\frac{2}{9}$ และ $r = -\frac{3}{8}$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $a_n = -\frac{2}{9}\left(-\frac{3}{8}\right)^{n-1}$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $-\frac{2}{9}\left(-\frac{3}{8}\right)^{n-1}$

6) จากลำดับเรขาคณิต $2, 2\sqrt{3}, 6, \ldots$

จะได้ $a_1 = 2$ และ $r = \sqrt{3}$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $a_n = 2\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $2\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$

7) จากลำดับเรขาคณิต $-1, 0.3, -0.09, \ldots$

จะได้ $a_1 = -1$ และ $r = \frac{0.3}{-1} = -0.3$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $a_n = -1(-0.3)^{n-1} = -(-0.3)^{n-1} = (-1)^n (0.3)^{n-1}$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $(-1)^n (0.3)^{n-1}$

8) จากลำดับเรขาคณิต $ab^3, a^2b^2, a^3b, \ldots$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์

จะได้ $a_1 = ab^3$ และ $r = \frac{a^2b^2}{ab^3} = \frac{a}{b}$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $a_n = \left(ab^3\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} = a^n b^{4-n}$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $a^n b^{4-n}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์

7. เนื่องจาก ลำดับเรขาคณิตนี้มีพจน์ที่ห้า คือ 16 และอัตราส่วนร่วม คือ 2

นั่นคือ $a_5 = 16$ และ $r = 2$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $a_5 = a_1 r^{5-1} = a_1 r^4$

ดังนั้น $16 = a_1 (2)^4$

จะได้ $a_1 = 1$

ดังนั้น พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ 1

8. เนื่องจาก ลำดับเรขาคณิตนี้มี $a_3 = 12$ และ $a_6 = 96$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $a_3 = a_1 r^{3-1} = a_1 r^2$

และ $a_6 = a_1 r^{6-1} = a_1 r^5$

ดังนั้น $12 = a_1 r^2$ ----- (1)

และ $96 = a_1 r^5$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $r^3 = 8$ นั่นคือ $r = 2$

ดังนั้น อัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ 2

9. เนื่องจาก ลำดับเรขาคณิตนี้มี $a_1 = 2, a_2 = -6$ และ $a_3 = 18$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $-6 = 2r^{2-1}$ นั่นคือ $-6 = 2r$ ----- (1)

และ $18 = 2r^{3-1}$ นั่นคือ $18 = 2r^2$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $r = -3$

นั่นคือ $a_n = 2(-3)^{n-1}$

เมื่อ $a_n = 162$

จะได้ $162 = 2(-3)^{n-1}$

$81 = (-3)^{n-1}$

$(-3)^4 = (-3)^{n-1}$

นั่นคือ $n-1 = 4$

จะได้ $n = 5$

ดังนั้น 162 เป็นพจน์ที่ 5 ของลำดับเรขาคณิตนี้

10. 1) พจน์ที่หายไปของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ a_3, a_4 และ a_5

จากลำดับเรขาคณิตที่กำหนดให้ จะได้ $a_1 = 4$ และ $r = \frac{1}{4}$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $a_n = a_1 r^{n-1} = 4\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}$

นั่นคือ $a_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^{3-2} = \frac{1}{4}$

$a_4 = \left(\frac{1}{4}\right)^{4-2} = \frac{1}{16}$

$a_5 = \left(\frac{1}{4}\right)^{5-2} = \frac{1}{64}$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}$ และ $\frac{1}{64}$ ตามลำดับ

2) พจน์ที่หายไปของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ a_2, a_4 และ a_5

จากลำดับเรขาคณิตที่กำหนดให้ จะได้ $a_1 = 2$ และ $a_3 = \frac{2}{9}$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $\frac{2}{9} = 2(r)^{3-1}$

$\frac{2}{9} = 2r^2$

$r^2 = \frac{1}{9}$

นั่นคือ $r = \frac{1}{3}$ หรือ $r = -\frac{1}{3}$

กรณี $r=\frac{1}{3}$ จะได้ $a_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

นั่นคือ $a_2 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{2-1} = \frac{2}{3}$

$a_4 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{4-1} = \frac{2}{27}$

$a_5 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{5-1} = \frac{2}{81}$

กรณี $r=-\frac{1}{3}$ จะได้ $a_n=2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

นั่นคือ $a_2 = 2\left(-\frac{1}{3}\right)^{2-1} = -\frac{2}{3}$

$a_4 = 2\left(-\frac{1}{3}\right)^{4-1} = -\frac{2}{27}$

$a_5 = 2\left(-\frac{1}{3}\right)^{5-1} = \frac{2}{81}$

ดังนั้น กรณี $r=\frac{1}{3}$ พจน์ที่ขาดหายไป คือ $\frac{2}{3}, \frac{2}{27}$ และ $\frac{2}{81}$ ตามลำดับ

และกรณี $r=-\frac{1}{3}$ พจน์ที่ขาดหายไป คือ $-\frac{2}{3}, -\frac{2}{27}$ และ $\frac{2}{81}$ ตามลำดับ

3) พจน์ที่หายไปของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ a_2, a_3, a_4 และ a_6

จากลำดับเรขาคณิตที่กำหนดให้ จะได้ $a_1=\frac{3}{7}$ และ $a_5=\frac{3}{343}$

จาก $a_n=a_1r^{n-1}$

จะได้ $\frac{3}{343} = \frac{3}{7}(r)^{5-1}$

$\frac{3}{343} = \frac{3}{7}r^4$

$r^4 = \frac{1}{49}$

นั่นคือ $r=\frac{1}{\sqrt{7}}$ หรือ $r=-\frac{1}{\sqrt{7}}$

กรณี $r=\frac{1}{\sqrt{7}}$ จะได้ $a_n=\frac{3}{7}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{n-1}$

นั่นคือ $a_2 = \frac{3}{7}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{2-1} = \frac{3}{7\sqrt{7}}$

$a_3 = \frac{3}{7}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{3-1} = \frac{3}{49}$

$a_4 = \frac{3}{7}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{4-1} = \frac{3}{49\sqrt{7}}$

$a_6 = \frac{3}{7}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{6-1} = \frac{3}{343\sqrt{7}}$

กรณี $r=-\frac{1}{\sqrt{7}}$ จะได้ $a_n=\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{n-1}$

นั่นคือ $a_2 = \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{2-1} = -\frac{3}{7\sqrt{7}}$

$a_3 = \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{3-1} = \frac{3}{49}$

$a_4 = \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{4-1} = -\frac{3}{49\sqrt{7}}$

$a_6 = \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{6-1} = -\frac{3}{343\sqrt{7}}$

ดังนั้น กรณี $r=\frac{1}{\sqrt{7}}$ พจน์ที่ขาดหายไป คือ $\frac{3}{7\sqrt{7}}, \frac{3}{49}, \frac{3}{49\sqrt{7}}$ และ $\frac{3}{343\sqrt{7}}$ ตามลำดับ

และกรณี $r=-\frac{1}{\sqrt{7}}$ พจน์ที่ขาดหายไป คือ $-\frac{3}{7\sqrt{7}}, \frac{3}{49}, -\frac{3}{49\sqrt{7}}$ และ $-\frac{3}{343\sqrt{7}}$ ตามลำดับ

4) พจน์ที่หายไปของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ a_1, a_2, a_4, a_5 และ a_7

จากลำดับเรขาคณิตที่กำหนดให้ จะได้ $a_3=1$ และ $a_6=\frac{8}{27}$

จาก $a_n=a_1r^{n-1}$

จะได้ $1 = a_1(r)^2$ ----- (1)

$\frac{8}{27} = a_1(r)^5$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $r=\frac{2}{3}$ และ $a_1=\frac{9}{4}$

นั่นคือ $a_n=\frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$

จะได้
$$a_2=\left(\frac{2}{3}\right)^{2-3}=\frac{3}{2}$$
$$a_4=\left(\frac{2}{3}\right)^{4-3}=\frac{2}{3}$$
$$a_5=\left(\frac{2}{3}\right)^{5-3}=\frac{4}{9}$$
$$a_7=\left(\frac{2}{3}\right)^{7-3}=\frac{16}{81}$$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ $\frac{9}{4},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{4}{9}$ และ $\frac{16}{81}$ ตามลำดับ

11. 1) ให้ a เป็นพจน์ที่อยู่ระหว่าง 5 และ 20

จะได้ $5, a, 20$ เป็นสามพจน์ที่เรียงติดกันในลำดับเรขาคณิต

จาก $r=\frac{a_{n+1}}{a_n}$

จะได้
$$\frac{a}{5}=\frac{20}{a}$$
$$a^2=100$$

นั่นคือ $a=10$ หรือ $a=-10$

ดังนั้น พจน์ที่อยู่ระหว่าง 5 และ 20 ในลำดับเรขาคณิตนี้ คือ 10 หรือ -10

2) ให้ a เป็นพจน์ที่อยู่ระหว่าง 8 และ 12

จะได้ $8, a, 12$ เป็นสามพจน์ที่เรียงติดกันในลำดับเรขาคณิต

จาก $r=\frac{a_{n+1}}{a_n}$

จะได้
$$\frac{a}{8}=\frac{12}{a}$$
$$a^2=96$$

นั่นคือ $a=4\sqrt{6}$ หรือ $a=-4\sqrt{6}$

ดังนั้น พจน์ที่อยู่ระหว่าง 8 และ 12 ในลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $4\sqrt{6}$ หรือ $-4\sqrt{6}$

12. จาก $r = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

จะได้
$$\begin{aligned} \frac{a+20}{a+3} &= \frac{a+105}{a+20} \\ (a+20)(a+20) &= (a+3)(a+105) \\ a^2+40a+400 &= a^2+108a+315 \\ 68a &= 85 \\ a &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

จะได้
$$a+3 = \frac{5}{4}+3 = \frac{17}{4}$$
$$a+20 = \frac{5}{4}+20 = \frac{85}{4}$$
และ
$$a+105 = \frac{5}{4}+105 = \frac{425}{4}$$

ดังนั้น สามพจน์แรกของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{17}{4}, \frac{85}{4}$ และ $\frac{425}{4}$

นั่นคือ $a_1 = \frac{17}{4}$ และ $r = 5$

จะได้ พจน์ทั่วไป คือ $a_n = a_1 r^{n-1} = \frac{17}{4}(5)^{n-1}$

ดังนั้น $a = \frac{5}{4}$ และ พจน์ทั่วไป คือ $\frac{17}{4}\left(5^{n-1}\right)$

13. ในการคำนวณจำนวนประชากรในแต่ละปี จะพิจารณาเมื่อสิ้นปีนั้น ๆ

จาก พ.ศ. 2550 ประชากรในอำเภอหนึ่งมี 60,000 คน และประชากรในอำเภอนี้เพิ่มขึ้นปีละ 2% จะได้ว่า

ใน พ.ศ. 2551 (ครบ 1 ปี) จะมีประชากร $60,000 + 60,000(0.02) = 60,000(1.02)$ คน

ใน พ.ศ. 2552 (ครบ 2 ปี) จะมีประชากร $60,000(1.02) + 60,000(1.02)(0.02) = 60,000(1.02)^2$ คน

ใน พ.ศ. 2553 (ครบ 3 ปี) จะมีประชากร $60,000(1.02)^2 + 60,000(1.02)^2(0.02) = 60,000(1.02)^3$ คน

ในทำนองเดียวกัน เมื่อครบ n ปี จะมีประชากร $60,000(1.02)^n$ คน

จะได้ จำนวนประชากรเมื่อครบ 1, 2, 3, …, n, … ปี คือ

$$60000(1.02), 60000(1.02)^2, 60000(1.02)^3, \ldots, 60000(1.02)^n, \ldots$$

ซึ่งเป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = 60,000(1.02)$ และ $r = 1.02$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $a_n = (60,000(1.02))(1.02)^{n-1} = 60,000(1.02)^n$

ดังนั้น สูตรการคำนวณจำนวนประชากรในแต่ละปี คือ $60,000(1.02)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ใช้แทนจำนวนปีที่คำนวณจำนวนประชากรหลังจาก พ.ศ. 2550

เนื่องจาก พ.ศ. 2565 คือปีที่ 15 หลังจาก พ.ศ 2550

จะได้ จำนวนประชากรในพ.ศ. 2565 เท่ากับ $60,000(1.02)^{15} \approx 80,752$ คน

ดังนั้น สูตรการคำนวณจำนวนประชากรในแต่ละปี คือ $60,000(1.02)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ใช้แทนจำนวนปีที่คำนวณจำนวนประชากรหลังจาก พ.ศ. 2550 และจำนวนประชากรใน พ.ศ. 2565 ประมาณ 80,752 คน

หมายเหตุ

การหาคำตอบในข้อนี้ อาจพิจารณาลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเท่ากับ 60,000 และอัตราส่วนร่วมเท่ากับ 1.02 ซึ่งจำนวนประชากรใน พ.ศ. 2565 จะเป็นพจน์ที่ 16 ของลำดับนี้

14. ในที่นี้ ความสูงของลูกบอล คือ ระยะที่ลูกบอลอยู่สูงที่สุดเมื่อวัดจากระดับพื้นดิน

จาก ความสูงของลูกบอลเมื่อเริ่มปล่อยลูกบอลเท่ากับ 2 เมตร และเมื่อลูกบอลกระทบพื้น ความสูงของลูกบอลที่กระดอนขึ้นจะลดลง 8% ของความสูงของลูกบอลก่อนหน้า จะได้ว่า

ความสูงของลูกบอลเมื่อกระทบพื้นครั้งที่ 1 เท่ากับ $2-2(0.08)=2(0.92)$ เมตร

ความสูงของลูกบอลเมื่อกระทบพื้นครั้งที่ 2 เท่ากับ $2(0.92)-(2(0.92))(0.08)=2(0.92)^2$ เมตร

ความสูงของลูกบอลเมื่อกระทบพื้นครั้งที่ 3 เท่ากับ $2(0.92)^2-\left(2(0.92)^2\right)(0.08)=2(0.92)^3$ เมตร

ในทำนองเดียวกัน เมื่อลูกบอลกระทบพื้นครั้งที่ n ความสูงของลูกบอลจะเท่ากับ $2(0.92)^n$ เมตร

จะได้ ความสูงของลูกบอลเมื่อกระทบพื้นครั้งที่ $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ คือ

$$2(0.92), 2(0.92)^2, 2(0.92)^3, \ldots, 2(0.92)^n, \ldots$$

ซึ่งเป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = 2(0.92), r = 0.92$ และพจน์ทั่วไป คือ $2(0.92)^n$

ให้ f เป็นฟังก์ชันแสดงความสูงของลูกบอลเมื่อลูกบอลกระทบพื้นครั้งที่ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

จะได้ $f(n) = 2(0.92)^n$

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงความสูงของลูกบอลเมื่อลูกบอลกระทบพื้นครั้งที่ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก คือ $f(n) = 2(0.92)^n$

แบบฝึกหัด 1.1.4

1. กำหนด $b_n = \frac{1}{a_n}$ จะได้ว่า b_n เป็นลำดับเลขคณิต

จาก $b_3 = \frac{1}{a_3} = \frac{1}{3}$ และ $b_6 = \frac{1}{a_6} = \frac{1}{6}$

จะได้ $\frac{1}{3} = b_1 + 2d$ ----- (1)

และ $\frac{1}{6} = b_1 + 5d$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = -\frac{1}{18}$ และ $b_1 = \frac{4}{9}$

จาก $b_4 = b_1 + (4-1)d = \frac{4}{9} + 3\left(-\frac{1}{18}\right) = \frac{5}{18}$ จะได้ $a_4 = \frac{1}{b_4} = \frac{18}{5}$

และจาก $b_5 = b_1 + (5-1)d = \frac{4}{9} + 4\left(-\frac{1}{18}\right) = \frac{2}{9}$ จะได้ $a_5 = \frac{1}{b_5} = \frac{9}{2}$

ดังนั้น $a_4 + a_5 = \frac{18}{5} + \frac{9}{2} = \frac{81}{10}$

2. ให้ $a_n = \log_{2^n} 3$

จะสามารถเขียน a_n ได้เป็น $a_n = \frac{\log 3}{\log 2^n} = \frac{\log 3}{n \log 2}$

กำหนด $b_n = \frac{1}{a_n}$ จะได้ $b_n = \frac{n \log 2}{\log 3}$

สังเกตว่า $b_{n+1} - b_n = \frac{(n+1)\log 2}{\log 3} - \frac{n \log 2}{\log 3} = \frac{\log 2}{\log 3}$

ดังนั้น ลำดับ b_n เป็นลำดับเลขคณิต นั่นคือ ลำดับ a_n เป็นลำดับฮาร์มอนิก

ดังนั้น $\log_2 3, \log_4 3, \log_8 3, \ldots, \log_{2^n} 3, \ldots$ เป็นลำดับฮาร์มอนิก

3. ให้ $b_n = \frac{1}{a_n}$ จะได้ว่า ลำดับ b_n เป็นลำดับเลขคณิต โดยที่ $a_n \neq 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

เนื่องจาก $a_1 = 1$ และ $a_2 + a_3 = 1$

จะได้ $b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{1} = 1$

$b_2 = \frac{1}{a_2}$ โดยที่ $a_2 \neq 0$

และ $b_3 = \frac{1}{a_3} = \frac{1}{1-a_2}$ โดยที่ $1-a_2 \neq 0$ หรือ $a_2 \neq 1$

เนื่องจาก ลำดับ b_n เป็นลำดับเลขคณิต จะได้ว่า

$$b_2 - b_1 = b_3 - b_2$$

นั่นคือ

$$\frac{1}{a_2} - 1 = \frac{1}{1-a_2} - \frac{1}{a_2}$$

$$\frac{1-a_2}{a_2} = \frac{a_2 - (1-a_2)}{a_2(1-a_2)}$$

$$(1-a_2)^2 = 2a_2 - 1$$

$$1 - 2a_2 + a_2^{\,2} = 2a_2 - 1$$

$$a_2^{\,2} - 4a_2 + 2 = 0$$

จะได้ $a_2 = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = 2 \pm \sqrt{2}$

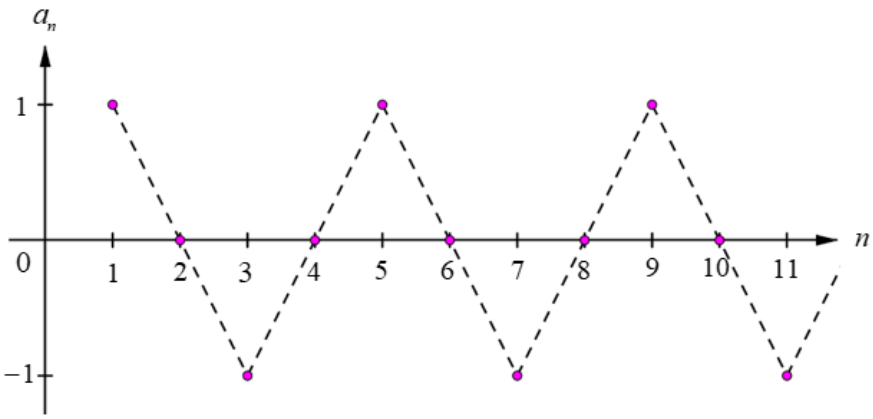
ดังนั้น ค่าที่เป็นไปได้ของ a_2 คือ $2+\sqrt{2}$ และ $2-\sqrt{2}$

แบบฝึกหัด 1.2

1. 1) จาก $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$

เขียนลำดับได้เป็น $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots, \sin\frac{n\pi}{2}, \ldots$

เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า เมื่อ n เป็น $1, 5, 9, \ldots$ พจน์ที่ n เป็น 1

เมื่อ n เป็น $2, 4, 6, \ldots$ พจน์ที่ n เป็น 0

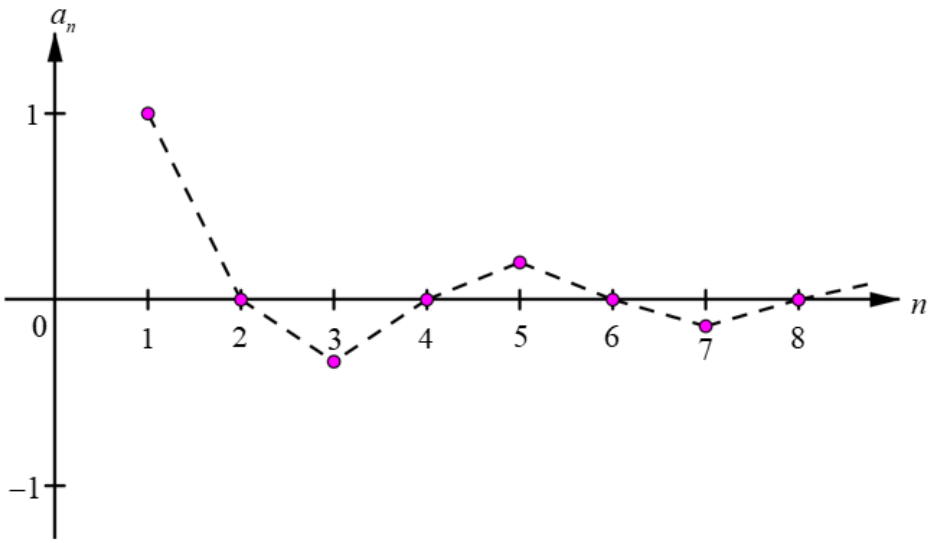
เมื่อ n เป็น $3, 7, 11, \ldots$ พจน์ที่ n เป็น -1

นั่นคือ เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด a_n ไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่ออก

2) จาก $a_n = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$

เขียนลำดับได้เป็น $1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, -\frac{1}{7}, 0\ldots, \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}, \ldots$

เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า แนวของจุดในกราฟจะเข้าใกล้ 0

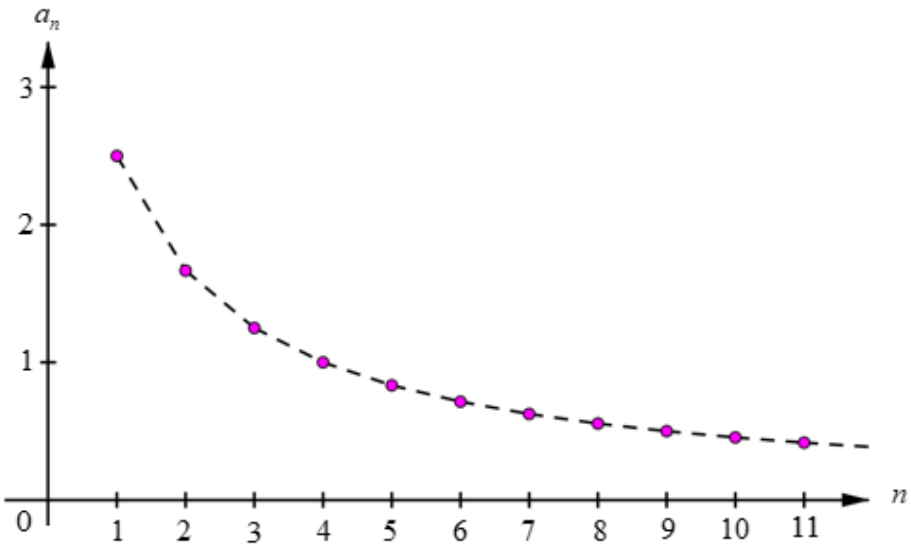
ซึ่งหมายความว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด a_n จะเข้าใกล้ 0 แต่ไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับเท่ากับ 0

3) จาก $a_n = \dfrac{5}{n+1}$

เขียนลำดับได้เป็น $\frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{5}, \frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \frac{5}{10}, \frac{5}{11}, \frac{5}{12}, \ldots, \frac{5}{n+1}, \ldots$

เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า แนวของจุดในกราฟจะเข้าใกล้ 0

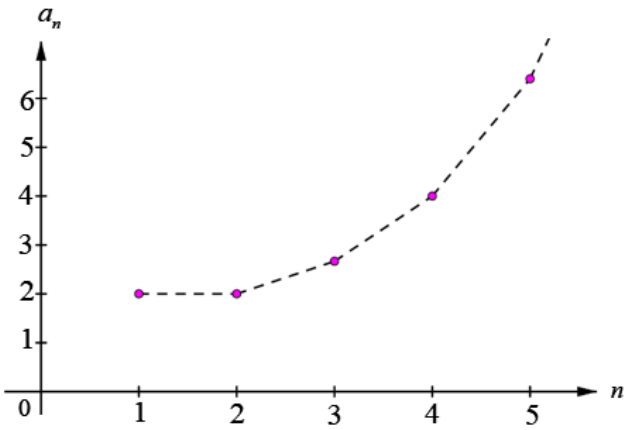
ซึ่งหมายความว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด a_n จะเข้าใกล้ 0 แต่ไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับเท่ากับ 0

4) จาก $a_n = \dfrac{2^n}{n}$

เขียนลำดับได้เป็น $2, 2, \dfrac{8}{3}, 4, \dfrac{32}{5}, \ldots, \dfrac{2^n}{n}, \ldots$

เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



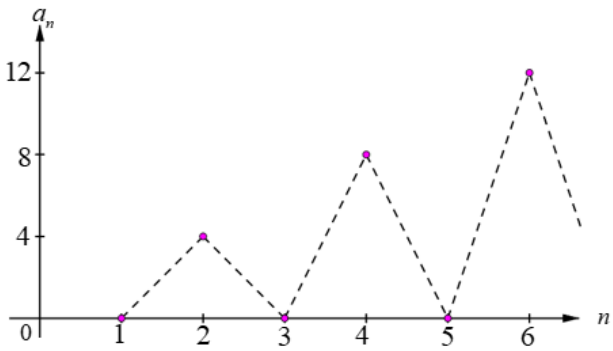
จากกราฟ จะเห็นว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด a_n มีค่าเพิ่มขึ้นและไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่ออก

5) จาก $a_n = n\left(1+(-1)^n\right)$

เขียนลำดับได้เป็น $0, 4, 0, 8, 0, 12, \ldots, n\left(1+(-1)^n\right), \ldots$

เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า เมื่อ n เป็น $1, 3, 5, \ldots$ พจน์ที่ n เป็น 0

เมื่อ n เป็น $2, 4, 6, \ldots$ พจน์ที่ n เป็น $2n$

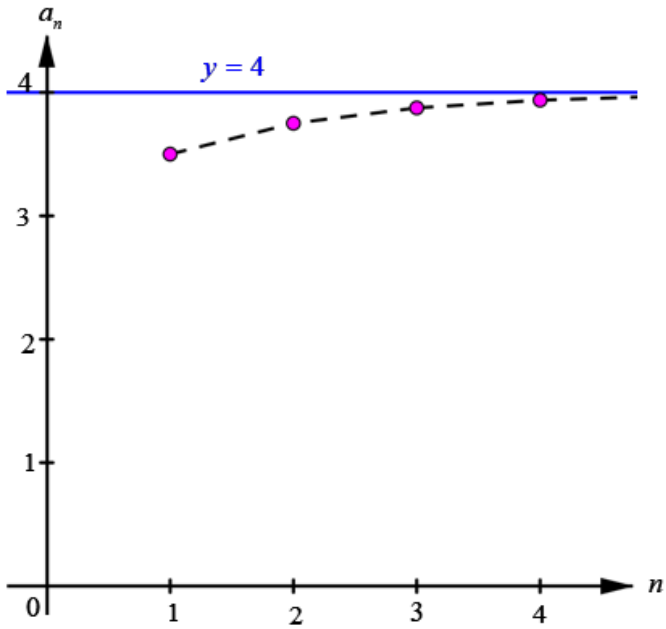
นั่นคือ เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด a_n ไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่ออก

6) จาก $a_n = 4 - \frac{1}{2^n}$

เขียนลำดับได้เป็น $\frac{7}{2}, \frac{15}{4}, \frac{31}{8}, \frac{63}{16}, \ldots, 4 - \frac{1}{2^n}, \ldots$

เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า แนวของจุดในกราฟจะเข้าใกล้ 4

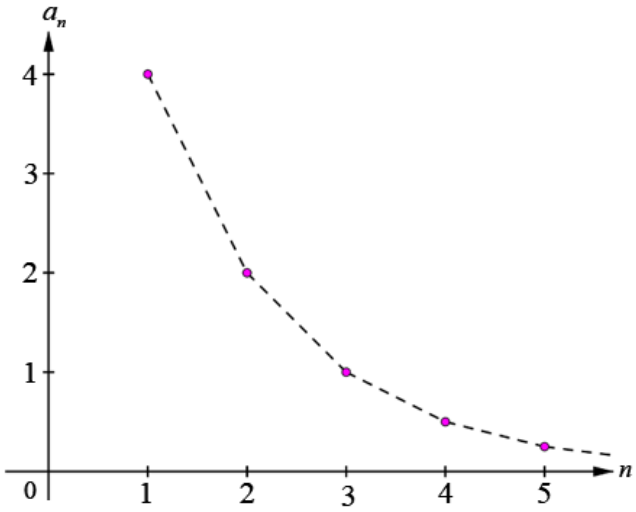
ซึ่งหมายความว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด a_n จะเข้าใกล้ 4 แต่ไม่เท่ากับ 4

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับเท่ากับ 4

7) จาก $a_n = 4(0.5)^{n-1}$

เขียนลำดับได้เป็น $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, 4(0.5)^{n-1}, \ldots$

เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า แนวของจุดในกราฟจะเข้าใกล้ 0

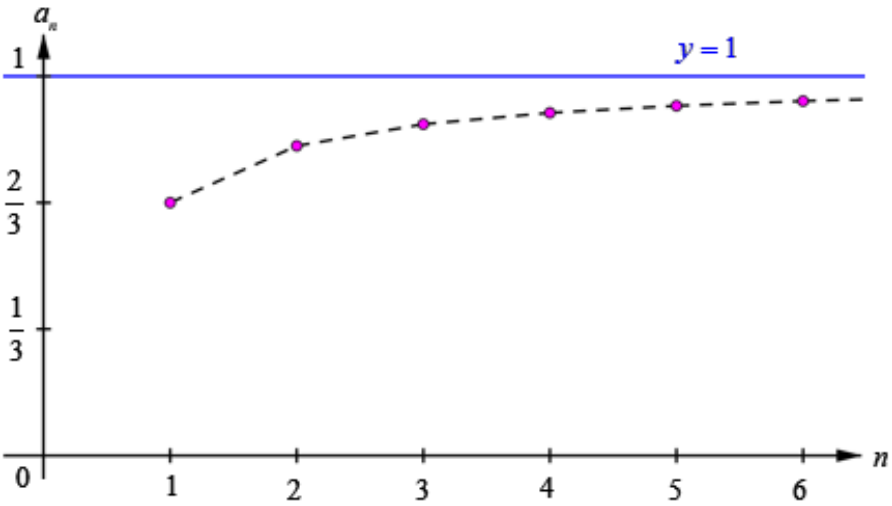
ซึ่งหมายความว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด a_n จะเข้าใกล้ 0 แต่ไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับเท่ากับ 0

8) จาก $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}}$

เขียนลำดับได้เป็น $\frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}}, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}, \ldots, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}}, \ldots$

เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า แนวของจุดในกราฟจะเข้าใกล้ 1

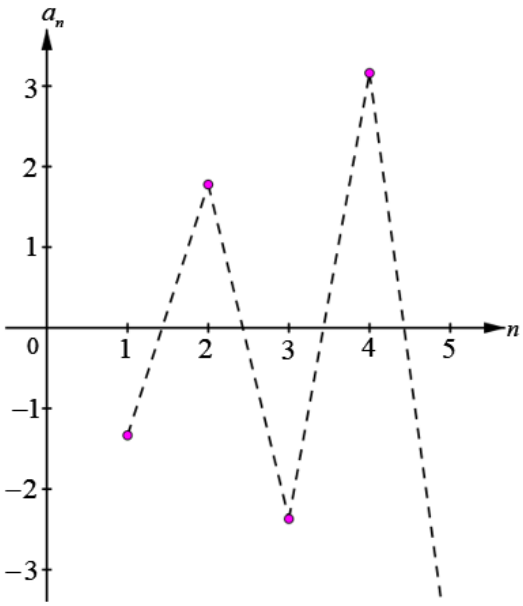
ซึ่งหมายความว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด a_n จะเข้าใกล้ 1 แต่ไม่เท่ากับ 1

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับเท่ากับ 1

9) จาก $a_n = \left(-\frac{4}{3}\right)^n$

เขียนลำดับได้เป็น $-\frac{4}{3}, \left(\frac{4}{3}\right)^2, -\left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{4}{3}\right)^4, \ldots, \left(-\frac{4}{3}\right)^n, \ldots$

เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้

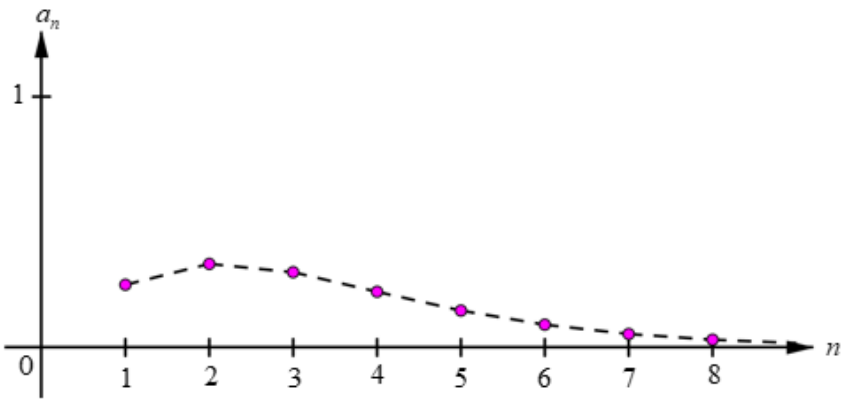


จากกราฟ จะเห็นว่า แนวของจุดในกราฟมีลักษณะขึ้นและลงสลับกัน โดยไม่เข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่ง ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่ออก

10) จาก $a_n = \dfrac{n}{2^n + 2}$

เขียนลำดับได้เป็น $\dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{6}, \dfrac{3}{10}, \dfrac{4}{18}, \dfrac{5}{34}, \dfrac{6}{66}, \dfrac{7}{130}, \dfrac{8}{258}, \ldots, \dfrac{n}{2^n+2}, \ldots$

เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า แนวของจุดในกราฟจะเข้าใกล้ 0

ซึ่งหมายความว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด a_n จะเข้าใกล้ 0 แต่ไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับเท่ากับ 0

2. 1) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8}{3n} = \dfrac{8}{3}\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{8}{3}(0) = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8}{3n} = 0$

นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ 0

2) เนื่องจาก $\left|\dfrac{7}{8}\right| < 1$

พิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7^n}{8^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{7}{8}\right)^n = 0$

จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า ลำดับนี้เป็นลำดับลู่ออก

3) เนื่องจาก $a_n = \dfrac{4^{1-n}}{2^{8-2n}} = \dfrac{2^{2-2n}}{2^{8-2n}} = \dfrac{1}{2^6}$

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^{1-n}}{2^{8-2n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2^6}\right)$

$= \dfrac{1}{2^6}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^{1-n}}{2^{8-2n}} = \dfrac{1}{2^6}$

นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ $\dfrac{1}{2^6}$

4) เนื่องจาก $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 3\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 3\times 0 = 0$

นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ 0

5) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 4 + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}$

$= 4+0$

$= 4$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\dfrac{1}{n}\right) = 4$

นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ 4

6) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-4}{6n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(6-\dfrac{4}{n}\right)}{6n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6-\dfrac{4}{n}}{6}$

$= \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(6-\dfrac{4}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} 6}$

$= \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 6 - \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 6}$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 6 - 4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 6}$$

$$= \frac{6-4(0)}{6}$$

$$= 1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n-4}{6n} = 1$

นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ 1

7) พิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{3n+5}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\frac{6}{n}\right)}{n\left(3+\frac{5}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{n}}{3+\frac{5}{n}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}$$

$$= \frac{6\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{6(0)}{3+5(0)}$$

$$= 0$$

จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า ลำดับ a_n เป็นลำดับลู่ออก

8) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{1+0}$$

$$= 1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$

นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ 1

9) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+5n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{5}{n}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}$$

$$= 0+0$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+5n}{n^2}=0$

นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ 0

10) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{2-0}{3+0}$$

$$= \frac{2}{3}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+1} = \dfrac{2}{3}$

นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ $\dfrac{2}{3}$

11) พิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n-1}{3n^2-5n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{7}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\frac{5}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n}-\frac{1}{n^2}}{3-\frac{5}{n}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{5}{n}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}$$

$$= \frac{0-0}{3-0}$$

$$= 0$$

จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า ลำดับ a_n เป็นลำดับลู่ออก

12) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^2}{5n^2-3} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^2}{n^2\left(5-\frac{3}{n^2}\right)}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{7}{5-\frac{3}{n^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}7}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}7}{\lim\limits_{n\to\infty}5-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}$$

$$= \frac{7}{5-0}$$

$$= \frac{7}{5}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^2}{5n^2-3}=\frac{7}{5}$

นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ $\frac{7}{5}$

13) เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n+3}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\left(4-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}4-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}\\ &= 4-0+0\\ &= 4\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n+3}{n^2}=4$

นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ 4

14) เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-1}{10n-5n^2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{10}{n}-5\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n^2}}{\frac{10}{n}-5}\\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{10}{n}-5\right)}\\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}3-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}-\lim_{n\to\infty}5}\\ &= \frac{3-0}{0-5}\\ &= -\frac{3}{5}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-1}{10n-5n^2}=-\frac{3}{5}$

นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ $-\frac{3}{5}$

15) พิจารณา $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} = \frac{n^2\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{0}{1+0}$$

$$= 0$$

นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ 0

16) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{5^{n+2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3^n}{5^2\cdot 5^n}$

$$= \frac{3}{25}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

และ $\left|\frac{3}{5}\right|<1$ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=0$

ดังนั้น $\frac{3}{25}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=\frac{3}{25}\times 0=0$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{5^{n+2}}=0$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ 0

17) เนื่องจาก $\dfrac{2^{n-1}+3}{3^{n+2}} = \dfrac{2^{n-1}}{3^{n+2}}+\dfrac{3}{3^{n+2}} = \dfrac{1}{18}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n-1}+3}{3^{n+2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{18}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{18}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \frac{1}{18}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

เนื่องจาก $\left|\dfrac{2}{3}\right|<1$ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$

ดังนั้น $\dfrac{1}{18}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=\dfrac{1}{18}\times 0=0$

เนื่องจาก $\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$

ดังนั้น $\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\dfrac{1}{3}\times 0=0$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n-1}+3}{3^{n+2}}=0+0=0$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ 0

18) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= \frac{1-0}{1+0}$$

$$= 1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} = 1$

นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ 1

19) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{4n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}}{4n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{4n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}}{\lim\limits_{n\to\infty} 4}$$

$$= \frac{\sqrt{1-0}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{4n} = \frac{1}{4}$

นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ $\frac{1}{4}$

20) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2-1}}{2n+\sqrt[3]{n^3+2}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2\left(4-\frac{1}{n^2}\right)}}{2n+\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{2}{n^3}\right)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}{2n+n\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^3}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}{n\left(2+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^3}}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}{2+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} 4-\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2+\sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{4-0}}{2+\sqrt[3]{1+0}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2-1}}{2n+\sqrt[3]{n^3+2}} = \dfrac{2}{3}$

นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ $\dfrac{2}{3}$

21) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{3n+2}}{3^{2n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\left(8^n\right)}{\frac{1}{3}\left(9^n\right)}$

$$= 12\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n$$

และ $\left|\dfrac{8}{9}\right|<1$ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{8}{9}\right)^n=0$

ดังนั้น $12\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{8}{9}\right)^n=12\times 0=0$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{3n+2}}{3^{2n-1}}=0$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ 0

22) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+2n}{8n^2+5n+2}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(8+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n}}{8+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}8+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}$$

$$= \frac{0+0}{8+0+0}$$

$$= 0$$

จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า ลำดับ a_n เป็นลำดับลู่ออก

23) จาก $r>0$ จะได้ $\dfrac{r}{12}>0$ และ $1+\dfrac{r}{12}>1$

จาก $\left|\dfrac{1}{1+\frac{r}{12}}\right|<1$ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+\frac{r}{12}}\right)^n=0$

พิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{r}{12}}\right)^n=0$

จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า ลำดับ a_n เป็นลำดับลู่ออก

24) พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5}{n+2}+\frac{1-n^3}{n^2+3n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2-5\right)\left(n^2+3n\right)+\left(1-n^3\right)\left(n+2\right)}{\left(n+2\right)\left(n^2+3n\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^4+3n^3-5n^2-15n\right)+\left(n+2-n^4-2n^3\right)}{n^3+5n^2+6n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3-5n^2-14n+2}{n^3+5n^2+6n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1-\frac{5}{n}-\frac{14}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}\right)} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{14}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n^2}} \\
&= \frac{1-0-0+0}{1+0+0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ 1

3. 1) เป็นเท็จ

ให้ $a_n=n$ และ $b_n=-n$

จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}n$ ซึ่งไม่มีค่า และ $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-n)$ ซึ่งไม่มีค่า

ดังนั้น ลำดับ a_n และ ลำดับ b_n เป็นลำดับลู่ออก

พิจารณา $a_n+b_n=n+(-n)=0$

จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}0 = 0$

ดังนั้น ลำดับ a_n+b_n เป็นลำดับลู่เข้า

2) เป็นเท็จ

ให้ $a_n = 0$ และ $b_n = n$

จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} n$ ซึ่งไม่มีค่า

ดังนั้น a_n เป็นลำดับลู่เข้า และ b_n เป็นลำดับลู่ออก

พิจารณา $a_n + b_n = 0 + n = n$

จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n + b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

ดังนั้น $a_n + b_n$ เป็นลำดับลู่ออก

4. 1) บริษัทแห่งนี้มีงบรายจ่ายปีแรก 2.5 พันล้านบาท และวางแผนจะปรับลดงบรายจ่ายลง 20% ของปีก่อนหน้า จะได้ว่า

งบรายจ่ายในปีที่ 1 หลังจากปรับลดงบ เท่ากับ $2.5(0.8)$ พันล้านบาท

งบรายจ่ายในปีที่ 2 หลังจากปรับลดงบ เท่ากับ $(2.5(0.8))(0.8) = 2.5(0.8)^2$ พันล้านบาท

งบรายจ่ายในปีที่ 3 หลังจากปรับลดงบ เท่ากับ $\left(2.5(0.8)^2\right)(0.8) = 2.5(0.8)^3$ พันล้านบาท

งบรายจ่ายในปีที่ 4 หลังจากปรับลดงบ เท่ากับ $\left(2.5(0.8)^3\right)(0.8) = 2.5(0.8)^4$ พันล้านบาท

ดังนั้น งบรายจ่ายในปีที่สี่หลังจากปรับลดงบ เท่ากับ $2.5(0.8)^4 = 1.024$ พันล้านบาท

2) จากข้อ 1) จะได้ว่า n ปีหลังจากปรับลดงบ งบรายจ่ายเท่ากับ $2.5(0.8)^n$ พันล้านบาท

ดังนั้น งบรายจ่ายในปีที่ n หลังจากปรับลดงบ เท่ากับ $2.5(0.8)^n$ พันล้านบาท

3) จากข้อ 1) และ 2) จะได้ งบรายจ่ายในปีที่ $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ หลังจากปรับลดงบ คือ $2.5(0.8), 2.5(0.8)^2, 2.5(0.8)^3, \ldots, 2.5(0.8)^n, \ldots$ ซึ่งเป็นลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น $2.5(0.8)$ และอัตราส่วนร่วมเป็น 0.8

พิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2.5(0.8)^n\right) = 2.5\lim\limits_{n\to\infty}(0.8)^n$

เนื่องจาก $|0.8| < 1$ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}(0.8)^n = 0$

ดังนั้น $2.5\lim\limits_{n\to\infty}(0.8)^n = 2.5\times 0 = 0$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2.5(0.8)^n\right) = 0$

ดังนั้น ลำดับของงบของรายจ่ายนี้เป็นลำดับลู่เข้า

แบบฝึกหัด 1.3.1

1. 1) จาก $S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$

จะได้ $S_4 = \frac{4}{2}\left(2(3) + (4-1)(2)\right) = 24$

ดังนั้น ผลบวก 4 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 24

2) จาก $S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$

จะได้ $S_{11} = \frac{11}{2}\left(2(-7) + (11-1)(3)\right) = 88$

ดังนั้น ผลบวก 11 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 88

3) จาก $S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$

จะได้ $S_{14} = \frac{14}{2}\left(2(-5) + (14-1)(-2)\right) = -252$

ดังนั้น ผลบวก 14 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ -252

4) จาก $S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$

จะได้ $S_7 = \frac{7}{2}\left(5 + 29\right) = 119$

ดังนั้น ผลบวก 7 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 119

5) จาก $S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$

จะได้ $S_9 = \frac{9}{2}\left(-3 + 37\right) = 153$

ดังนั้น ผลบวก 9 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 153

2. 1) อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = 5$ และ $d = 2$

จาก $S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$

จะได้ $S_{50} = \frac{50}{2}\left(2(5) + (50-1)(2)\right) = 2{,}700$

ดังนั้น ผลบวก 50 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 2,700

2) อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = 0$ และ $d = 2$

จาก $S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$

จะได้ $S_{30} = \frac{30}{2}\left(2(0) + (30-1)(2)\right) = 870$

ดังนั้น ผลบวก 30 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 870

3) อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = -2$ และ $d = 5$

จาก $S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$

จะได้ $S_{60} = \frac{60}{2}\left(2(-2) + (60-1)(5)\right) = 8{,}730$

ดังนั้น ผลบวก 60 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 8,730

4) อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = 5$ และ $d = -3$

จาก $S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$

จะได้ $S_{75} = \frac{75}{2}\left(2(5) + (75-1)(-3)\right) = -7{,}950$

ดังนั้น ผลบวก 75 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ $-7{,}950$

5) อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = \frac{1}{2}$ และ $d = \frac{1}{2}$

จาก $S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$

จะได้ $S_{50} = \frac{50}{2}\left(2\left(\frac{1}{2}\right) + (50-1)\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1{,}275}{2}$

ดังนั้น ผลบวก 50 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ $\frac{1{,}275}{2}$

3. 1) จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = 6,\ d = 3$ และ $a_n = 99$

จะได้ $99 = 6 + (n-1)(3)$

$99 = 6 + 3n - 3$

$n = 32$

จาก $S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$

จะได้ $S_{32} = \frac{32}{2}(6+99) = 1,680$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 1,680

2) จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = -7,\ d = -3$ และ $a_n = -109$

จะได้ $-109 = -7 + (n-1)(-3)$

$-109 = -7 - 3n + 3$

$n = 35$

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

จะได้ $S_{35} = \frac{35}{2}(-7 + (-109)) = -2,030$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ $-2,030$

3) จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = -7,\ d = 3$ และ $a_n = 131$

จะได้ $131 = -7 + (n-1)(3)$

$131 = -7 + 3n - 3$

$n = 47$

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

จะได้ $S_{47} = \frac{47}{2}(-7 + 131) = 2,914$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 2,914

4. ให้ $a_{10} = 20$ และ $a_5 = 10$

จะได้ $20 = a_1 + (10-1)d$

นั่นคือ $20 = a_1 + 9d$ ----- (1)

และ $10 = a_1 + (5-1)d$

นั่นคือ $10 = a_1 + 4d$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = 2$ และ $a_1 = 2$

พิจารณาผลบวกของพจน์ที่ 8 ถึงพจน์ที่ 15 คือ

$$a_8 + a_9 + a_{10} + \cdots + a_{15} = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{15}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7) = S_{15} - S_7$$

จาก $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

จะได้ $S_7 = \frac{7}{2}(2(2) + (7-1)(2)) = 56$

และ $S_{15} = \frac{15}{2}(2(2) + (15-1)(2)) = 240$

นั่นคือ $S_{15} - S_7 = 240 - 56 = 184$

ดังนั้น ผลบวกของพจน์ที่ 8 ถึงพจน์ที่ 15 ของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 184

5. จากที่กำหนดให้ จะได้ว่า

ทับทิมออมเงินวันแรก 1 บาท

ออมเงินในวันที่สอง 1 + 1 = 2 บาท

ออมเงินในวันที่สาม 2 + 1 = 3 บาท

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า ทับทิมออมเงินในวันที่ n เท่ากับ n บาท

จะได้ เงินที่ทับทิมออมในวันที่ 1, 2, 3, …, n คือ 1, 2, 3, …, n บาท ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 1 และผลต่างร่วมเป็น 1

ให้ S_n แทนจำนวนเงินออมทั้งหมดของทับทิม เมื่อออมครบ n วัน

ดังนั้น จำนวนเงินออมทั้งหมดของทับทิม เมื่อออมครบ 30 วัน คือ S_{30}

จาก $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

จะได้ $S_{30} = \frac{30}{2}(2(1) + (30-1)(1)) = 465$

ดังนั้น ถ้าทับทิมออมเงินจนครบ 30 วัน ทับทิมจะมีเงินออมทั้งหมด 465 บาท

6. ให้ $a_1 = 6,\ d = 4$ และ $a_n = 26$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $26 = 6 + (n-1)(4)$

$26 = 6 + 4n - 4$

$n = 6$

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

จะได้ $S_6 = \frac{6}{2}(6+26) = 96$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 96

7. ลำดับของจำนวนคี่บวก คือ $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, \ldots$ ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 1 และผลต่างร่วมเป็น 2

ให้ S_n แทนผลบวกของจำนวนคี่บวก n จำนวนแรก

พิจารณาผลบวกของจำนวนคี่บวก 100 จำนวนแรก ซึ่งคือ S_{100}

จาก $S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$

จะได้ $S_{100} = \frac{100}{2}\left(2(1) + (100-1)(2)\right) = 10{,}000$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนคี่บวก 100 จำนวนแรก คือ 10,000

8. ลำดับของจำนวนเต็มบวกที่เป็นพหุคูณของ 3 คือ $3, 6, 9, 12, \ldots, 2n+1, \ldots$ ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 3 และผลต่างร่วมเป็น 3

ให้ S_n แทนผลบวกของจำนวนเต็มบวก n จำนวนแรกที่เป็นพหุคูณของ 3

พิจารณาผลบวกของจำนวนเต็มบวกยี่สิบจำนวนแรกที่เป็นพหุคูณของ 3 ซึ่งคือ S_{20}

จาก $S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$

จะได้ $S_{20} = \frac{20}{2}\left(2(3) + (20-1)(3)\right) = 630$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนเต็มบวกยี่สิบจำนวนแรกที่เป็นพหุคูณของ 3 คือ 630

9. ลำดับของจำนวนคี่ตั้งแต่ 17 ถึง 379 คือ 17, 19, 21, …, 379 เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 17 พจน์สุดท้ายเป็น 379 และผลต่างร่วมเป็น 2

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $379 = 17 + (n-1)(2)$

$379 = 17 + 2n - 2$

$n = 182$

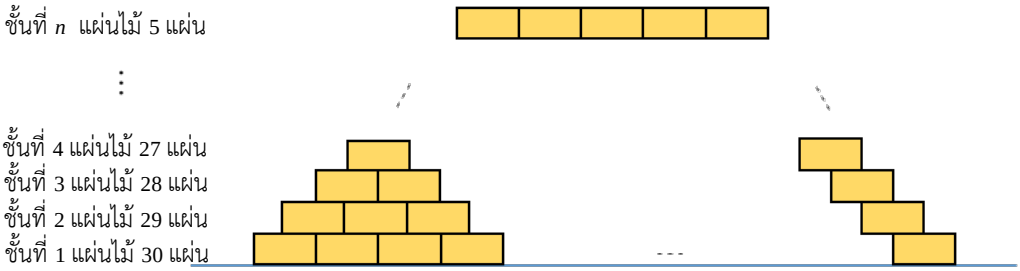
ดังนั้น ผลบวกของจำนวนคี่ตั้งแต่ 17 ถึง 379 คือ ผลบวกของ 182 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตที่ได้จากลำดับเลขคณิตนี้ ซึ่งคือ S_{182}

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

จะได้ $S_{182} = \frac{182}{2}(17 + 379) = 36{,}036$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนคี่ตั้งแต่ 17 ถึง 379 คือ 36,036

10. การจัดแผ่นไม้ตามเงื่อนไขที่กำหนดเป็นดังรูป



จากการจัดวางแผ่นไม้ในชั้นที่ 2 โดยให้แนวกึ่งกลางของแผ่นไม้แต่ละแผ่นอยู่ตรงกับรอยต่อของแผ่นไม้แต่ละคู่ในชั้นที่ 1 จะได้ว่า ชั้นที่ 2 มีแผ่นไม้ที่วางจำนวนทั้งหมด $30 - 1 = 29$ แผ่น

จากการจัดวางแผ่นไม้ในชั้นที่ 3 โดยให้แนวกึ่งกลางของแผ่นไม้แต่ละแผ่นอยู่ตรงกับรอยต่อของแผ่นไม้แต่ละคู่ในชั้นที่ 2 จะได้ว่า ชั้นที่ 3 มีแผ่นไม้ที่วางจำนวนทั้งหมด $29 - 1 = 28$ แผ่น

ให้ n เป็นชั้นที่มีแผ่นไม้ที่วางจำนวนทั้งหมด 5 แผ่น

จะได้ว่า จำนวนแผ่นไม้ที่วางในชั้นที่ $1, 2, 3, \ldots, n$ คือ $30, 29, 28, \ldots, 5$ ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 30 พจน์ที่ n เป็น 5 และผลต่างร่วมเป็น -1

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $5 = 30 + (n-1)(-1)$

$5 = 30 - n + 1$

$n = 26$

ดังนั้น จำนวนแผ่นไม้ตั้งแต่ชั้นที่ 1 จนถึงชั้นที่มีแผ่นไม้ 5 แผ่น คือ ผลบวกของ 26 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตที่ได้จากลำดับเลขคณิตนี้ ซึ่งคือ S_{26}

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

จะได้ $S_{26} = \frac{26}{2}(30 + 5) = 455$

ดังนั้น แผ่นไม้กองไม้นี้มี 26 ชั้น และมีแผ่นไม้ทั้งหมด 455 แผ่น

แบบฝึกหัด 1.3.2

1. 1) จาก $S_n = \dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ $S_4 = \dfrac{3\left(1-2^4\right)}{1-2} = 45$

ดังนั้น ผลบวก 4 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ 45

2) จาก $S_n = \dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ $S_7 = \dfrac{5\left(1-4^7\right)}{1-4} = 27,305$

ดังนั้น ผลบวก 7 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ 27,305

3) จาก $S_n = \dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ $S_9 = \dfrac{(-3)\left(1-5^9\right)}{1-5} = \dfrac{3}{4}\left(1-5^9\right)$

ดังนั้น ผลบวก 9 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ $\dfrac{3}{4}\left(1-5^9\right)$

4) จาก $S_n = \dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ $S_{11} = \dfrac{(-7)\left(1-3^{11}\right)}{1-3} = \dfrac{7}{2}\left(1-3^{11}\right)$

ดังนั้น ผลบวก 11 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ $\dfrac{7}{2}\left(1-3^{11}\right)$

5) จาก $S_n = \dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ $S_{14} = \dfrac{(-5)\left(1-(-2)^{14}\right)}{1-(-2)} = \dfrac{5}{3}\left(2^{14}-1\right)$

ดังนั้น ผลบวก 14 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ $\dfrac{5}{3}\left(2^{14}-1\right)$

2. 1) อนุกรมเรขาคณิตที่กำหนดให้มี $a_1 = 2$ และ $r = \frac{6}{2} = 3$

แทน n ด้วย 9 ใน $S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ $S_9 = \frac{2\left(1-3^9\right)}{1-3} = 3^9 - 1 = 19{,}682$

ดังนั้น ผลบวก 9 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ 19,682

2) อนุกรมเรขาคณิตที่กำหนดให้มี $a_1 = 9$ และ $r = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

แทน n ด้วย 8 ใน $S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ $S_8 = \frac{9\left(1-\left(\frac{4}{3}\right)^8\right)}{1-\frac{4}{3}} = \frac{9\left(1-\left(\frac{4}{3}\right)^8\right)}{-\frac{1}{3}} = -27\left(1-\left(\frac{4}{3}\right)^8\right)$

ดังนั้น ผลบวก 8 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ $-27\left(1-\left(\frac{4}{3}\right)^8\right)$

3) อนุกรมเรขาคณิตที่กำหนดให้มี $a_1 = \frac{2}{3}$ และ $r = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

แทน n ด้วย 10 ใน $S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ $S_{10} = \frac{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right)}{1-\frac{2}{3}} = 2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right)$

ดังนั้น ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ $2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right)$

3. 1) อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = 9,\ r = \frac{27}{9} = 3$ และ $a_n = 729$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $729 = 9\left(3^{n-1}\right)$

$81 = 3^{n-1}$

$3^4 = 3^{n-1}$

นั่นคือ $n-1 = 4$

$n = 5$

แทน n ด้วย 5 ใน $S_n = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r-1}$

จะได้ $S_5 = \frac{9\left(3^5 - 1\right)}{3-1} = \frac{9}{2}(243-1) = 1{,}089$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ 1,089

2) อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = 4,\ r = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ และ $a_n = \frac{1}{512}$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $\frac{1}{512} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\frac{1}{2^{11}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

นั่นคือ $n-1 = 11$

$n = 12$

แทน n ด้วย 12 ใน $S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ $S_{12} = \frac{4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 8\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right)$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ $8\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right)$

3) อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = 1,\ r = \frac{-2}{1} = -2$ และ $a_n = 256$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $256 = 1(-2)^{n-1}$

$(-2)^8 = (-2)^{n-1}$

นั่นคือ $n-1 = 8$

$n = 9$

แทน n ด้วย 9 ใน $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

จะได้ $S_9 = \frac{1(1-(-2)^9)}{1-(-2)} = \frac{1}{3}(1+512) = 171$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ 171

4. จากที่กำหนดให้ จะได้ว่า

มังกรออมเงินวันแรก 1 บาท

ออมเงินในวันที่สอง $2(1) = 2 = 2^1$ บาท

ออมเงินในวันที่สาม $2(2) = 4 = 2^2$ บาท

ออมเงินในวันที่สี่ $2(4) = 8 = 2^3$ บาท

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า มังกรออมเงินในวันที่ n เท่ากับ 2^{n-1} บาท

จะได้ เงินที่มังกรออมในวันที่ $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ คือ $1, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{n-1}, \ldots$ บาท ซึ่งเป็นลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 1 และอัตราส่วนร่วมเป็น 2

ให้ S_n แทนจำนวนเงินออมทั้งหมดของมังกร เมื่อออมครบ n วัน

ดังนั้น จำนวนเงินออมทั้งหมดของมังกร เมื่อออมครบ 15 วัน คือ S_{15}

จาก $S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

จะได้ $S_{15} = \frac{1(2^{15}-1)}{2-1} = 2^{15}-1 = 32{,}767$

ดังนั้น เมื่อครบ 15 วัน มังกรจะมีเงินออมทั้งหมด 32,767 บาท

5. จาก ยอดขายของบริษัทแห่งนี้ในไตรมาสแรกของปีที่ 1 คือ 300,000 บาท และผู้จัดการฝ่ายขายของบริษัทต้องการเพิ่มยอดขายขึ้นไตรมาสละ 3% ของยอดขายในไตรมาสก่อนหน้า จะได้ว่า

ไตรมาสแรกของปีที่ 1 ผู้จัดการฝ่ายขายทำยอดขายได้ 300,000 บาท

เมื่อผ่านไป 1 ไตรมาส (ไตรมาสสองของปีที่ 1) ผู้จัดการฝ่ายขายทำยอดขายได้ $300,000(1.03)$ บาท

เมื่อผ่านไป 2 ไตรมาส (ไตรมาสสามของปีที่ 1) ผู้จัดการฝ่ายขายทำยอดขายได้

$$(300,000(1.03))(1.03) = 300,000(1.03)^2 \text{ บาท}$$

เมื่อผ่านไป 3 ไตรมาส (ไตรมาสสี่ของปีที่ 1) ผู้จัดการฝ่ายขายทำยอดขายได้

$$\left(300,000(1.03)^2\right)(1.03) = 300,000(1.03)^3 \text{ บาท}$$

เมื่อผ่านไป 4 ไตรมาส (ไตรมาสหนึ่งของปีที่ 2) ผู้จัดการฝ่ายขายทำยอดขายได้

$$\left(300,000(1.03)^3\right)(1.03) = 300,000(1.03)^4 \text{ บาท}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อผ่านไป n ไตรมาส ผู้จัดการฝ่ายขายควรทำยอดขายได้ $300,000(1.03)^n$ บาท จะได้ว่า เมื่อผ่านไป 1, 2, 3, …, n, … ไตรมาส จากไตรมาสแรกของปีที่ 1 ผู้จัดการฝ่ายขายควรทำยอดขายได้ $300000(1.03), 300000(1.03)^2, 300000(1.03)^3, \ldots, 300000(1.03)^n, \ldots$ บาท ซึ่งเป็นลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น $300000(1.03)$ และอัตราส่วนร่วมเป็น 1.03

1) เนื่องจาก ไตรมาสแรกของปีที่ 3 คือ ไตรมาสที่ 8 นับจากไตรมาสแรกของปีที่ 1 จะได้ ยอดขาย ณ ไตรมาสแรกของปีที่ 3 คือ ยอดขายที่ผู้จัดการฝ่ายขายควรทำยอดได้ เมื่อผ่านไป 8 ไตรมาส ซึ่งเท่ากับ $300,000(1.03)^8 \approx 380,031.02$ บาท

ดังนั้น ผู้จัดการฝ่ายขายควรทำยอดขายไตรมาสแรกของปีที่ 3 ให้ได้ประมาณ 380,031.02 บาท

2) ให้ S_n แทนยอดขายรวมที่ผู้จัดการฝ่ายขายควรทำได้ เมื่อผ่านไป n ไตรมาส นับจากไตรมาสแรกของปีที่ 1

พิจารณา ยอดขายรวมที่ผู้จัดการฝ่ายขายควรทำได้ตั้งแต่ไตรมาสสองของปีที่ 1 ถึงไตรมาสสี่ของปีที่ 2 ซึ่งคือ ยอดขายรวมที่ผู้จัดการฝ่ายขายควรทำได้เมื่อผ่านไป 7 ไตรมาส นับจากไตรมาสแรก หรือ S_7

จาก $S_n = \dfrac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r-1}$

จะได้ $S_7 = \dfrac{300,000(1.03)\left((1.03)^7 - 1\right)}{1.03-1} \approx 2,367,700.81$

นั่นคือ เมื่อครบสองปี ผู้จัดการฝ่ายขายควรทำยอดขายรวมได้เท่ากับยอดขายที่ได้ในไตรมาสแรกของปีที่ 1 รวมกับยอดขายรวมที่ผู้จัดการฝ่ายขายควรทำได้ตั้งแต่ไตรมาสสองของปีที่ 1 ถึงไตรมาสสี่ของปีที่ 2 ซึ่งเท่ากับ $300,000 + S_7$ บาท

ดังนั้น เมื่อครบสองปี ผู้จัดการควรทำยอดขายทั้งหมดให้ได้ประมาณ

300,000 + 2,367,700.81 = 2,667,700.81 บาท

6. ถังใบหนึ่งมีน้ำอยู่ 5,832 ลิตร แต่ละวันจะใช้น้ำ $\frac{1}{3}$ ของปริมาณน้ำที่อยู่ในถัง

วันที่ 1 จะใช้น้ำไป $\frac{1}{3}(5,832)$ ลิตร และเหลือน้ำอยู่ในถัง $5,832 - \frac{1}{3}(5,832) = \frac{2}{3}(5,832)$ ลิตร

วันที่ 2 จะใช้น้ำไป $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}(5,832)\right)$ ลิตร และเหลือน้ำอยู่ในถัง

$$\frac{2}{3}(5,832) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}(5,832)\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2(5,832) \text{ ลิตร}$$

วันที่ 3 จะใช้น้ำไป $\left(\frac{2}{3}\right)^2(5,832)$ ลิตร และเหลือน้ำอยู่ในถัง

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2(5,832) - \frac{1}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2(5,832)\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3(5,832) \text{ ลิตร}$$

ในทำนองเดียวกัน วันที่ n จะใช้น้ำไป $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(5,832)$ ลิตร

จะได้ ปริมาณน้ำที่ใช้ไปในวันที่ $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ คือ

$$\frac{1}{3}(5832), \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}(5832)\right), \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}(5832)\right), \ldots, \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}(5832)\right), \ldots$$

ซึ่งเป็นลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น $\frac{1}{3}(5,832)$ และอัตราส่วนร่วมเป็น $\frac{2}{3}$

ให้ S_n แทนปริมาณน้ำที่ใช้ไปทั้งหมด เมื่อครบ n วัน

ดังนั้น ปริมาณน้ำที่ใช้ไปทั้งหมด เมื่อครบ 6 วัน คือ S_6

จาก $S_n = \dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ $S_6 = \dfrac{\frac{1}{3}(5,832)\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^6\right)}{1-\frac{2}{3}} = 5,320$

นั่นคือ เมื่อครบ 6 วัน ใช้น้ำไปทั้งหมด 5,320 ลิตร

ดังนั้น เมื่อครบ 6 วัน จะมีน้ำเหลืออยู่ในถัง $5,832-5,320=512$ ลิตร

7. จาก รถยนต์มีมูลค่าลดลง 20% หมายความว่าราคารถยนต์คันนี้จะลดลง 20% ของราคารถยนต์คันนี้ในปีก่อนหน้า

บริษัทซื้อรถยนต์คันนี้มาราคา 1,000,000 บาท

เมื่อครบ 1 ปี รถยนต์คันนี้จะมีราคาลดลง $0.2(1,000,000)$ บาท ทำให้มูลค่าของรถ

เท่ากับ $1,000,000-0.2(1,000,000)=0.8(1,000,000)$ บาท

เมื่อครบ 2 ปี รถยนต์คันนี้จะมีราคาลดลง $0.2\left(0.8(1,000,000)\right)$ บาท ทำให้มูลค่าของรถ

เท่ากับ $0.8(1,000,000)-0.2\left(0.8(1,000,000)\right)=(0.8)^2(1,000,000)$ บาท

เมื่อครบ 3 ปี รถยนต์คันนี้จะมีราคาลดลง $0.2\left((0.8)^2(1,000,000)\right)$ บาท ทำให้มูลค่าของรถ

เท่ากับ $(0.8)^2(1,000,000)-0.2\left((0.8)^2(1,000,000)\right)=(0.8)^3(1,000,000)$ บาท

ในทำนองเดียวกัน เมื่อครบ n ปี รถยนต์คันนี้จะมีราคาลดลง $0.2\left((0.8)^{n-1}(1,000,000)\right)$ บาท

จะได้ว่า เมื่อครบ 1, 2, 3, …, n, … ปี รถยนต์คันนี้จะมีราคาลดลง เท่ากับ

$0.2(1000000),\ 0.2\left(0.8(1000000)\right),\ 0.2\left((0.8)^2(1000000)\right),\ \ldots,\ 0.2\left((0.8)^{n-1}(1000000)\right),\ \ldots$

ซึ่งเป็นลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น $0.2(1000000)$ และอัตราส่วนร่วมเป็น 0.8

ให้ S_n แทนผลรวมของราคาที่ลดลงของรถยนต์คันนี้ เมื่อครบ n ปี

ดังนั้น ผลรวมของราคาที่ลดลงของรถยนต์คันนี้ เมื่อครบ 5 ปี คือ S_5

จาก $S_n = \dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ $S_5 = \dfrac{0.2(1,000,000)\left(1-(0.8)^5\right)}{1-0.8} = 672,320$

นั่นคือ ผลรวมของราคาที่ลดลงของรถยนต์คันนี้ เมื่อครบ 5 ปี คือ 672,320 บาท

ดังนั้น เมื่อครบห้าปี รถยนต์คันนี้จะมีมูลค่า $1,000,000-672,320=327,680$ บาท

8. ให้ $a_1=160,\ r=\frac{3}{2}$ และ $S_n=2,110$

จาก $$S_n = \frac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1}$$

จะได้ $$2,110 = \frac{160\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right)}{\frac{3}{2}-1}$$

$$2,110 = \frac{160\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$2,110 = 320\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right)$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n-1 = \frac{211}{32}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{243}{32}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

ดังนั้น $n=5$

9. ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1+a_2=-3$ และ $a_5+a_6=-\frac{3}{16}$

จาก $a_n=a_1r^{n-1}$

จะได้ $$a_1+a_2 = -3$$

$$a_1+a_1r = -3$$

$$a_1(1+r) = -3 \qquad \text{------ (1)}$$

และ $$a_5+a_6 = -\frac{3}{16}$$

$$a_1r^4 + a_1r^5 = -\frac{3}{16}$$

$$a_1r^4(1+r) = -\frac{3}{16} \qquad \text{------ (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $r^4 = \frac{1}{16}$

นั่นคือ $r = \frac{1}{2}$ หรือ $r = -\frac{1}{2}$

กรณี $r = \frac{1}{2}$ จาก (1) จะได้ $a_1 = -2$

จาก $$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

จะได้ $$S_8 = \frac{-2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1-\frac{1}{2}} = -\frac{255}{64}$$

กรณี $r = -\frac{1}{2}$ จาก (2) จะได้ $a_1 = -6$

จาก $$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

นั่นคือ $$S_8 = \frac{(-6)\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{255}{64}$$

ดังนั้น ผลบวกของ 8 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $-\frac{255}{64}$

10. ณ เวลาปัจจุบัน มีแบคทีเรีย 1,000 เซลล์ และแบคทีเรียจะแบ่งเซลล์โดยมีจำนวนเพิ่มขึ้น 20% ในแต่ละชั่วโมง จะได้ว่า

เมื่อเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง จะมีแบคทีเรียเพิ่มขึ้นจากเริ่มต้นจำนวน $1,000(0.2)$ เซลล์

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง จะมีแบคทีเรียรวม $1,000+1,000(0.2)=1,000(1.2)$ เซลล์

เมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมง มีแบคทีเรียเพิ่มขึ้นจากชั่วโมงที่ 1 จำนวน $1,000(1.2)(0.2)$ เซลล์

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมง จะมีแบคทีเรียรวม $1,000(1.2)+1,000(1.2)(0.2)=1,000(1.2)^2$ เซลล์

เมื่อเวลาผ่านไป 3 ชั่วโมง มีแบคทีเรียเพิ่มขึ้นจากชั่วโมงที่ 2 จำนวน $1,000(1.2)^2(0.2)$ เซลล์

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 3 ชั่วโมง จะมีแบคทีเรียรวม $1,000(1.2)^2+1,000(1.2)^2(0.2)=1,000(1.2)^3$ เซลล์

ในทำนองเดียวกัน เมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง จะมีแบคทีเรียเพิ่มขึ้นจากชั่วโมงที่ $t-1$ จำนวน

$1,000(1.2)^{t-1}(0.2)$ เซลล์

จะได้ว่า เมื่อเวลาผ่านไป $1,\ 2,\ 3,\ldots,t,\ldots$ ชั่วโมง จะมีแบคทีเรียเพิ่มขึ้น เท่ากับ

$$1000(0.2),1000(1.2)(0.2),1000(1.2)^2(0.2),\ldots,1,000(1.2)^{t-1}(0.2),\ldots$$

ซึ่งเป็นลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น $1,000(0.2)$ และอัตราส่วนร่วมเป็น 1.2

ให้ S_t แทนผลรวมของจำนวนแบคทีเรียที่เพิ่มขึ้น เมื่อครบ t ชั่วโมง

ดังนั้น ผลรวมของจำนวนแบคทีเรียที่เพิ่มขึ้น เมื่อครบ t ชั่วโมง คือ S_t

จาก $S_t=\dfrac{a_1\left(1-r^t\right)}{1-r}$

จะได้ $S_t = \dfrac{(1,000(0.2))\left(1-(1.2)^t\right)}{1-1.2}=1,000\left((1.2)^t-1\right)$

ดังนั้น จำนวนแบคทีเรียทั้งหมดเมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง คือ

$1,000+S_t=1,000+1,000\left((1.2)^t-1\right)=1,000(1.2)^t$ เซลล์

พิจารณาเมื่อเวลาผ่านไป 10 ชั่วโมง

จะได้ว่า จำนวนแบคทีเรียทั้งหมดเท่ากับ $1,000(1.2)^{10}\approx 6,191$ เซลล์

ดังนั้น สูตรที่ใช้ในการหาจำนวนแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง

และเมื่อเวลาผ่านไป 10 ชั่วโมง จะมีแบคทีเรียทั้งหมดประมาณ 6,191 เซลล์

แบบฝึกหัด 1.3.3

1. 1) จากอนุกรม $3+2+\frac{4}{3}+\cdots+3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\cdots$ จะได้

$$S_1 = 3$$
$$S_2 = 3+2 = 5$$
$$S_3 = 3+2+\frac{4}{3} = \frac{19}{3}$$

พิจารณาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมนี้ (S_n)

จากอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี $a_1 = 3$ และ $r = \frac{2}{3}$

และผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ $S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ว่า $$S_n = \frac{3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{2}{3}} = 9\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ $3, 5, \frac{19}{3}, \ldots, 9\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right), \ldots$

2) จากอนุกรม $\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+\frac{25}{2}+\cdots+\frac{1}{2}(5)^{n-1}+\cdots$ จะได้

$$S_1 = \frac{1}{2}$$
$$S_2 = \frac{1}{2}+\frac{5}{2} = 3$$
$$S_3 = \frac{1}{2}+\frac{5}{2}+\frac{25}{2} = \frac{31}{2}$$

พิจารณาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมนี้ (S_n)

จากอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี $a_1 = \frac{1}{2}$ และ $r = 5$

และผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ $S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ว่า $S_n = \dfrac{\frac{1}{2}\left(5^n - 1\right)}{5-1} = \dfrac{1}{8}\left(5^n - 1\right)$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ $\frac{1}{2}, 3, \frac{31}{2}, \ldots, \frac{1}{8}\left(5^n - 1\right), \ldots$

3) จากอนุกรม $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} + \cdots$ จะได้

$S_1 = \frac{1}{2}$

$S_2 = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

$S_3 = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

พิจารณาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมนี้ (S_n)

จากอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี $a_1 = \frac{1}{2}$ และ $r = -\frac{1}{2}$

และผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ $S_n = \dfrac{a_1\left(1 - r^n\right)}{1-r}$

จะได้ว่า $S_n = \dfrac{\frac{1}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \ldots, \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right), \ldots$

4) จากอนุกรม $2 + (-1) + (-4) + \cdots + (5 - 3n) + \cdots$ จะได้

$S_1 = 2$

$S_2 = 2 + (-1) = 1$

$S_3 = 2 + (-1) + (-4) = -3$

พิจารณาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมนี้ (S_n)

จากอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเลขคณิต ที่มี $a_1 = 2$ และ $d = -3$

และผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต คือ $S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$

จะได้ว่า $S_n = \frac{n}{2}\left(2(2)+(n-1)(-3)\right) = \frac{7n-3n^2}{2}$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ $2, 1, -3, \ldots, \frac{7n-3n^2}{2}, \ldots$

5) จากอนุกรม $\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^n+\cdots$ จะได้

$$S_1 = \frac{3}{4}$$

$$S_2 = \frac{3}{4}+\frac{9}{16} = \frac{21}{16}$$

$$S_3 = \frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64} = \frac{111}{64}$$

พิจารณาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมนี้ (S_n)

จากอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี $a_1 = \frac{3}{4}$ และ $r = \frac{3}{4}$

และผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ $S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ว่า $S_n = \frac{\frac{3}{4}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{1-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{3}{4}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{\frac{1}{4}} = 3\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ $\frac{3}{4}, \frac{21}{16}, \frac{111}{64}, \ldots, 3\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right), \ldots$

6) จากอนุกรม $-\frac{1}{10}+\frac{1}{100}-\frac{1}{1,000}+\cdots+\left(\frac{-1}{10}\right)^n+\cdots$ จะได้

$$S_1 = -\frac{1}{10}$$

$$S_2 = -\frac{1}{10}+\frac{1}{100} = -\frac{9}{100}$$

$$S_3 = -\frac{1}{10}+\frac{1}{100}-\frac{1}{1,000} = -\frac{91}{1,000}$$

พิจารณาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมนี้ (S_n)

จากอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี $a_1 = -\frac{1}{10}$ และ $r = -\frac{1}{10}$

และผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ $S_n = \dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ว่า $$S_n = \frac{-\frac{1}{10}\left(1-\left(-\frac{1}{10}\right)^n\right)}{1-\left(-\frac{1}{10}\right)} = \frac{-\frac{1}{10}\left(1-\left(-\frac{1}{10}\right)^n\right)}{\frac{11}{10}} = -\frac{1}{11}\left(1-\left(-\frac{1}{10}\right)^n\right)$$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ $-\frac{1}{10}, -\frac{9}{100}, -\frac{91}{1,000}, \ldots, -\frac{1}{11}\left(1-\left(-\frac{1}{10}\right)^n\right), \ldots$

7) จากอนุกรม $100+10+1+0.1+\cdots+10^{3-n}+\cdots$ จะได้

$$S_1 = 100$$
$$S_2 = 100+10 = 110$$
$$S_3 = 100+10+1 = 111$$

พิจารณาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมนี้ (S_n)

จากอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี $a_1 = 100$ และ $r = \frac{1}{10}$

และผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ $S_n = \dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ว่า $$S_n = \frac{100\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{10}} = \frac{100\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)}{\frac{9}{10}} = \frac{1,000}{9}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ $100, 110, 111, \ldots, \frac{1,000}{9}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right), \ldots$

8) สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}} &= \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}\cdot\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}} \\ &= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{(k+1)-(k-1)} \\ &= \frac{\sqrt{k+1}}{2}-\frac{\sqrt{k-1}}{2} \qquad \text{----- (1)}\end{aligned}$$

จาก (1) เขียนผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมได้ใหม่ดังนี้

$$S_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{0}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{1}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{4}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{\sqrt{n-1}}{2}-\frac{\sqrt{n-3}}{2}\right)$$
$$+\left(\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{\sqrt{n-2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{n+1}}{2}-\frac{\sqrt{n-1}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\sqrt{1}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-1\right)$$

จะได้

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1}+\sqrt{1+1}-1\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$S_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2+1}-1\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1\right)$$
$$S_3 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{3+1}-1\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}-1\right)$$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ

$$\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1\right),\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}-1\right),\ldots,\frac{1}{2}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-1\right),\ldots$$

2. 1) $3+2+\frac{4}{3}+\cdots+3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=3$ และ $r=\frac{2}{3}$

เนื่องจาก $|r|=\frac{2}{3}<1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรม คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{2}{3}} = 9$

2) $\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+\frac{25}{2}+\cdots+\frac{1}{2}(5)^{n-1}+\cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=\frac{1}{2}$ และ $r=5$

เนื่องจาก $|r|=5>1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

3) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}+\cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=\frac{1}{2}$ และ $r=-\frac{1}{2}$

เนื่องจาก $|r|=\frac{1}{2}<1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรม คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}$

4) $2+(-1)+(-4)+\cdots+(5-3n)+\cdots$ เป็นอนุกรมเลขคณิต ที่มีผลบวกย่อย n พจน์แรก

คือ $S_n = \frac{7n-3n^2}{2}$

จากลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมซึ่งคือ $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$

พิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{7n-3n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\left(\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{7}{n}-3\right)}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{7}{n}-3}\right)=\frac{0}{0-3}=0$

จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า ลำดับนี้เป็นลำดับลู่ออก

ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

5) $\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^n+\cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=\frac{3}{4}$ และ $r=\frac{3}{4}$

เนื่องจาก $|r|=\frac{3}{4}<1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรม คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 3$

6) $-\frac{1}{10}+\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}+\cdots+\left(-\frac{1}{10}\right)^n+\cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=-\frac{1}{10}$ และ $r=-\frac{1}{10}$

เนื่องจาก $|r|=\frac{1}{10}<1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรม คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{-\frac{1}{10}}{1-\left(-\frac{1}{10}\right)} = -\frac{1}{11}$

7) $100+10+1+0.1+\cdots+10^{3-n}+\cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=100$ และ $r=\frac{1}{10}$

เนื่องจาก $|r|=\frac{1}{10}<1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรม คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{100}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1000}{9}$

8) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{0}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}+\cdots$

เป็นอนุกรมที่มีผลบวกย่อย n พจน์แรกคือ $S_n=\frac{1}{2}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-1\right)$

จากลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมซึ่งคือ $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-1}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}}{1+\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)\\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}\\
&= \frac{2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2(0)}{1+\sqrt{1+0}-0}$$
$$= \frac{0}{2}$$
$$= 0$$

จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า ลำดับนี้เป็นลำดับลู่ออก

ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

3. 1) อนุกรม $3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{3}{2^{n-1}}+\cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=3$ และ $r=\frac{1}{2}$

เนื่องจาก $|r|=\frac{1}{2}<1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรม คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = 6$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้ คือ 6

2) เนื่องจาก $\frac{4+1}{9}+\frac{8+1}{27}+\frac{16+1}{81}+\cdots+\frac{2^{n+1}+1}{3^{n+1}}+\cdots$

$$= \left(\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\cdots+\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{3^{n+1}}+\cdots\right)$$

พิจารณา อนุกรม $\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\cdots+\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+\cdots$ ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=\frac{4}{9}$

และ $r=\frac{2}{3}$

เนื่องจาก $|r|=\frac{2}{3}<1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรม คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{4}{9}\times 3=\frac{4}{3}$ ----- (1)

พิจารณา อนุกรม $\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{3^{n+1}}+\cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=\frac{1}{9}$

และ $r=\frac{1}{3}$

เนื่องจาก $|r|=\frac{1}{3}<1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรม คือ $\dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{9}\times\dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{6}$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $\dfrac{4+1}{9}+\dfrac{8+1}{27}+\dfrac{16+1}{81}+\cdots+\dfrac{2^{n+1}+1}{3^{n+1}}+\cdots=\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{3}{2}$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้ คือ $\dfrac{3}{2}$

3) เมื่อ x เป็นจำนวนจริง จะได้

$\dfrac{1}{2+x^2}+\dfrac{1}{\left(2+x^2\right)^2}+\dfrac{1}{\left(2+x^2\right)^3}+\cdots+\dfrac{1}{\left(2+x^2\right)^n}+\cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี

$a_1=\dfrac{1}{2+x^2}$ และ $r=\dfrac{1}{2+x^2}$

เนื่องจาก $x^2\geq 0$ จะได้ $2+x^2\geq 2$ และ $0<\dfrac{1}{2+x^2}\leq\dfrac{1}{2}<1$

ดังนั้น $|r|=\dfrac{1}{2+x^2}<1$

จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรม คือ $\dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{\frac{1}{2+x^2}}{1-\frac{1}{2+x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2}$

ดังนั้น $\dfrac{1}{2+x^2}+\dfrac{1}{\left(2+x^2\right)^2}+\dfrac{1}{\left(2+x^2\right)^3}+\cdots+\dfrac{1}{\left(2+x^2\right)^n}+\cdots = \dfrac{1}{1+x^2}$

สำหรับทุก x ที่เป็นจำนวนจริง

4. จาก

$$\begin{aligned}
0.\dot{9} &= 0.9999\ldots \\
&= 0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots \\
&= \frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\cdots \\
&= \frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\cdots
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\dfrac{9}{10}+\dfrac{9}{10^2}+\dfrac{9}{10^3}+\dfrac{9}{10^4}+\cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=\dfrac{9}{10}$ และ $r=\dfrac{1}{10}$

เนื่องจาก $|r| = \frac{1}{10} < 1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรม คือ

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

ดังนั้น $0.\dot{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \cdots = 1$

5. 1) จาก

$$\begin{aligned} 0.\dot{2}\dot{1} &= 0.212121\ldots \\ &= 0.21 + 0.0021 + 0.000021 + \cdots \\ &= \frac{21}{100} + \frac{21}{10000} + \frac{21}{1000000} + \cdots \\ &= \frac{21}{100} + \frac{21}{100^2} + \frac{21}{100^3} + \cdots \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\frac{21}{100} + \frac{21}{100^2} + \frac{21}{100^3} + \cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{21}{100}$ และ $r = \frac{1}{100}$

เนื่องจาก $|r| = \frac{1}{100} < 1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรม

คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{21}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{21}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{7}{33}$

จะได้ว่า $0.\dot{2}\dot{1} = \frac{21}{100} + \frac{21}{100^2} + \frac{21}{100^3} + \cdots = \frac{7}{33}$

2) จาก

$$\begin{aligned} 0.6\dot{1}0\dot{4} &= 0.6104104104\ldots \\ &= 0.6 + 0.0104 + 0.0000104 + 0.0000000104 + \cdots \\ &= \frac{6}{10} + \frac{104}{10,000} + \frac{104}{10,000,000} + \frac{104}{10,000,000,000} + \cdots \\ &= \frac{6}{10} + \frac{104}{10^4} + \frac{104}{10^7} + \frac{104}{10^{10}} + \cdots \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\frac{104}{10^4} + \frac{104}{10^7} + \frac{104}{10^{10}} + \cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{104}{10^4}$ และ $r = \frac{1}{10^3}$

เนื่องจาก $|r| = \frac{1}{10^3} < 1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรม

คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{104}{10^4}}{1-\frac{1}{10^3}} = \frac{\frac{104}{10,000}}{\frac{999}{1,000}} = \frac{104}{9,990}$

จะได้ว่า $0.6\dot{1}0\dot{4} = \frac{6}{10} + \frac{104}{10^4} + \frac{104}{10^7} + \frac{104}{10^{10}} + \cdots = \frac{6}{10} + \frac{104}{9,990} = \frac{3,049}{4,995}$

3) จาก $7.2\dot{5}\dot{6} = 7.2565656\ldots$

$$= 7.2 + 0.056 + 0.00056 + 0.0000056 + \cdots$$

$$= \frac{72}{10} + \frac{56}{1,000} + \frac{56}{100,000} + \frac{56}{10,000,000} + \cdots$$

$$= \frac{72}{10} + \frac{56}{10^3} + \frac{56}{10^5} + \frac{56}{10^7} + \cdots$$

จะได้ว่า $\frac{56}{10^3} + \frac{56}{10^5} + \frac{56}{10^7} + \cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{56}{10^3}$ และ $r = \frac{1}{10^2}$

เนื่องจาก $|r| = \frac{1}{10^2} < 1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรม

คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{56}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{\frac{56}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{28}{495}$

จะได้ว่า $7.2\dot{5}\dot{6} = \frac{72}{10} + \frac{56}{10^3} + \frac{56}{10^5} + \frac{56}{10^7} + \cdots = \frac{72}{10} + \frac{28}{495} = \frac{3,592}{495}$

4) จาก $4.3\dot{8}\dot{7} = 4.3878787\ldots$

$$= 4.3 + 0.087 + 0.00087 + 0.0000087 + \cdots$$

$$= \frac{43}{10} + \frac{87}{1,000} + \frac{87}{100,000} + \frac{87}{10,000,000} + \cdots$$

$$= \frac{43}{10} + \frac{87}{10^3} + \frac{87}{10^5} + \frac{87}{10^7} + \cdots$$

จะได้ว่า $\frac{87}{10^3} + \frac{87}{10^5} + \frac{87}{10^7} + \cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{87}{10^3}$ และ $r = \frac{1}{10^2}$

เนื่องจาก $|r| = \frac{1}{10^2} < 1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรม

คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{87}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{\frac{87}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{29}{330}$

จะได้ว่า $4.3\dot{8}\dot{7} = \frac{43}{10} + \frac{87}{10^3} + \frac{87}{10^5} + \frac{87}{10^7} + \cdots = \frac{43}{10} + \frac{29}{330} = \frac{724}{165}$

5) จาก $0.0737373\ldots = 0.073 + 0.00073 + 0.0000073 + \cdots$

$$= \frac{73}{1,000} + \frac{73}{100,000} + \frac{73}{10,000,000} + \cdots$$

$$= \frac{73}{10^3} + \frac{73}{10^5} + \frac{73}{10^7} + \cdots$$

จะได้ว่า $\frac{73}{10^3} + \frac{73}{10^5} + \frac{73}{10^7} + \cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{73}{10^3}$ และ $r = \frac{1}{10^2}$

เนื่องจาก $|r| = \frac{1}{10^2} < 1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรม

คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{73}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{\frac{73}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{73}{990}$

จะได้ว่า $0.0737373\ldots = \frac{73}{10^3} + \frac{73}{10^5} + \frac{73}{10^7} + \cdots = \frac{73}{990}$

6) จาก $2.999\ldots = 2 + 0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots$

$$= 2 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1,000} + \cdots$$

จะได้ว่า $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1,000} + \cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{9}{10}$ และ $r = \frac{1}{10}$

เนื่องจาก $|r| = \frac{1}{10} < 1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรม

คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$

จะได้ว่า $2.999\ldots = 2 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1,000} + \cdots = 2 + 1 = 3$ หรือ $\frac{3}{1}$

6. ให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

พิจารณา $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+\cdots$ ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=1$ และ $r=x$

จาก $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+\cdots=\frac{2}{3}$ จะได้ว่าอนุกรมนี้ลู่เข้า และมีผลบวกเท่ากับ $\frac{2}{3}$

ดังนั้น $|r|<1$ และผลบวกของอนุกรมคือ $\frac{a_1}{1-r}=\frac{2}{3}$

นั่นคือ $|x|<1$ และ $\frac{a_1}{1-r}=\frac{1}{1-x}=\frac{2}{3}$

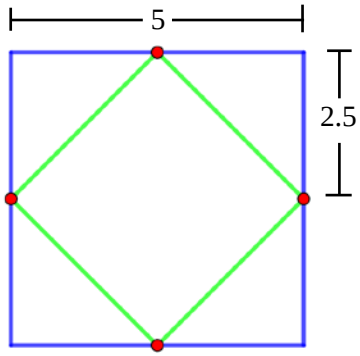
จะได้ $x=-\frac{1}{2}$ ซึ่ง $|x|=\left|-\frac{1}{2}\right|<1$

ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ คือ $-\frac{1}{2}$

7. 1) เนื่องจากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสใหญ่มีเส้นรอบรูปยาว 20 หน่วย

จะได้ รูปสี่เหลี่ยมรูปใหญ่มีด้านยาวด้านละ 5 หน่วย

นั่นคือ ครึ่งหนึ่งของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาว 2.5 หน่วย ดังรูป



จะได้ ด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปเล็กยาว $\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ หน่วย

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปเล็กมีเส้นรอบรูปยาว $4\times\frac{5\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}$ หน่วย

2) ในทำนองเดียวกันกับข้อ 1) เมื่อกระบวนการเกิดรูปใหม่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเกิดขึ้นอีก 1 ครั้ง จะได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่สาม ซึ่งมีด้านแต่ละด้านยาว

$\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{5}{2}$ หน่วย และมีเส้นรอบรูปยาว $4\times\frac{5}{2}=10$ หน่วย

ในทำนองเดียวกัน เมื่อกระบวนการเกิดรูปใหม่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเกิดขึ้นอีก 1 ครั้ง จะได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่สี่ ซึ่งมีด้านแต่ละด้านยาว

$\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$ หน่วย และมีเส้นรอบรูปยาว $4\times\frac{5\sqrt{2}}{4}=5\sqrt{2}$ หน่วย

ดังนั้น เมื่อกระบวนการเกิดรูปใหม่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเกิดขึ้นอย่างต่อเนื่องไม่สิ้นสุด จะได้ ผลบวกของความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมดเป็น

$20+10\sqrt{2}+10+5\sqrt{2}+\cdots$ หน่วย

พิจารณาอนุกรม $20+10\sqrt{2}+10+5\sqrt{2}+\cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=20$

และ $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$

เนื่องจาก $|r|=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$ จะได้ว่าอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{20}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 40+20\sqrt{2}$

ดังนั้น เมื่อกระบวนการเกิดรูปใหม่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเกิดขึ้นอย่างต่อเนื่องไม่สิ้นสุด จะได้ ผลบวกของความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมดเป็น

$40+20\sqrt{2}$ หน่วย

8. ในการแกว่งครั้งแรก หัวเรือไวกิ้งจะแกว่งจากตำแหน่งซ้ายสุดไปถึงขวาสุด วัดระยะทางได้ 75 เมตร เนื่องจาก การแกว่งแต่ละครั้ง หัวเรือไวกิ้งจะแกว่งได้ระยะทางสั้นลงเป็น $\frac{3}{5}$ เท่าของระยะทางในการแกว่งครั้งก่อนหน้า

จะได้ว่า ในการแกว่งครั้งที่สอง หัวเรือไวกิ้งจะแกว่งได้ระยะทาง $\frac{3}{5}(75)$ เมตร

ในการแกว่งครั้งที่สาม หัวเรือไวกิ้งจะแกว่งได้ระยะทาง $\frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}(75)\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^2(75)$ เมตร

ในการแกว่งครั้งที่สี่ หัวเรือไวกิ้งจะแกว่งได้ระยะทาง $\frac{3}{5}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^2(75)\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^3(75)$ เมตร

นั่นคือ ระยะทางทั้งหมดที่หัวเรือไวกิ้งแกว่ง คือ $75+\frac{3}{5}(75)+\left(\frac{3}{5}\right)^2(75)+\left(\frac{3}{5}\right)^3(75)+\cdots$ เมตร

พิจารณาอนุกรม $75+\frac{3}{5}(75)+\left(\frac{3}{5}\right)^2(75)+\left(\frac{3}{5}\right)^3(75)+\cdots$ ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี

$a_1=75$ และ $r=\frac{3}{5}$

เนื่องจาก $|r|=\frac{3}{5}<1$ จะได้ว่าอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{a_1}{1-r}=\frac{75}{1-\frac{3}{5}}=\frac{375}{2}$

ดังนั้น หากไม่มีการหยุดกะทันหัน หัวเรือไวกิ้งจะแกว่งไปมาตั้งแต่เริ่มต้นเป็นระยะทาง

ทั้งหมด $\frac{375}{2}$ เมตร

9. 1) ไม่ถูกต้อง

เพราะ $1+2+4+8+16+32+\cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $r=2$

เนื่องจาก $|r|=2>1$ จะได้ว่าอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

นั่นคือ ไม่มีจำนวนจริงใดที่มีค่าเท่ากับผลบวกของอนุกรมนี้

ดังนั้น การให้ x ที่เป็นจำนวนจริง แทนผลบวกของอนุกรมจึงไม่สามารถทำได้

2) ไม่ถูกต้อง

เพราะ $1-2+4-8+16-32+64-\cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $r=-2$

เนื่องจาก $|r|=2>1$ จะได้ว่าอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

นั่นคือ ไม่มีจำนวนจริงใดที่มีค่าเท่ากับผลบวกของอนุกรมนี้

ดังนั้น การให้ S ที่เป็นจำนวนจริง แทนผลบวกของอนุกรมจึงไม่สามารถทำได้

แบบฝึกหัด 1.4

1. 1) $\sum_{i=1}^{4} 2i = 2(1)+2(2)+2(3)+2(4)$

2) $\sum_{i=4}^{6} (3i-2) = (3\cdot 4-2)+(3\cdot 5-2)+(3\cdot 6-2)$

3) $\sum_{i=2}^{7} (2-i) = (2-2)+(2-3)+(2-4)+(2-5)+(2-6)+(2-7)$

4) $\sum_{i=1}^{52} (i+2) = (1+2)+(2+2)+(3+2)+\cdots+(51+2)+(52+2)$

5) $\sum_{k=1}^{4} (10-2k) = (10-2(1))+(10-2(2))+(10-2(3))+(10-2(4))$

6) $\sum_{i=1}^{20} (i^2+4) = (1^2+4)+(2^2+4)+(3^2+4)+\cdots+(19^2+4)+(20^2+4)$

2. 1) $\sum_{j=1}^{5} 3j = 3\sum_{j=1}^{5} j = 3\left(\frac{5(5+1)}{2}\right) = 45$

2) $\sum_{k=1}^{50} 8 = 50\times 8 = 400$

3) $\sum_{i=1}^{4} i^2(i-3) = \sum_{i=1}^{4} (i^3-3i^2)$

$= \sum_{i=1}^{4} i^3 - 3\sum_{i=1}^{4} i^2$

$= \left(\frac{4(4+1)}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{4(4+1)(8+1)}{6}\right)$

$= 100-90$

$= 10$

4) $\sum_{k=2}^{6} \frac{k+4}{k-1} = \frac{2+4}{2-1}+\frac{3+4}{3-1}+\frac{4+4}{4-1}+\frac{5+4}{5-1}+\frac{6+4}{6-1}$

$= 6+\frac{7}{2}+\frac{8}{3}+\frac{9}{4}+\frac{10}{5}$

$= \frac{197}{12}$

5) $$\sum_{k=1}^{5}\left(k^2+3\right) = \sum_{k=1}^{5}k^2+\sum_{k=1}^{5}3$$
$$= \frac{5(5+1)(10+1)}{6}+(5\times 3)$$
$$= 55+15$$
$$= 70$$

6) $$\sum_{i=1}^{15}(i+5) = \sum_{i=1}^{15}i+\sum_{i=1}^{15}5$$
$$= \frac{15(15+1)}{2}+(15\times 5)$$
$$= 120+75$$
$$= 195$$

7) $$\sum_{i=10}^{20}(2i+1) = \sum_{i=1}^{20}(2i+1)-\sum_{i=1}^{9}(2i+1)$$
$$= \left(2\sum_{i=1}^{20}i+\sum_{i=1}^{20}1\right)-\left(2\sum_{i=1}^{9}i+\sum_{i=1}^{9}1\right)$$
$$= \left(2\left(\frac{20(20+1)}{2}\right)+(20\times 1)\right)-\left(2\left(\frac{9(9+1)}{2}\right)+(9\times 1)\right)$$
$$= (420+20)-(90+9)$$
$$= 341$$

8) $$\sum_{k=1}^{15}(k+5)(k-5) = \sum_{k=1}^{15}\left(k^2-25\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{15}k^2-\sum_{k=1}^{15}25$$
$$= \frac{15(15+1)(30+1)}{6}-(15\times 25)$$
$$= 1,240-375$$
$$= 865$$

9) $$\sum_{j=1}^{20} j^2(2j-3) = \sum_{j=1}^{20}\left(2j^3-3j^2\right)$$
$$= 2\sum_{j=1}^{20} j^3 - 3\sum_{j=1}^{20} j^2$$
$$= 2\left(\frac{20(20+1)}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{20(20+1)(40+1)}{6}\right)$$
$$= 88,200-8,610$$
$$= 79,590$$

10) $$\sum_{i=1}^{10}(i-2)^3 = \sum_{i=1}^{10}\left(i^3-6i^2+12i-8\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{10} i^3 - 6\sum_{i=1}^{10} i^2 + 12\sum_{i=1}^{10} i - \sum_{i=1}^{10} 8$$
$$= \left(\frac{10(10+1)}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{10(10+1)(20+1)}{6}\right) + 12\left(\frac{10(10+1)}{2}\right) - (10\times 8)$$
$$= 3,025-2,310+660-80$$
$$= 1,295$$

3. 1) $$1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+n(n+2)+\cdots = \sum_{i=1}^{\infty} i(i+2)$$

2) $$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n} = \sum_{i=4}^{n}\frac{1}{i}$$

3) $$2+4+6+\cdots+2n = \sum_{i=1}^{n} 2i$$

4) $$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(3)\left(2^{n-1}\right)}+\cdots = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(3)\left(2^{i-1}\right)}$$

5) $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}+\cdots = \sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i-1}}$$

4. 1) $\sum_{i=1}^{n} 6i = 6\sum_{i=1}^{n} i$

$= 6\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$

$= 3n(n+1)$

2) $\sum_{i=1}^{k}(2i+1) = 2\sum_{i=1}^{k} i + \sum_{i=1}^{k} 1$

$= 2\left(\frac{k(k+1)}{2}\right) + k(1)$

$= (k^2+k)+k$

$= k^2+2k$

3) $\sum_{i=1}^{m} 3\cdot 4^i = 3\sum_{i=1}^{m} 4^i$

$= 3(4+4^2+4^3+\cdots+4^m)$

เนื่องจาก $4+4^2+4^3+\cdots+4^m$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = 4,\ r = 4$

และมีผลบวก เท่ากับ $\frac{a_1(1-r^m)}{1-r} = \frac{4(1-4^m)}{1-4} = -\frac{4}{3}(1-4^m)$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{m} 3\cdot 4^i = 3(4+4^2+4^3+\cdots+4^m) = 3\left(-\frac{4}{3}(1-4^m)\right) = 4^{m+1}-4$

4) $\sum_{i=1}^{n}(i^2-i) = \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{2n^3+3n^2+n-3n^2-3n}{6}$

$= \frac{2n^3-2n}{6}$

$= \frac{n^3-n}{3}$

5. 1) ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ

$$
\begin{aligned}
1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+10\cdot 11 &= \sum_{i=1}^{10} i(i+1) \\
&= \sum_{i=1}^{10} \left(i^2+i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{10} i^2+\sum_{i=1}^{10} i \\
&= \frac{10(10+1)(20+1)}{6}+\frac{10(10+1)}{2} \\
&= 385+55 \\
&= 440
\end{aligned}
$$

2) ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ

$$1\cdot 4\cdot 7+2\cdot 5\cdot 8+3\cdot 6\cdot 9+4\cdot 7\cdot 10+\cdots+10\cdot 13\cdot 16$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{10} i(i+3)(i+6) \\
&= \sum_{i=1}^{10} \left(i^3+9i^2+18i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{10} i^3+9\sum_{i=1}^{10} i^2+18\sum_{i=1}^{10} i \\
&= \left(\frac{10(10+1)}{2}\right)^2+9\left(\frac{10(10+1)(20+1)}{6}\right)+18\left(\frac{10(10+1)}{2}\right) \\
&= 3,025+3,465+990 \\
&= 7,480
\end{aligned}
$$

3) ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ

$$1(2+3)+4(4+3)+9(6+3)+\cdots+100(20+3)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{10} i^2(2i+3) \\
&= \sum_{i=1}^{10} \left(2i^3+3i^2\right) \\
&= 2\sum_{i=1}^{10} i^3+3\sum_{i=1}^{10} i^2
\end{aligned}
$$

$$= 2\left(\frac{10(10+1)}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{10(10+1)(20+1)}{6}\right)$$
$$= 6,050 + 1,155$$
$$= 7,205$$

4) ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots + 19^2 = \sum_{i=1}^{10}(2i-1)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{10}\left(4i^2 - 4i + 1\right)$$
$$= 4\sum_{i=1}^{10} i^2 - 4\sum_{i=1}^{10} i + \sum_{i=1}^{10} 1$$
$$= 4\left(\frac{10(10+1)(20+1)}{6}\right) - 4\left(\frac{10(10+1)}{2}\right) + 10(1)$$
$$= 1,540 - 220 + 10$$
$$= 1,330$$

5) ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ

$$1\left(1+\frac{1}{1}\right) + 2\left(1+\frac{1}{2}\right) + 3\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + 10\left(1+\frac{1}{10}\right) = \sum_{i=1}^{10} i\left(1+\frac{1}{i}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{10}(i+1)$$
$$= \sum_{i=1}^{10} i + \sum_{i=1}^{10} 1$$
$$= \frac{10(10+1)}{2} + 10(1)$$
$$= 55 + 10$$
$$= 65$$

6. 1) $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + 10\cdot 11\cdot 12$

$$= \sum_{i=1}^{10} i(i+1)(i+2)$$
$$= \sum_{i=1}^{10}\left(i^3 + 3i^2 + 2i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{10} i^3 + 3\sum_{i=1}^{10} i^2 + 2\sum_{i=1}^{10} i$$

$$= \left(\frac{10(10+1)}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{10(10+1)(20+1)}{6}\right) + 2\left(\frac{10(10+1)}{2}\right)$$
$$= 3,025 + 1,155 + 110$$
$$= 4,290$$

2) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5 + \cdots + 99\cdot 100 = \sum_{n=1}^{99} n(n+1)$

$$= \sum_{n=1}^{99} (n^2 + n)$$
$$= \sum_{n=1}^{99} n^2 + \sum_{n=1}^{99} n$$
$$= \frac{99(99+1)(198+1)}{6} + \frac{99(99+1)}{2}$$
$$= 328,350 + 4,950$$
$$= 333,300$$

7. จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 ที่น้อยที่สุดที่หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 3 คือ $3 = 4(0) + 3$ และจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 ที่มากที่สุดที่หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 3 คือ $99 = 4(24) + 3$ จะได้ว่า ลำดับของจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 ที่หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 3 คือ $3, 7, 11, \ldots, 99$ ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 3 ผลต่างร่วมเป็น 4 และพจน์ที่ n เป็น 99

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ว่า $99 = 3 + (n-1)(4)$

นั่นคือ $n = 25$

จากผลบวกของจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 ที่หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 3 คือ $3 + 7 + 11 + \cdots + 99$

พิจารณา $3 + 7 + 11 + \cdots + 99 = 3 + 7 + 11 + \cdots + (3 + (25-1)(4))$

$$= \sum_{i=1}^{25} (3 + (i-1)(4))$$
$$= \sum_{i=1}^{25} (4i - 1)$$
$$= \sum_{i=1}^{25} (4i) - \sum_{i=1}^{25} 1$$
$$= 4\sum_{i=1}^{25} i - \sum_{i=1}^{25} 1$$

$$= 4\left(\frac{25(25+1)}{2}\right)-(25\times 1)$$
$$= 1{,}300 - 25$$
$$= 1{,}275$$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 ที่หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 3 คือ 1,275

8. 1) ให้ $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$

เนื่องจาก $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{(i+1)-i}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$

ดังนั้น $S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1-\frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{n}{n+1}$$

จะได้ $S_{20} = \frac{20}{20+1} = \frac{20}{21}$

ดังนั้น ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{n}{n+1}$ และผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{20}{21}$

2) ให้ $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$

เนื่องจาก $\frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{(2i+1)-(2i-1)}{(2i-1)(2i+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2i-1)} - \frac{1}{(2i+1)}\right)$

ดังนั้น $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}\right)$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{n}{2n+1}$$

จะได้ $S_{20} = \dfrac{20}{2(20)+1} = \dfrac{20}{41}$

ดังนั้น ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\dfrac{n}{2n+1}$ และผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\dfrac{20}{41}$

3) ให้ $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}$

เนื่องจาก $\dfrac{1}{i(i+1)(i+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{i(i+1)} - \dfrac{1}{(i+1)(i+2)}\right)$

ดังนั้น $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{i(i+1)} - \frac{1}{(i+1)(i+2)}\right)\right)$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i(i+1)} - \frac{1}{(i+1)(i+2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{20}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

จะได้ $S_{20} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{21\cdot 22}\right) = \dfrac{115}{462}$

ดังนั้น ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

และผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\dfrac{115}{462}$

4) ให้ $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)}$

เนื่องจาก $\frac{1}{i(i+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{(i+2)-i}{i(i+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+2}\right)$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)\right. \\
&\quad \left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right)
\end{aligned}$$

จะได้ $S_{20} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{43}{21\cdot 22}\right) = \frac{325}{462}$

ดังนั้น ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right)$

และผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{325}{462}$

9. 1) ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ

$$\begin{aligned}
0+3+8+\cdots+(n^2-1) &= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2-1\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n \\
&= \frac{2n^3+3n^2-5n}{6}
\end{aligned}$$

2) ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ

$$\begin{aligned}
-1+0+9+\cdots+\left(n^3-2n^2\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(i^3-2i^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^3 - 2\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= n(n+1)\left(\frac{n(n+1)}{4}-\frac{2n+1}{3}\right) \\
&= \frac{n(n+1)\left(3n^2-5n-4\right)}{12}
\end{aligned}$$

10. 1) เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{n-1}}$

จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)} = 1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\cdots+\frac{1}{e^{n-1}}+\cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี

$a_1=1$ และ $r=\frac{1}{e}$

เนื่องจาก $|r|=\frac{1}{e}<1$ จะได้ว่าอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{a_1}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{e}}=\frac{e}{e-1}$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรมคือ $\frac{e}{e-1}$

2) เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^{n-1}=1-2+2^2-2^3+2^4-2^5+\cdots$

จะเห็นว่า $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^{n-1}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=1$ และ $r=-2$

เนื่องจาก $|r|=|-2|=2>1$

ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

3) เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{100^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^{2n}} = \frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^4}+\frac{9}{10^6}+\cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี

$a_1 = \frac{9}{10^2}$ และ $r = \frac{1}{10^2}$

เนื่องจาก $|r| = \frac{1}{10^2} < 1$ จะได้ว่าอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{9}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{1}{11}$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{100^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรมคือ $\frac{1}{11}$

4) สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ จะได้ว่า $\frac{5}{k(k+1)} = 5\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

เขียนผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมได้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned} S_n &= 5\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right) \\ &= 5\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{5n}{n+1} \end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{5}{1+\frac{1}{n}} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}5}{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \\ &= \frac{5}{1+0} \\ &= 5 \end{aligned}$$

ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรม คือ 5

5) เขียนผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมได้ดังนี้

$$S_n = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$

ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรม คือ 1

6) เนื่องจาก $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{5^n} = \frac{16}{5}+\frac{16}{5}\left(\frac{4}{5}\right)+\frac{16}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2+\cdots$

เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=\frac{16}{5}$ และ $r=\frac{4}{5}$

เนื่องจาก $|r|=\frac{4}{5}<1$ จะได้ว่าอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{a_1}{1-r}=\frac{\frac{16}{5}}{1-\frac{4}{5}}=16$

ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรม คือ 16

11. จาก พจน์ที่ n ของอนุกรมนี้ คือ $2n-5$

นั่นคือ $a_n=2n-5$

พิจารณาผลบวก 15 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{15}a_n &= \sum_{n=1}^{15}(2n-5)\\ &= 2\sum_{n=1}^{15}n-\sum_{n=1}^{15}5\\ &= 2\left(\frac{15(15+1)}{2}\right)-(15\times 5)\\ &= 240-75\\ &= 165\end{aligned}$$

12. 1) จำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 9 ถึง 199 ที่น้อยที่สุดที่หารด้วย 8 ลงตัว คือ $16=8(2)$

และจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 9 ถึง 199 ที่มากที่สุดที่หารด้วย 8 ลงตัว คือ $192=8(24)$

จะได้ว่า ลำดับของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 9 ถึง 199 ที่หารด้วย 8 ลงตัว คือ 16, 24, 32, …, 192

ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 16 ผลต่างร่วมเป็น 8 และพจน์ที่ n เป็น 192

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ว่า $192 = 16 + (n-1)(8)$

นั่นคือ $n = 23$

จากผลบวกของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 9 ถึง 199 ที่หารด้วย 8 ลงตัว คือ $16+24+32+\cdots+192$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
16+24+32+\cdots+192 &= 16+24+32+\cdots+\left(16+(23-1)(8)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{23}\left(16+(i-1)(8)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{23}(16+8i-8)\\
&= \sum_{i=1}^{23}(8+8i)\\
&= \sum_{i=1}^{23}8+\sum_{i=1}^{23}8i\\
&= 23(8)+8\sum_{i=1}^{23}i\\
&= 184+8\left(\frac{23(23+1)}{2}\right)\\
&= 184+2,208\\
&= 2,392
\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 9 และ 199 ที่หารด้วย 8 ลงตัว เท่ากับ 2,392

2) กำหนดให้ เอกภพสัมพัทธ์ U คือ เซตของจำนวนเต็มทั้งหมดที่อยู่ระหว่าง 9 และ 199

A แทนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมดที่อยู่ระหว่าง 9 และ 199 ที่หารด้วย 8 ลงตัว

จะได้ว่า เซตของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 9 และ 199 ที่หารด้วย 8 ไม่ลงตัว คือ A'

และ $A' = U - A$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 9 และ 199 ที่หารด้วย 8 ไม่ลงตัว หาได้จาก

ผลบวกของจำนวนเต็มทั้งหมดที่อยู่ระหว่าง 9 และ 199 ลบด้วยผลบวกของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 9 และ 199 ที่หารด้วย 8 ลงตัว

จากจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 9 และ 199 คือ $10, 11, 12, \ldots, 198$ ซึ่งมี 189 จำนวน

จะได้

$$\begin{aligned} 10+11+12+\cdots+198 &= \sum_{n=10}^{198} n \\ &= \sum_{n=1}^{198} n - \sum_{n=1}^{9} n \\ &= \frac{198(198+1)}{2} - \frac{9(9+1)}{2} \\ &= 19,701 - 45 \\ &= 19,656 \end{aligned}$$

จากข้อ 1) จะได้ว่า ผลบวกของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 9 และ 199 ที่หารด้วย 8 ไม่ลงตัว เท่ากับ $19,656 - 2,392 = 17,264$

แบบฝึกหัด 1.5

1. 1) ในที่นี้ไม่มีการฝากและถอนในระหว่าง 10 ปีนี้

ให้ $P = 100000, n = 10$ และ $i = 4$ จะได้ว่า $r = \frac{i}{100} = 0.04$

จากทฤษฎีบท 9 จะได้ว่า จำนวนเงินเมื่อฝากเงินครบ 10 ปี คือ $100,000(1+0.04)^{10}$

หรือประมาณ 148,024.43 บาท

2) จากเงินต้น 100,000 บาท

จะได้ว่า จำนวนเงินรวมเพิ่มขึ้นเป็น 3 เท่าของเงินต้น คือ จำนวนเงินรวม 300,000 บาท

ให้ n แทนจำนวนปีที่จะทำให้มีเงินเพิ่มขึ้นเป็น 3 เท่าของเงินต้น

จากทฤษฎีบท 9 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 300,000 &= 100,000(1+0.04)^n \\ (1.04)^n &= 3 \\ \log(1.04)^n &= \log 3 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $n = \frac{\log 3}{\log 1.04} \approx 28.01$

ดังนั้น ต้องฝากเงินครบ 29 ปี จะทำให้มีเงินเพิ่มขึ้นเป็นอย่างน้อยสามเท่าของเงินต้น

2. 1) ดอกเบี้ยที่ได้จากการฝากเงินต้น P บาท โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยในอัตรา $i\%$ ต่อปี และคิดดอกเบี้ยให้ครั้งสุดท้ายครั้งเดียวเมื่อฝากเงินครบ n ปี เท่ากับ $P\left(\frac{i}{100}\right)n$ บาท

จาก $P = 100,000$ และ $i = 3$

ดังนั้น ดอกเบี้ยที่ได้จากการฝากเงินนี้เป็นเวลา n ปี เท่ากับ $100,000\left(\frac{3}{100}\right)n = 3,000n$ บาท

จะได้ว่า จำนวนเงินในบัญชีเมื่อครบปีที่ n เมื่อธนาคารคิดดอกเบี้ยให้ครั้งสุดท้ายครั้งเดียว เท่ากับ $100,000 + 3,000n$ บาท

2) ให้ $P = 100000$ และ $i = 3$ จะได้ว่า $r = \frac{i}{100} = 0.03$

จากทฤษฎีบท 9 จะได้ว่า จำนวนเงินเมื่อฝากเงินครบ n ปี คือ $100,000(1+0.03)^n$ บาท

3. ให้ $P = 100000, k = 4, n = 10$ และ $i = 4$ จะได้ว่า $r = \frac{i}{100} = 0.04$

จากทฤษฎีบท 10 จะได้ว่า จำนวนเงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 10 ปี คือ $100,000\left(1+\frac{0.04}{4}\right)^{4(10)}$

หรือประมาณ 148,886.37 บาท

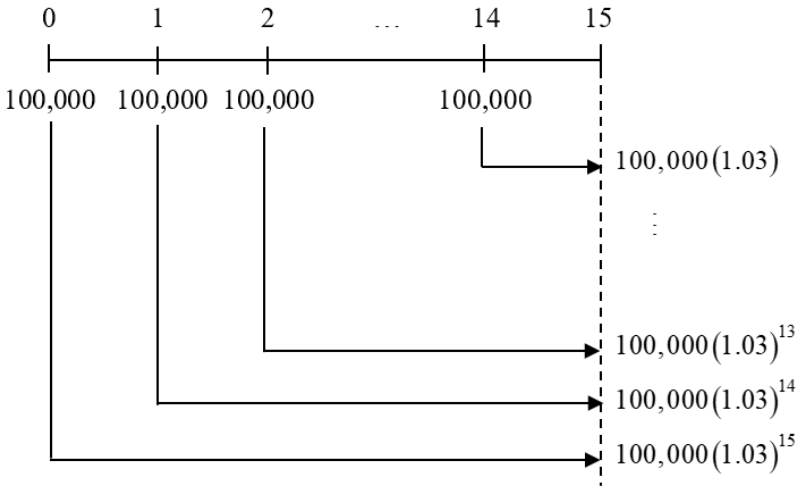
4. ให้ $P = 100000,\ n = 10$ และมีเงินรวม 141,060 บาท

จากทฤษฎีบท 9 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 100,000(1+r)^{10} &= 141,060 \\ (1+r)^{10} &= 1.4106 \\ 1+r &= \sqrt[10]{1.4106} \\ r &= \sqrt[10]{1.4106} - 1 \\ r &\approx 0.035 \end{aligned}$$

ดังนั้น ธนาคารแห่งนี้ให้อัตราดอกเบี้ยประมาณ 3.5% ต่อปี

5. เมื่อต้นปีปัญญาฝากเงิน 100,000 บาท กับธนาคารแห่งหนึ่ง และฝากเงินเพิ่มอีก 100,000 บาท ทุกต้นปี โดยธนาคารกำหนดอัตราดอกเบี้ย 3% และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี เขียนแผนภาพแสดงการฝากเงินและมูลค่าของเงินเมื่อฝากเงินครบ 15 ปี ได้ดังนี้



จากแผนภาพจะได้ว่า เมื่อฝากเงินครบ 15 ปี

เงินฝากเมื่อต้นปีที่ 1 จะมีมูลค่า $100,000(1.03)^{15}$ บาท

เงินฝากเมื่อต้นปีที่ 2 จะมีมูลค่า $100,000(1.03)^{14}$ บาท

เงินฝากเมื่อต้นปีที่ 3 จะมีมูลค่า $100,000(1.03)^{13}$ บาท

$\vdots$

เงินฝากเมื่อต้นปีที่ 15 จะมีมูลค่า $100,000(1.03)$ บาท

ดังนั้น เมื่อฝากเงินครบ 15 ปี จะได้รับเงินรวม

$100,000(1.03)^{15}+100,000(1.03)^{14}+100,000(1.03)^{13}+\cdots+100,000(1.03)$ บาท หรือ

$100,000(1.03)+100,000(1.03)^{2}+\cdots+100,000(1.03)^{15}$ บาท

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 15 พจน์ พจน์แรก คือ $100,000(1.03)$ และอัตราส่วนร่วม คือ 1.03

จะได้ ผลบวก 15 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\dfrac{100,000(1.03)\left[(1.03)^{15}-1\right]}{1.03-1}$

หรือประมาณ 1,915,688.13 บาท

ดังนั้น เมื่อฝากเงินครบ 15 ปี จะมีเงินรวมประมาณ 1,915,688.13 บาท

6. 1) ให้ $S=1000000, i=4, n=20$ จะได้ว่า $r=\dfrac{4}{100}=0.04$

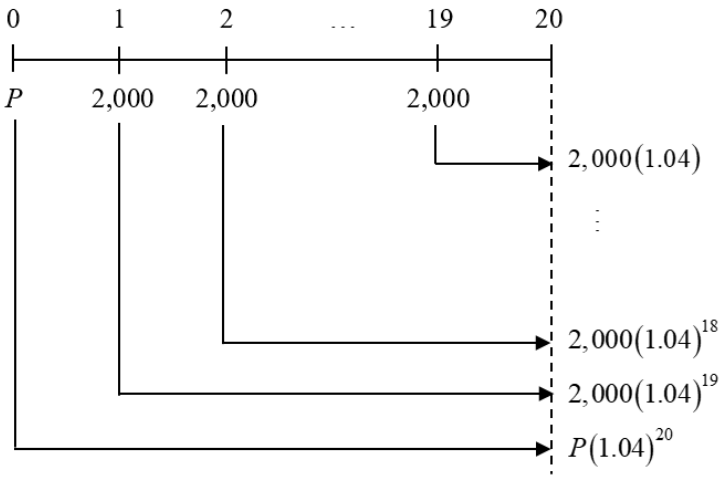
จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงินรวม 1,000,000 บาท คือ

$$P = 1,000,000(1+0.04)^{-20} \approx 456,386.95 \text{ บาท}$$

ดังนั้น ราตรีต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อย 456,386.95 บาท

2) จาก ฝากเงินต้น P บาท เมื่อต้นปีที่ 1 และฝากเพิ่มอีกปีละ 2,000 บาท

เขียนแผนภาพแสดงการฝากเงินและมูลค่าของเงินเมื่อฝากเงินครบ 20 ปี ได้ดังนี้



จากแผนภาพจะได้ว่า อีก 20 ปีข้างหน้า

เงินฝากต้นปีที่ 1 จำนวน P บาท จะมีมูลค่า $P(1.04)^{20}$ บาท

เงินฝากต้นปีที่ 2 จำนวน 2,000 บาท จะมีมูลค่า $2,000(1.04)^{19}$ บาท

เงินฝากต้นปีที่ 3 จำนวน 2,000 บาท จะมีมูลค่า $2,000(1.04)^{18}$ บาท

$\vdots$

เงินฝากต้นปีที่ 20 จำนวน 2,000 บาท จะมีมูลค่า $2,000(1.04)$ บาท

นั่นคือ อีก 20 ปีข้างหน้า ราตรีจะมีเงินรวม

$P(1.04)^{20}+2,000(1.04)^{19}+2,000(1.04)^{18}+\cdots+2,000(1.04)$ บาท

จะได้ $$1,000,000 = P(1.04)^{20}+\frac{2,000(1.04)\left((1.04)^{19}-1\right)}{1.04-1}$$

$$P \approx 430,119.07 \text{ บาท}$$

ดังนั้น ราตรีต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อย 430,119.07 บาท

7. อนันต์กู้เงินจากวิเชียรจำนวน 2 ยอด โดยยอดแรกต้องชำระ 12,682.42 บาท ในอีก 3 ปีข้างหน้า ยอดที่ 2 ต้องชำระ 26,115.36 บาท ในอีก 7 ปีข้างหน้า และวิเชียรกำหนดอัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน

พิจารณาการชำระเงินยอดแรกในอีก 3 ปีข้างหน้า

ให้ $S=12682.42, i=8, k=4$ และ $n=3$ จะได้ว่า $r=\frac{8}{100}=0.08$

จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงิน 12,682.42 บาท คือ $12,682.42\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{-4(3)}$

หรือประมาณ 10,000 บาท

พิจารณาการชำระเงินยอดที่ 2 ในอีก 7 ปีข้างหน้า

ให้ $S=26115.36, i=8, k=4$ และ $n=7$ จะได้ว่า $r=\frac{8}{100}=0.08$

จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงิน 26,115.36 บาท คือ $26,115.36\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{-4(7)}$

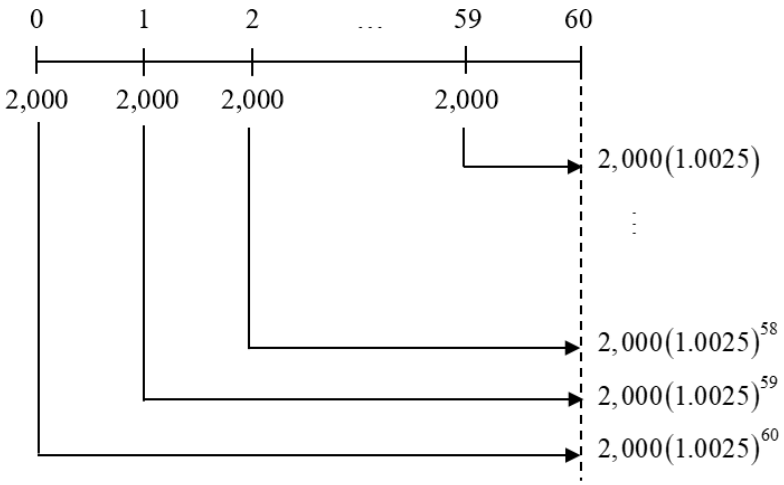
หรือประมาณ 15,000 บาท

ดังนั้น อนันต์กู้เงินจากวิเชียรประมาณ $10,000+15,000=25,000$ บาท

8. สุดาฝากเงิน 2,000 บาท เข้าบัญชีธนาคารทุกต้นเดือน ได้รับอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี

(หรืออัตราดอกเบี้ยต่อเดือน คือ $\frac{3}{12}\%$) จะได้ว่า $r = \frac{\frac{3}{12}}{100} = 0.0025$

เขียนแผนภาพแสดงการฝากเงินและมูลค่าของเงินเมื่อสิ้นปีที่ 5 (สิ้นเดือนที่ 60) ได้ดังนี้



จากแผนภาพจะได้ว่าเมื่อสิ้นปีที่ 5

เงินฝากเมื่อต้นเดือนที่ 1 จำนวน 2,000 บาท จะมีมูลค่า $2,000(1.0025)^{60}$ บาท

เงินฝากเมื่อต้นเดือนที่ 2 จำนวน 2,000 บาท จะมีมูลค่า $2,000(1.0025)^{59}$ บาท

เงินฝากเมื่อต้นเดือนที่ 3 จำนวน 2,000 บาท จะมีมูลค่า $2,000(1.0025)^{58}$ บาท

$\vdots$

เงินฝากเมื่อต้นเดือนที่ 60 จำนวน 2,000 บาท จะมีมูลค่า $2,000(1.0025)$ บาท

นั่นคือ เมื่อสิ้นปีที่ 5 สุดาจะได้เงินรวม

$2,000(1.0025)^{60} + 2,000(1.0025)^{59} + 2,000(1.0025)^{58} + \cdots + 2,000(1.0025)$ บาท

หรือ $2,000(1.0025) + 2,000(1.0025)^2 + 2,000(1.0025)^3 + \cdots + 2,000(1.0025)^{60}$ บาท

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 60 พจน์ พจน์แรก คือ $2,000(1.0025)$ และอัตราส่วนร่วม คือ 1.0025

จะได้ ผลบวก 60 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{2,000(1.0025)\left((1.0025)^{60} - 1\right)}{1.0025 - 1}$

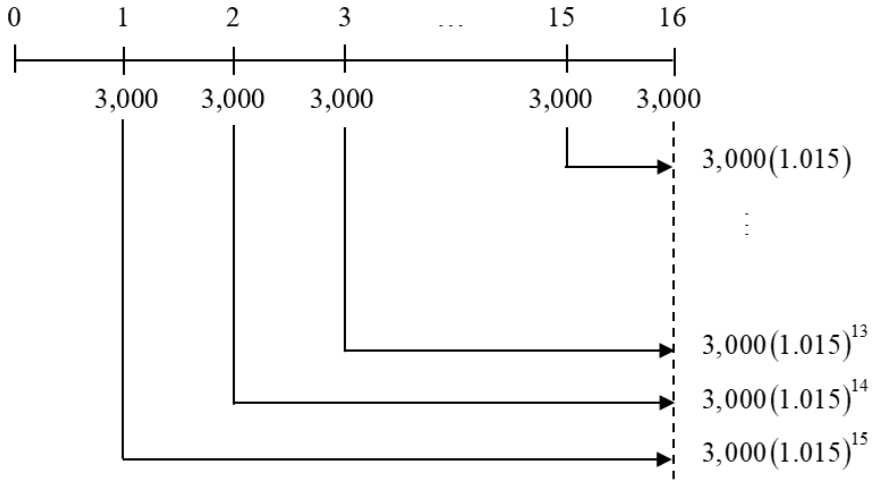
หรือประมาณ 129,616.66 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 5 สุดาจะได้เงินรวมประมาณ 129,616.66 บาท

9. ทอแสงฝากเงิน 3,000 บาท เข้าบัญชีธนาคารทุกสิ้นไตรมาส (1 ไตรมาส เท่ากับ 3 เดือน) ได้รับอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี (หรืออัตราดอกเบี้ยต่อไตรมาส คือ $\frac{6}{4}\%$)

จะได้ว่า $r = \dfrac{\frac{6}{4}}{100} = 0.015$

เขียนแผนภาพแสดงการฝากเงินและมูลค่าของเงินเมื่อสิ้นปีที่ 4 (รวมทั้งหมด 16 งวด) ได้ดังนี้



จากแผนภาพจะได้ว่าเมื่อสิ้นปีที่ 4

เงินฝากเมื่อสิ้นงวดที่ 1 จำนวน 3,000 บาท จะมีมูลค่า $3,000(1.015)^{15}$ บาท

เงินฝากเมื่อสิ้นงวดที่ 2 จำนวน 3,000 บาท จะมีมูลค่า $3,000(1.015)^{14}$ บาท

เงินฝากเมื่อสิ้นงวดที่ 3 จำนวน 3,000 บาท จะมีมูลค่า $3,000(1.015)^{12}$ บาท

$\vdots$

เงินฝากเมื่อสิ้นงวดที่ 15 จำนวน 3,000 บาท จะมีมูลค่า $3,000(1.015)$ บาท

เงินฝากเมื่อสิ้นงวดที่ 16 จำนวน 3,000 บาท จะมีมูลค่า 3,000 บาท

นั่นคือ เมื่อสิ้นปีที่ 4 หรือสิ้นงวดที่ 16 ทอแสงจะได้เงินรวม

$3,000(1.015)^{15} + 3,000(1.015)^{14} + 3,000(1.015)^{13} + \cdots + 3,000(1.015) + 3,000$ บาท

หรือ $3,000 + 3,000(1.015) + 3,000(1.015)^2 + 3,000(1.015)^3 + \cdots + 3,000(1.015)^{15}$ บาท

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 16 พจน์ พจน์แรก คือ 3,000 และอัตราส่วนร่วม คือ 1.015

จะได้ ผลบวก 16 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\dfrac{3,000\left((1.015)^{16}-1\right)}{1.015-1}$

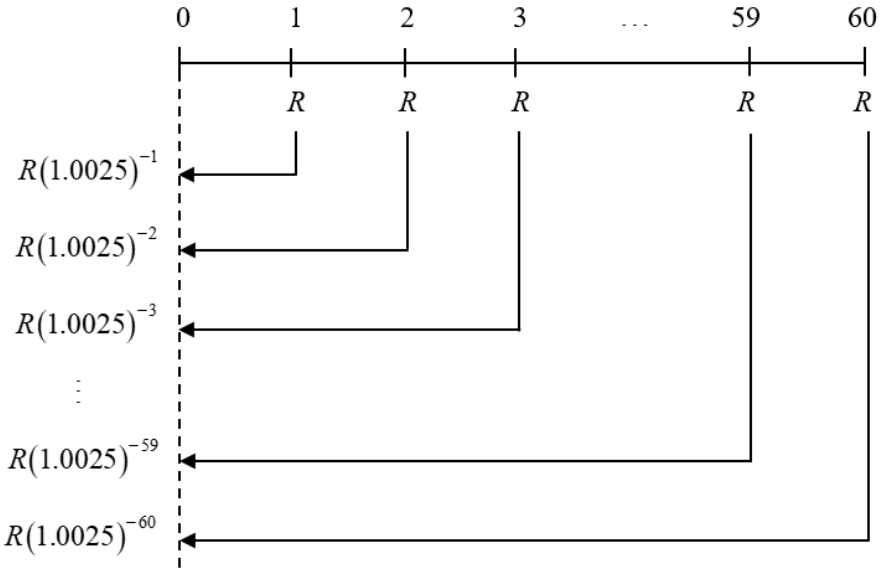
หรือประมาณ 53,797.11 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 4 ทอแสงจะได้เงินรวมประมาณ 53,797.11 บาท

10. ใบเตยซื้อรถยนต์ราคา 700,000 บาท โดยจ่ายเงินดาวน์ 200,000 บาท และผ่อนชำระส่วนที่เหลือเท่ากันทุกเดือน เดือนละ R บาท เป็นเวลา 5 ปี โดยผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน อัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี (หรืออัตราดอกเบี้ยต่องวด คือ $\frac{3}{12}\%$)

จะได้ว่า $r=\dfrac{\frac{3}{12}}{100}=0.0025$

เขียนแผนภาพแสดงการจ่ายเงินซื้อรถยนต์ของใบเตยเป็นเวลา 5 ปี (60 งวด) ได้ดังนี้



จากแผนภาพจะได้ว่า

มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 1 คือ $R(1.0025)^{-1}$ บาท

มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 2 คือ $R(1.0025)^{-2}$ บาท

มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 3 คือ $R(1.0025)^{-3}$ บาท

$\vdots$

มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 60 คือ $R(1.0025)^{-60}$ บาท

นั่นคือ เมื่อครบ 5 ปี ยอดเงินรวมที่ใบเตยจ่ายเพื่อผ่อนรถยนต์เท่ากับ

$R(1.0025)^{-1}+R(1.0025)^{-2}+R(1.0025)^{-3}+\cdots+R(1.0025)^{-60}$ บาท

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 60 พจน์ พจน์แรก คือ $R(1.0025)^{-1}$ และอัตราส่วนร่วม คือ $(1.0025)^{-1}$

จะได้ผลบวก 60 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\dfrac{R(1.0025)^{-1}\left(1-(1.0025)^{-60}\right)}{1-(1.0025)^{-1}}$ บาท

เนื่องจาก ใบเตยต้องจ่ายเงินเพื่อผ่อนรถยนต์ 700,000 – 200,000 = 500,000 บาท

จะได้ $$500,000 = \frac{R(1.0025)^{-1}\left(1-(1.0025)^{-60}\right)}{1-(1.0025)^{-1}}$$

นั่นคือ $$R = \frac{500,000\left(1-(1.0025)^{-1}\right)}{(1.0025)^{-1}\left(1-(1.0025)^{-60}\right)} \approx 8,984.35$$

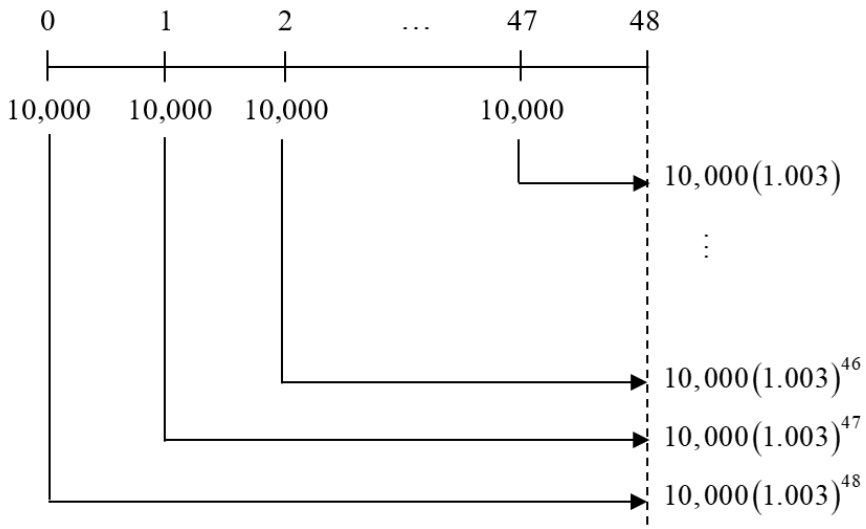
ดังนั้น ใบเตยจะต้องผ่อนชำระเดือนละประมาณ 8,984.35 บาท

11. วัชระฝากเงิน 10,000 บาท เข้าบัญชีธนาคารทุกต้นเดือน

ได้รับอัตราดอกเบี้ย 3.6% ต่อปี (หรืออัตราดอกเบี้ยต่อเดือน คือ $\frac{3.6}{12}\%$)

จะได้ว่า $r=\dfrac{\frac{3.6}{12}}{100}=0.003$

เขียนแผนภาพแสดงการฝากเงินและมูลค่าของเงินเมื่อสิ้นปีที่ 4 (48 เดือน) ได้ดังนี้



จากแผนภาพจะได้ว่าเมื่อสิ้นปีที่ 4

เงินฝากเมื่อต้นเดือนที่ 1 จำนวน 10,000 บาท จะมีมูลค่า $10,000(1.003)^{48}$ บาท

เงินฝากเมื่อต้นเดือนที่ 2 จำนวน 10,000 บาท จะมีมูลค่า $10,000(1.003)^{47}$ บาท

เงินฝากเมื่อต้นเดือนที่ 3 จำนวน 10,000 บาท จะมีมูลค่า $10,000(1.003)^{46}$ บาท

$\vdots$

เงินฝากเมื่อต้นเดือนที่ 48 จำนวน 10,000 บาท จะมีมูลค่า $10,000(1.003)$ บาท

นั่นคือ เมื่อสิ้นปีที่ 4 วัชระจะได้เงินรวม

$10,000(1.003)^{48}+10,000(1.003)^{47}+10,000(1.003)^{46}+\cdots+10,000(1.003)$ บาท

หรือ $10,000(1.003)+10,000(1.003)^{2}+10,000(1.003)^{3}+\cdots+10,000(1.003)^{48}$ บาท

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 48 พจน์ พจน์แรก คือ $10,000(1.003)$ และอัตราส่วนร่วม คือ 1.003

จะได้ผลบวก 48 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\dfrac{10,000(1.003)\left((1.003)^{48}-1\right)}{1.003-1}$

หรือประมาณ 516,996.95 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 4 วัชระจะได้เงินรวม 516,996.95 บาท

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. 1) เนื่องจาก $a_1 = -4, d = -5$ และ $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$\begin{aligned} a_8 &= -4 + (8-1)(-5) \\ &= -4 - 35 \\ &= -39 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a_8 = -39$

2) เนื่องจาก $a_1 = -5, d = 2$ และ $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$\begin{aligned} a_9 &= -5 + (9-1)(2) \\ &= -5 + 16 \\ &= 11 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a_9 = 11$

3) เนื่องจาก $a_1 = -\frac{1}{2}, d = -2$ และ $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$\begin{aligned} a_{15} &= -\frac{1}{2} + (15-1)(-2) \\ &= -\frac{1}{2} - 28 \\ &= -\frac{57}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $a_{15} = -\frac{57}{2}$

4) เนื่องจาก $a_1 = \frac{4}{3}, d = \frac{1}{3}$ และ $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$\begin{aligned} a_{15} &= \frac{4}{3} + (15-1)\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3} + \frac{14}{3} \\ &= 6 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a_{15} = 6$

2. จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$5 = a_1 + (7-1)d \qquad \text{----- (1)}$$
$$10 = a_1 + (12-1)d \qquad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = 1$ และ $a_1 = -1$

นั่นคือ $a_{100} = -1 + (100-1)(1)$

$= -1 + (99)(1)$

$= 98$

ดังนั้น พจน์ที่ 100 ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 98

3. ลำดับเลขคณิตที่กำหนดให้มี $a_1 = 20$ และ $d = 16 - 20 = -4$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $-96 = 20 + (n-1)(-4)$

$n = 30$

ดังนั้น -96 เป็นพจน์ที่ 30 ของลำดับเลขคณิตนี้

4. จาก $a_1 = 5, a_7 = 29$ และ $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $29 = 5 + (7-1)d$

$d = 4$

นั่นคือ $a_2 = a_1 + d = 5 + 4 = 9$

$a_3 = a_2 + d = 9 + 4 = 13$

$a_4 = a_3 + d = 13 + 4 = 17$

$a_5 = a_4 + d = 17 + 4 = 21$

$a_6 = a_5 + d = 21 + 4 = 25$

ดังนั้น พจน์ห้าพจน์ดังกล่าว ได้แก่ 9, 13, 17, 21 และ 25

5. จะแสดงว่า a^2, b^2, c^2 เป็นลำดับเลขคณิต โดยพิจารณาว่า $b^2 - a^2 = c^2 - b^2$ หรือไม่

เนื่องจาก $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ เป็นลำดับเลขคณิต

จะได้ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตนี้หาได้จาก $\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c}$ หรือ $\frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a}$

นั่นคือ $\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a}$

$$\frac{2}{c+a} = \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}$$

$$\frac{2}{c+a} = \frac{b+c+a+b}{ab+ac+b^2+bc}$$

$$2ab+2ac+2b^2+2bc = ab+ac+a^2+ab+bc+c^2+ac+bc$$

ดังนั้น $b^2-a^2 = c^2-b^2$

จึงได้ว่า $a^2,\ b^2,\ c^2$ เป็นลำดับเลขคณิต

6. ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม เท่ากับ 180 องศา

ผลบวกของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยม เท่ากับ 360 องศา

ผลบวกของมุมภายในของรูปห้าเหลี่ยม เท่ากับ 540 องศา

จะเห็นว่า ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม รูปห้าเหลี่ยม … เท่ากับ $180, 360, 540, \ldots$ ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มี $a_1 = 180$ และ $d = 180$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $a_n = 180 + (n-1)(180)$

นั่นคือ $a_n = 180n$

เนื่องจาก ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม เท่ากับ a_1 องศา

ผลบวกของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยม เท่ากับ a_2 องศา

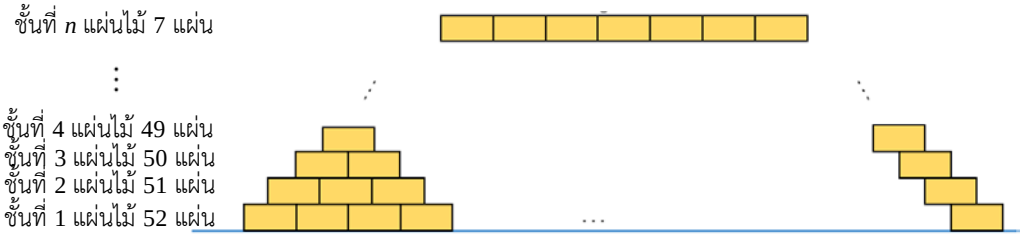
ผลบวกของมุมภายในของรูปห้าเหลี่ยม เท่ากับ a_3 องศา

$\vdots$

ดังนั้น ผลบวกของมุมภายในของรูป n เหลี่ยม เท่ากับ a_{n-2} องศา

นั่นคือ ผลบวกของมุมภายในของรูป n เหลี่ยม เท่ากับ $180(n-2)$ องศา

7. การจัดแผ่นไม้ตามเงื่อนไขที่กำหนดเป็นดังรูป



จากการจัดวางแผ่นไม้ในชั้นที่ 2 โดยให้แนวกึ่งกลางตามด้านยาวของแผ่นไม้แต่ละแผ่นอยู่ตรงกับรอยต่อของแผ่นไม้แต่ละคู่ในชั้นแรก

จะได้ว่า ชั้นที่ 2 มีแผ่นไม้ที่วางจำนวนทั้งหด 52 – 1 = 51 แผ่น

จากการจัดวางแผ่นไม้ในชั้นที่ 3 โดยให้แนวกึ่งกลางตามด้านยาวของแผ่นไม้แต่ละแผ่นอยู่ตรงกับรอยต่อของแผ่นไม้แต่ละคู่ในชั้นที่ 2

จะได้ว่า ชั้นที่ 3 มีแผ่นไม้ที่วางจำนวนทั้งหมด 51 – 1 = 50 แผ่น

ให้ n เป็นชั้นที่มีแผ่นไม้ที่วางจำนวนทั้งหมด 7 แผ่น

จะได้ว่า จำนวนแผ่นไม้ที่วางในชั้นที่ 1, 2, 3, …, n คือ 52, 51, 50, …, 7 ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 52 พจน์ที่ n เป็น 7 และผลต่างร่วมเป็น -1

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $7 = 52 + (n-1)(-1)$

$7 = 52 - n + 1$

$n = 46$

ดังนั้น แผ่นไม้กองนี้มีแผ่นไม้ 46 ชั้น

เนื่องจาก แผ่นไม้แต่ละแผ่นหนา 3 เซนติเมตร

ดังนั้น ความสูงของแผ่นไม้กองนี้ คือ $46 \times 3 = 138$ เซนติเมตร หรือ 1.38 เมตร

8. พิจารณาการออมเงินของฟางข้าว ซึ่งมีเงินเก็บเริ่มต้น 4,200 บาท และออมเงินเพิ่มเดือนละ 300 บาท ตั้งแต่เดือนตุลาคม 2560

จะได้ว่า เมื่อสิ้นเดือนที่ 1 (ตุลาคม 2560) ฟางข้าวจะมีเงินเก็บทั้งหมด $4,200+300=4,500$ บาท

เมื่อสิ้นเดือนที่ 2 (พฤศจิกายน 2560) ฟางข้าวจะมีเงินเก็บทั้งหมด $4,500+300=4,800$ บาท

เมื่อสิ้นเดือนที่ 3 (ธันวาคม 2560) ฟางข้าวจะมีเงินเก็บทั้งหมด $4,800+300=5,100$ บาท

$\vdots$

จะเห็นว่า เมื่อสิ้นเดือนที่ 1, 2, 3, … ฟางข้าวจะมีเงินเก็บทั้งหมด 4500, 4800, 5100, … บาท

ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรก คือ 4,500 และผลต่างร่วม คือ 300

ให้ลำดับ a_n แทน ลำดับของเงินเก็บทั้งหมดของฟางข้าวเมื่อสิ้นเดือน ตั้งแต่เดือนตุลาคม 2560

โดยพจน์ทั่วไป คือ $a_n=4,500+(n-1)300=4,200+300n$ ----- (1)

พิจารณาการออมเงินของใยบัว ซึ่งมีเงินเก็บเริ่มต้น 7,000 บาท และออมเงินเพิ่มเดือนละ 250 บาท ตั้งแต่เดือนตุลาคม 2560

จะได้ว่า เมื่อสิ้นเดือนที่ 1 (ตุลาคม 2560) ใยบัวจะมีเงินเก็บทั้งหมด $7,000+250=7,250$ บาท

เมื่อสิ้นเดือนที่ 2 (พฤศจิกายน 2560) ใยบัวจะมีเงินเก็บทั้งหมด $7,250+250=7,500$ บาท

เมื่อสิ้นเดือนที่ 3 (ธันวาคม 2560) ใยบัวจะมีเงินเก็บทั้งหมด $7,500+250=7,750$ บาท

$\vdots$

จะเห็นว่า เมื่อสิ้นเดือนที่ 1, 2, 3, … ใยบัวจะมีเงินเก็บทั้งหมด 7250, 7500, 7750, … บาท

ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรก คือ 7,250 และผลต่างร่วม คือ 250

ให้ลำดับ b_n แทน ลำดับของเงินเก็บทั้งหมดของใยบัวเมื่อสิ้นเดือน ตั้งแต่เดือนตุลาคม 2560

โดยพจน์ทั่วไป คือ $b_n=7,250+(n-1)250=7,000+250n$ ----- (2)

1) สมมติให้ เมื่อสิ้นเดือนที่ n ฟางข้าวมีเงินเก็บทั้งหมด 12,300 บาท

นั่นคือ $a_n=12,300$

จาก (1) จะได้ $12,300=4,200+300n$

ดังนั้น $n=27$

นั่นคือ เมื่อสิ้นเดือนที่ 27 หรือสิ้นเดือนธันวาคม 2562 ฟางข้าวมีเงินเก็บทั้งหมด 12,300 บาท

พิจารณาจำนวนเงินเก็บของใยบัวเมื่อสิ้นเดือนที่ 27 โดยแทน n ด้วย 27 ใน (2)

จะได้ $b_{27} = 250(27) + 7,000 = 13,750$

ดังนั้น เมื่อสิ้นเดือนที่ 27 หรือสิ้นเดือนธันวาคม 2562 ใยบัวจะมีเงินเก็บทั้งหมด 13,750 บาท

2) จาก ใยบัวต้องการนำเงินเก็บไปซื้อคอมพิวเตอร์ราคา 24,700 บาท

จะได้ว่า ใยบัวต้องมีเงินเก็บมากกว่าหรือเท่ากับ 24,700 บาท

สมมติให้ เมื่อสิ้นเดือนที่ n ใยบัวมีเงินเก็บมากกว่าหรือเท่ากับ 24,700 บาท

นั่นคือ $b_n \geq 24,700$

จาก (2) จะได้ว่า $7,000 + 250n \geq 24,700$

$$n \geq \frac{354}{5} = 70.8$$

จาก n เป็นจำนวนเต็มบวก

จะได้ว่า ใยบัวจะต้องออมเงินอย่างน้อย 71 เดือน ตั้งแต่เดือนตุลาคม 2560

จึงจะสามารถซื้อคอมพิวเตอร์ได้

3) สมมติให้ เมื่อสิ้นเดือนที่ n ฟางข้าวมีเงินเก็บมากกว่าใยบัว

นั่นคือ $a_n > b_n$

จะได้ว่า $300n + 4,200 > 250n + 7,000$

$$50n > 2800$$
$$n > 56$$

ดังนั้น เมื่อสิ้นเดือนที่ 57 หรือสิ้นเดือนมิถุนายน 2565 ฟางข้าวมีเงินเก็บมากกว่าใยบัว

9. จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = -162$ และ $r = -\frac{1}{3}$

จะได้ $a_{12} = -162\left(-\frac{1}{3}\right)^{12-1} = \frac{2}{2,187}$

ดังนั้น พจน์ที่ 12 ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{2}{2,187}$

10. เนื่องจาก ลำดับเรขาคณิตนี้มี $a_2 = \frac{8}{3}$ และ $a_5 = \frac{64}{81}$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $a_2 = a_1 r^{2-1} = a_1 r$

และ $a_5 = a_1 r^{5-1} = a_1 r^4$

ดังนั้น $\frac{8}{3} = a_1 r$ ----- (1)

และ $\frac{64}{81} = a_1 r^4$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $r^3 = \frac{8}{27}$ นั่นคือ $r = \frac{2}{3}$

ดังนั้น อัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{2}{3}$

11. เนื่องจาก ลำดับเรขาคณิตนี้มี $a_1 = 7, a_2 = -21, a_3 = 63$ และ $a_4 = -189$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $-21 = 7r^{2-1}$ นั่นคือ $-21 = 7r$ ----- (1)

และ $63 = 7r^{3-1}$ นั่นคือ $63 = 7r^2$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $r = -3$

นั่นคือ $a_n = 7(-3)^{n-1}$

เมื่อ $a_n = 5{,}103$

จะได้ $5{,}103 = 7(-3)^{n-1}$

$729 = (-3)^{n-1}$

$(-3)^6 = (-3)^{n-1}$

นั่นคือ $n - 1 = 6$

จะได้ $n = 7$

ดังนั้น 5,103 เป็นพจน์ที่ 7 ของลำดับเรขาคณิตนี้

12. ให้ a เป็นจำนวนที่บวกกับ 5, 22 และ 107 แล้ว $5+a, 22+a, 107+a$ เป็นลำดับเรขาคณิต

จะได้อัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตนี้หาได้จาก $\frac{22+a}{5+a}$ หรือ $\frac{107+a}{22+a}$

นั่นคือ
$$\begin{aligned}\frac{22+a}{5+a} &= \frac{107+a}{22+a}\\ (22+a)(22+a) &= (107+a)(5+a)\\ 484+44a+a^2 &= 535+112a+a^2\\ -68a &= 51\\ a &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

ดังนั้น $a=-\frac{3}{4}$ ทำให้ $5+a, 22+a, 107+a$ เป็นลำดับเรขาคณิต

13. ให้ a_1, a_1r และ a_1r^2 เป็นสามพจน์แรกของลำดับเรขาคณิต ที่มีอัตราส่วนร่วม คือ r $(r \neq 0)$

เนื่องจากผลบวกของสามพจน์นี้ คือ -3

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}a_1+a_1r+a_1r^2 &= -3\\ a_1\left(1+r+r^2\right) &= -3 \qquad \text{----- (1)}\end{aligned}$$

เนื่องจากผลคูณของสามพจน์นี้ คือ 8

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}(a_1)(a_1r)\left(a_1r^2\right) &= 8\\ a_1^3r^3 &= 8\\ a_1r &= 2\\ a_1 &= \frac{2}{r}\end{aligned}$$

แทน a_1 ด้วย $\frac{2}{r}$ ใน (1) จะได้
$$\begin{aligned}\frac{2}{r}\left(1+r+r^2\right) &= -3\\ 2r^2+5r+2 &= 0\\ (2r+1)(r+2) &= 0\end{aligned}$$

นั่นคือ $r=-\frac{1}{2}$ หรือ $r=-2$

กรณี $r=-\frac{1}{2}$ จะได้ $a_1=-4$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ $(-4)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

กรณี $r=-2$ จะได้ $a_1=-1$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ $(-1)(-2)^{n-1}$

14. การรณรงค์ลดการใช้ถุงพลาสติกในอำเภอหนึ่ง ทำให้จำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้วลดลงปีละ 5% ของจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้วในปีก่อนหน้า

จาก ปีที่เริ่มต้นการรณรงค์มีจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้ว 100,000 ถุง จะได้ว่า

ในการรณรงค์ปีที่ 1 จะมีจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้ว $100,000(0.95)$ ถุง

ในการรณรงค์ปีที่ 2 จะมีจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้ว $100,000(0.95)(0.95)=100,000(0.95)^2$ ถุง

ในการรณรงค์ปีที่ 3 จะมีจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้ว $100,000(0.95)^2(0.95)=100,000(0.95)^3$ ถุง

ในทำนองเดียวกัน ในการรณรงค์ปีที่ n จะมีจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้ว $100,000(0.95)^n$ ถุง

จะได้ว่า ในการรณรงค์ปีที่ $1, 2, 3, \ldots, n$ จะมีจำนวนถุงพลาสติกใช้แล้ว

$$100000(0.95), 100000(0.95)^2, 100000(0.95)^3, \ldots, 100000(0.95)^n$$

ซึ่งเป็นลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรก คือ $100,000(0.95)$ อัตราส่วนร่วม คือ 0.95

และพจน์ทั่วไป คือ $100,000(0.95)^n$

ดังนั้น สูตรการคำนวณจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้วในการรณรงค์แต่ละปี คือ $100,000(0.95)^n$

และจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้วในการรณรงค์ปีที่ 10 คือ $100,000(0.95)^{10}$ หรือประมาณ 59,874 ถุง

15. พิจารณาเมือง A ซึ่งมีพื้นที่ป่า 400 ตารางกิโลเมตร โดยพื้นที่ป่าลดลงเฉลี่ยปีละ 4% ของพื้นที่ป่าในปีก่อนหน้า จะได้ว่า

อีก 1 ปีข้างหน้า เมือง A จะมีพื้นที่ป่า $400(0.96)$ ตารางกิโลเมตร

อีก 2 ปีข้างหน้า เมือง A จะมีพื้นที่ป่า $400(0.96)(0.96)=400(0.96)^2$ ตารางกิโลเมตร

อีก 3 ปีข้างหน้า เมือง A จะมีพื้นที่ป่า $400(0.96)^2(0.96)=400(0.96)^3$ ตารางกิโลเมตร

$\vdots$

จะเห็นว่า อีก $1, 2, 3, \ldots$ ปีข้างหน้า เมือง A จะมีพื้นที่ป่า $400(0.96), 400(0.96)^2, 400(0.96)^3, \ldots$ ตารางกิโลเมตร ซึ่งเป็นลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรก คือ $400(0.96)$ และอัตราส่วนร่วม คือ 0.96

ให้ a_n แทนลำดับของพื้นที่ป่าของเมือง A

โดยพจน์ทั่วไป คือ $a_n=400(0.96)^n$ ----- (1)

พิจารณาเมือง B ซึ่งมีพื้นที่ป่า 60 ตารางกิโลเมตร โดยพื้นที่ป่าเพิ่มขึ้นทุกปีเฉลี่ยปีละ 2% ของพื้นที่ป่าในปีก่อนหน้า จะได้ว่า

อีก 1 ปีข้างหน้า เมือง B จะมีพื้นที่ป่า $60(1.02)$ ตารางกิโลเมตร

อีก 2 ปีข้างหน้า เมือง B จะมีพื้นที่ป่า $60(1.02)(1.02)=60(1.02)^2$ ตารางกิโลเมตร

อีก 3 ปีข้างหน้า เมือง B จะมีพื้นที่ป่า $60(1.02)^2(1.02)=60(1.02)^3$ ตารางกิโลเมตร

$\vdots$

จะเห็นว่า อีก 1, 2, 3, … ปีข้างหน้า เมือง B จะมีพื้นที่ป่า $60(1.02), 60(1.02)^2, 60(1.02)^3, \ldots$ ตารางกิโลเมตร ซึ่งเป็นลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรก คือ $60(1.02)$ และอัตราส่วนร่วม คือ 1.02

ให้ b_n แทนลำดับของพื้นที่ป่าของเมือง B

โดยพจน์ทั่วไป คือ $b_n = 60(1.02)^n$ ----- (2)

1) พิจารณาพื้นที่ป่าในอีก 10 ปีข้างหน้าของเมือง A และ B โดยแทน n ด้วย 10 ใน (1) และ (2)

จะได้ $a_{10} = 400(0.96)^{10} \approx 265.93$

และ $b_{10} = 60(1.02)^{10} \approx 73.14$

ดังนั้น อีก 10 ปีข้างหน้า เมือง A จะมีพื้นที่ป่ามากกว่าเมือง B อยู่ประมาณ

$265.93 - 73.14 = 192.79$ ตารางกิโลเมตร

2) สมมติให้อีก n ปีข้างหน้า เมือง B มีพื้นที่ป่ามากกว่าเมือง A

นั่นคือ $b_n > a_n$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$60(1.02)^n > 400(0.96)^n$$

$$\left(\frac{1.02}{0.96}\right)^n > \frac{400}{60}$$

$$\left(\frac{17}{16}\right)^n > \frac{20}{3}$$

$$\log\left(\frac{17}{16}\right)^n > \log\left(\frac{20}{3}\right)$$

$$n\log\left(\frac{17}{16}\right) > \log\left(\frac{20}{3}\right)$$

$$n > \frac{\log\left(\frac{20}{3}\right)}{\log\left(\frac{17}{16}\right)} \approx 31.29$$

จาก n เป็นจำนวนเต็มบวก

จะได้ว่า อีกอย่างน้อย 32 ปี เมือง B จะมีพื้นที่ป่ามากกว่าเมือง A

16. 1) พจน์ที่หายไปของลำดับนี้ คือ a_4, a_5 และ a_6

กรณีที่ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิต จะต้องได้ว่า $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

เนื่องจาก $a_2 - a_1 = \frac{27}{2} - 11 = \frac{5}{2}$ และ $a_3 - a_2 = 16 - \frac{27}{2} = \frac{5}{2}$

จะเห็นว่า $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิต ที่มี $a_1 = 11$ และ $d = \frac{5}{2}$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $a_4 = 11 + (4-1)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{37}{2}$

$a_5 = 11 + (5-1)\left(\frac{5}{2}\right) = 21$

$a_6 = 11 + (6-1)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{47}{2}$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ $\frac{37}{2}$, 21 และ $\frac{47}{2}$ ตามลำดับ

กรณีที่ลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิต จะต้องได้ว่า $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$

เนื่องจาก $\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{27}{2}}{11} = \frac{27}{22}$ และ $\frac{a_3}{a_2} = \frac{16}{\frac{27}{2}} = \frac{32}{27}$ ซึ่ง $\frac{27}{22} \neq \frac{32}{27}$

จะเห็นว่า $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2}$

ดังนั้น ลำดับนี้ไม่เป็นลำดับเรขาคณิต

2) พจน์ที่หายไปของลำดับนี้ คือ a_3, a_5 และ a_6

กรณีที่ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิต จะต้องได้ว่า $d = a_2 - a_1 = \frac{11}{7} - \frac{7}{11} = \frac{72}{77}$

$a_1 = \frac{7}{11}$ และ $a_4 = \frac{265}{77}$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $a_4 = \frac{7}{11} + (4-1)\frac{72}{77} = \frac{265}{77}$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิต ที่มี $a_1 = \frac{7}{11}$ และ $d = \frac{72}{77}$

จะได้ $a_3 = \frac{7}{11} + (3-1)\left(\frac{72}{77}\right) = \frac{193}{77}$

$a_5 = \frac{7}{11} + (5-1)\left(\frac{72}{77}\right) = \frac{337}{77}$

$a_6 = \frac{7}{11} + (6-1)\left(\frac{72}{77}\right) = \frac{409}{77}$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ $\frac{193}{77}, \frac{337}{77}$ และ $\frac{409}{77}$ ตามลำดับ

กรณีที่ลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิต จะต้องได้ว่า $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{11}{7}}{\frac{7}{11}} = \frac{121}{49}$ และ $a_4 = \frac{265}{77}$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $a_4 = \frac{7}{11}\left(\frac{121}{49}\right)^{3-1} = \frac{102,487}{539}$ ซึ่ง $\frac{102,487}{539} \neq \frac{265}{77}$

นั่นคือ ลำดับนี้ไม่เป็นลำดับเรขาคณิต

3) พจน์ที่หายไปของลำดับนี้ คือ a_4, a_5 และ a_6

กรณีที่ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิต จะต้องได้ว่า $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

เนื่องจาก $a_2 - a_1 = 4 - 6 = -2$ และ $a_3 - a_2 = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$

จะเห็นว่า $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$

ดังนั้น ลำดับนี้ไม่เป็นลำดับเลขคณิต

กรณีที่ลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิต จะต้องได้ว่า $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}$

เนื่องจาก $\frac{a_2}{a_1}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ และ $\frac{a_3}{a_2}=\frac{\frac{8}{3}}{4}=\frac{2}{3}$

จะเห็นว่า $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิต ที่มี $a_1=6$ และ $r=\frac{2}{3}$

จาก $a_n=a_1r^{n-1}$

จะได้ $a_4=6\left(\frac{2}{3}\right)^{4-1}=\frac{16}{9}$

$a_5=6\left(\frac{2}{3}\right)^{5-1}=\frac{32}{27}$

$a_5=6\left(\frac{2}{3}\right)^{6-1}=\frac{64}{81}$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ $\frac{16}{9},\frac{32}{27}$ และ $\frac{64}{81}$ ตามลำดับ

4) พจน์ที่หายไปของลำดับนี้ คือ a_3, a_5 และ a_6

กรณีที่ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิต จะต้องได้ว่า $d=a_2-a_1=-\frac{5}{3}-\frac{5}{6}=-\frac{15}{6}$

$a_1=\frac{5}{6}$ และ $a_4=-\frac{20}{3}$

จาก $a_n=a_1+(n-1)d$

จะได้ $a_4=\frac{5}{6}+(4-1)\left(-\frac{15}{6}\right)=-\frac{20}{3}$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิต ที่มี $a_1=\frac{5}{6}$ และ $d=-\frac{15}{6}$

จะได้ $a_3=\frac{5}{6}+(3-1)\left(-\frac{15}{6}\right)=-\frac{25}{6}$

$a_5=\frac{5}{6}+(5-1)\left(-\frac{15}{6}\right)=-\frac{55}{6}$

$a_6=\frac{5}{6}+(6-1)\left(-\frac{15}{6}\right)=-\frac{35}{3}$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ $-\frac{25}{6}, -\frac{55}{6}$ และ $-\frac{35}{3}$ ตามลำดับ

กรณีที่ลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิต จะต้องได้ว่า $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{6}} = -2$

$a_1 = \frac{5}{6}$ และ $a_4 = -\frac{20}{3}$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $a_4 = \frac{5}{6}(-2)^{4-1} = -\frac{20}{3}$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิต ที่มี $a_1 = \frac{5}{6}$ และ $r = -2$

จะได้ $a_3 = \frac{5}{6}(-2)^{3-1} = \frac{10}{3}$

$a_5 = \frac{5}{6}(-2)^{5-1} = \frac{40}{3}$

$a_6 = \frac{5}{6}(-2)^{6-1} = -\frac{80}{3}$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ $\frac{10}{3}, \frac{40}{3}$ และ $-\frac{80}{3}$ ตามลำดับ

17. ให้ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

และกำหนดให้ $a = t$

เนื่องจาก a, b, c เป็นลำดับเรขาคณิต ที่มีอัตราส่วนร่วม คือ r

จะได้ว่า $b = tr$ และ $c = tr^2$

เนื่องจาก b, a, c เป็นลำดับเลขคณิต ที่มีผลต่างร่วม คือ d

จะได้ว่า $t = b + d$ และ $c = t + d$

ดังนั้น $tr = t - d$ ----- (1)

$tr^2 = t + d$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้

$$tr^2 + tr - 2t = 0$$
$$t(r+2)(r-1) = 0$$

ดังนั้น $t = 0$ หรือ $r = -2$ หรือ $r = 1$

กรณี $t=0$ จะได้ว่า $a=0, b=0, c=0$ ซึ่งไม่เป็นลำดับเรขาคณิต เนื่องจากอัตราส่วนร่วมไม่นิยาม

กรณี $r=-2$ จาก (1) จะได้ $d=3t$

นั่นคือ $b=-2t$ และ $c=4t$

จะได้ว่า a, b และ c คือ $t, -2t$ และ $4t$ ตามลำดับ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เท่ากับ 0

กรณี $r=1$ จาก (1) จะได้ $d=0$

นั่นคือ $b=t$ และ $c=t$

จะได้ว่า a, b และ c คือ t, t และ t ตามลำดับ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น จำนวนจริง a,b และ c ทั้งหมด ที่ทำให้ลำดับ a,b,c เป็นลำดับเรขาคณิต

และลำดับ b,a,c เป็นลำดับเลขคณิต มี 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 $a=t, b=-2t$ และ $c=4t$

กรณีที่ 2 $a=t, b=t$ และ $c=t$

เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เท่ากับ 0

18. ให้ $10, a_2, a_3$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วม คือ d

และ $10, b_2, b_3$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วม คือ r

เนื่องจาก $a_2=b_2$ และ $b_3-a_3=2.5$

จะได้ว่า

$$10+d = 10r$$

$$d = 10r-10 \qquad \text{----- (1)}$$

และ

$$10r^2-(10+2d) = 2.5 \qquad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 10r^2-(10+2(10r-10)) &= 2.5 \\ 10r^2-20r+10 &= 2.5 \\ 4r^2-8r+3 &= 0 \\ (2r-3)(2r-1) &= 0 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $r=\frac{3}{2}$ หรือ $r=\frac{1}{2}$

กรณี $r=\frac{3}{2}$ จะได้ $d=5$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $10+(n-1)(5)$

และ พจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต คือ $10\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

กรณี $r=\frac{1}{2}$ จะได้ $d=-5$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $10+(n-1)(-5)$

และ พจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต คือ $10\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

19. พิจารณาบริษัท A ซึ่งให้เงินเดือนเริ่มต้น 20,000 บาท และแต่ละปีจะขึ้นเงินเดือนให้ 1,500 บาท จะได้ว่า

ปีที่ 1 ของการทำงาน เจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท A จะได้รับเงินเดือน 20,000 บาท

ปีที่ 2 ของการทำงาน เจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท A จะได้รับเงินเดือน $20,000+1,500$ บาท

ปีที่ 3 ของการทำงาน เจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท A จะได้รับเงินเดือน $(20,000+1,500)+1,500=20,000+2(1,500)$ บาท

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า ปีที่ n ของการทำงาน เจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท A จะได้รับเงินเดือน $20,000+(n-1)(1,500)$ บาท

นั่นคือ ปีที่ 1, 2, 3, …, n ของการทำงาน เจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท A จะได้รับเงินเดือน $20000,\ 20000+1500,\ 20000+2(1500),\ \ldots,\ 20000+(n-1)(1500)$ บาท

ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรก คือ 20,000 และผลต่างร่วม คือ 1,500

ให้ a_n แทนลำดับของเงินเดือนของเจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท A

โดยพจน์ทั่วไป คือ $a_n=20000+(n-1)(1500)$ ----- (1)

พิจารณาบริษัท B ซึ่งให้เงินเดือนเริ่มต้น 20,000 บาท และแต่ละปีจะขึ้นเงินเดือนให้ 5% ของเงินเดือนปีก่อนหน้า จะได้ว่า

ปีที่ 1 ของการทำงาน เจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท B จะได้รับเงินเดือน 20,000 บาท

ปีที่ 2 ของการทำงาน เจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท B จะได้รับเงินเดือน $20,000(1.05)$ บาท

ปีที่ 3 ของการทำงาน เจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท B จะได้รับเงินเดือน $20,000(1.05)(1.05)=20,000(1.05)^2$ บาท

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า ปีที่ n ของการทำงาน เจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท B จะได้รับเงินเดือน $20,000(1.05)^{n-1}$ บาท

นั่นคือ ปีที่ 1, 2, 3, …, n ของการทำงาน เจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท B จะได้รับเงินเดือน $20000, 20000(1.05), 20000(1.05)^2, \ldots, 20000(1.05)^{n-1}$ บาท ซึ่งเป็นลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรก คือ 20,000 และผลอัตราส่วนร่วม คือ 1.05

ให้ b_n แทนลำดับของเงินเดือนของเจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท B

โดยพจน์ทั่วไป คือ $b_n = 20000(1.05)^{n-1}$ ----- (2)

1) สำหรับเจ้าหน้าที่ทรัพยากรบุคคลของบริษัท A

จาก ปีที่ 1, 2, 3, …, n ของการทำงาน เจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท A จะได้รับเงินเดือน $20000, 20000+1500, 20000+2(1500), \ldots, 20000+(n-1)(1500)$ บาท

ดังนั้น ลำดับแทนเงินเดือนเจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท A ในแต่ละปี คือ

$20000, 20000+1500, 20000+2(1500), \ldots, 20000+(n-1)(1500)$

สำหรับเจ้าหน้าที่ทรัพยากรบุคคลของบริษัท B

จาก ปีที่ 1, 2, 3, …, n ของการทำงาน เจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท B จะได้รับเงินเดือน $20000, 20000(1.05), 20000(1.05)^2, \ldots, 20000(1.05)^{n-1}$ บาท

ดังนั้น ลำดับแทนเงินเดือนเจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท B ในแต่ละปี คือ

$20000(1.05), 20000(1.05)^2, 20000(1.05)^3, \ldots, 20000(1.05)^n$

2) พิจารณาเงินเดือนในปีที่ 10 โดยแทน n ด้วย 10 ใน (1) และ (2)

จะได้ $a_{10} = 20000+(10-1)(1500) = 33,500$

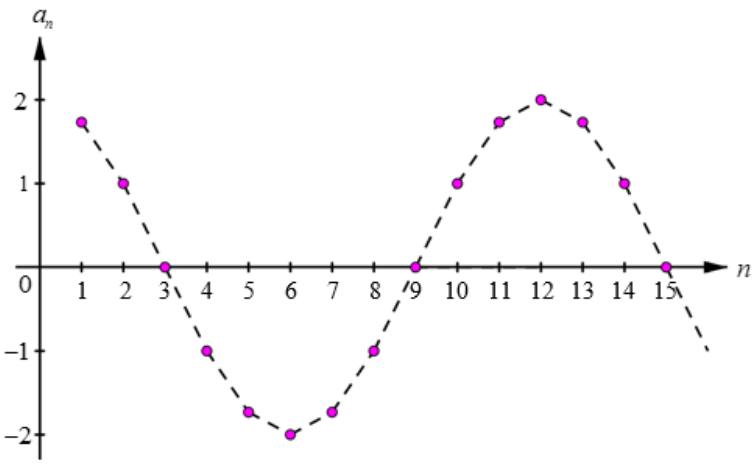
และ $b_{10} = 20000(1.05)^{10-1} \approx 31,027$

นั่นคือ เงินเดือนในปีที่ 10 ของเจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท A เท่ากับ 33,500 บาท และบริษัท B ประมาณ 31,027 บาท

ดังนั้น ผลต่างของเงินเดือนในปีที่ 10 ของเจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของทั้งสองบริษัทประมาณ 33,500 – 31,027 = 2,473 บาท

20. 1) จาก $a_n = 2\cos\frac{n\pi}{6}$

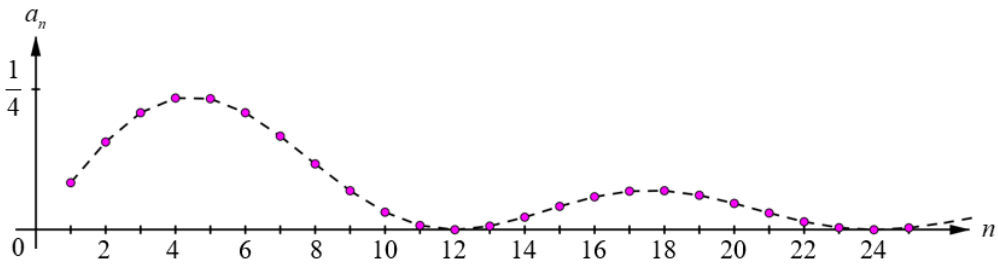
เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า แต่ละพจน์ของลำดับ a_n คือ จำนวนจริงซึ่งอยู่ในช่วง $[-2, 2]$ นั่นคือ เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด a_n ไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่ออก

2) จาก $a_n = \frac{1}{n}\sin^2\left(\frac{n\pi}{12}\right)$

เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



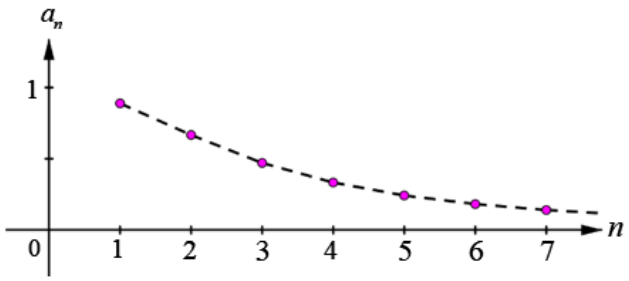
จากกราฟ จะเห็นว่า แนวของจุดในกราฟจะเข้าใกล้ 0

ซึ่งหมายความว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด a_n จะเข้าใกล้ 0 แต่ไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับเท่ากับ 0

3) จาก $a_n = \dfrac{8}{n^2+8}$

เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



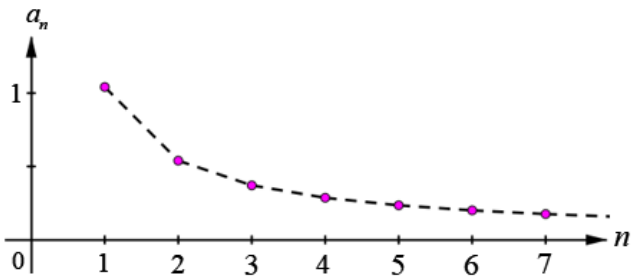
จากกราฟ จะเห็นว่า แนวของจุดในกราฟจะเข้าใกล้ 0

ซึ่งหมายความว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด a_n จะเข้าใกล้ 0 แต่ไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับเท่ากับ 0

4) จาก $a_n = \dfrac{\log(n+10)}{n}$

เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



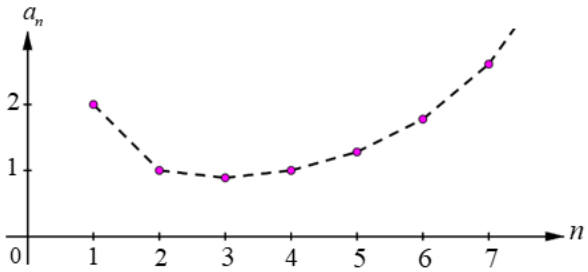
จากกราฟ จะเห็นว่า แนวของจุดในกราฟจะเข้าใกล้ 0

ซึ่งหมายความว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด a_n จะเข้าใกล้ 0 แต่ไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับเท่ากับ 0

5) จาก $a_n = \dfrac{2^n}{n^2}$

เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้

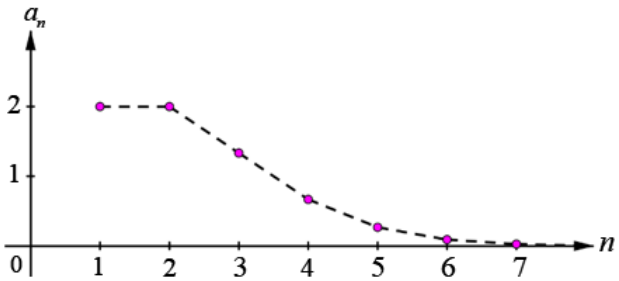


จากกราฟ จะเห็นว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด a_n มีค่าเพิ่มขึ้นและไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่ออก

6) จาก $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า แนวของจุดในกราฟจะเข้าใกล้ 0

ซึ่งหมายความว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด a_n จะเข้าใกล้ 0 แต่ไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับเท่ากับ 0

21. 1) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n^2+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{0}{2+0}$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n^2+1}\right)=0$

นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ 0

2) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{7^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{7}\right)^n$

และ $\left|\dfrac{2}{7}\right|<1$ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{7}\right)^n=0$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{7^n}=0$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ 0

3) เนื่องจาก $(-1)^{4n+3}=(-1)^{4n}(-1)^3=\left((-1)^4\right)^n(-1)=1^n(-1)=1(-1)=-1$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{4n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)=-1$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับคือ 0

4) พิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n}\right)$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

เนื่องจาก $\left|\dfrac{2}{5}\right|<1$ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$

นั่นคือ $\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n = \dfrac{1}{3}(0) = 0$

จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า ลำดับ a_n เป็นลำดับลู่ออก

5) จาก $a_n = 2+\dfrac{n}{3} = \dfrac{6+n}{3}$

พิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\frac{6+n}{3}}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{6+n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(\frac{3}{n}\right)}{n\left(\frac{6}{n}+\frac{n}{n}\right)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3}{n}}{\frac{6}{n}+1}\right)$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6}{n}+1\right)}$$

$$= \frac{3\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6}{n}\right)+\lim\limits_{n\to\infty}1}$$

$$= \frac{3\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}{6\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)+\lim\limits_{n\to\infty}1}$$

$$= \frac{3(0)}{6(0)+1}$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$= 0$$

จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า ลำดับ a_n เป็นลำดับลู่ออก

6) เนื่องจาก $\frac{3n^2(n-2)!}{n!} = \frac{3n^2(n-2)!}{n(n-1)(n-2)!} = \frac{3n}{n-1}$

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2(n-2)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{n-1}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{1-\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}3}{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{3}{1-0}$$

$$= 3$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2(n-2)!}{n!}=3$

นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับนี้ คือ 3

7) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ และ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}=3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=3(0)=0$

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}$

$$= \frac{1}{2}+0$$

$$= \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับนี้ คือ $\frac{1}{2}$

8) เนื่องจาก $\dfrac{(n+1)^2-(n-1)^2}{2n}=\dfrac{(n^2+2n+1)-(n^2-2n+1)}{2n}=\dfrac{4n}{2n}=2$

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2-(n-1)^2}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}2=2 \;=\; \lim\limits_{n\to\infty}2$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับนี้ คือ 2

9) เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n-1)^2+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2-2n+2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}\\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}\\
&= \frac{1+0+0}{1-0+0}\\
&= 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{(n-1)^2+1}=1$

นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับนี้ คือ 1

10) จาก $a_n = \dfrac{3^{n-3}}{2^{n+3}} = \dfrac{\left(3^n\right)}{27\cdot 8\left(2^n\right)} = \dfrac{1}{27\cdot 8}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

พิจารณา
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{27\cdot 8}\left(\frac{3}{2}\right)^n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{27\cdot 8}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}\right)$$
$$= (27\cdot 8)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}\right)$$
$$= (27\cdot 8)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

เนื่องจาก $\left|\dfrac{2}{3}\right| < 1$ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$

นั่นคือ $(27\cdot 8)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = (27\cdot 8)(0) = 0$

จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า ลำดับ a_n เป็นลำดับลู่ออก

11) จาก $a_n = \dfrac{4^{n+1}+2^{3n+2}}{3^{2n}} = \dfrac{4\left(4^n\right)}{9^n} + \dfrac{4\left(8^n\right)}{9^n} = 4\left(\dfrac{4}{9}\right)^n + 4\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$

พิจารณา
$$\lim_{n\to\infty}\left(4\left(\frac{4}{9}\right)^n + 4\left(\frac{8}{9}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}4\left(\frac{4}{9}\right)^n + \lim_{n\to\infty}4\left(\frac{8}{9}\right)^n$$
$$= 4\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n + 4\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n$$

เนื่องจาก $\left|\frac{4}{9}\right|<1$ และ $\left|\frac{8}{9}\right|<1$ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n=0$ และ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n=0$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4\left(\frac{4}{9}\right)^n+4\left(\frac{8}{9}\right)^n\right)=4(0)+4(0)=0$

นั่นคือ ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับ คือ 0

12) จาก $a_n=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}+1}=\dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{3}}+1}$

และ
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{\frac{1}{3}}+1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(n^{-\frac{1}{6}}+n^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\\
&= 0+0\\
&= 0
\end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า ลำดับ a_n เป็นลำดับลู่ออก

13) เนื่องจาก
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+8}{8n^3+n-8} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{8}{n^3}\right)}{n^3\left(8+\frac{1}{n^2}-\frac{8}{n^3}\right)}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{8}{n^3}}{8+\frac{1}{n^2}-\frac{8}{n^3}}$$
$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}8+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}}$$
$$= \frac{1+0}{8+0-0}$$
$$= \frac{1}{8}$$

จะได้
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^3+8}{8n^3+n-8}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+8}{8n^3+n-8}}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{8}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}$$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับ คือ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

14) จาก
$$\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{2n} = \frac{\left(n^3+3n^2+3n+1\right)-\left(n^3-3n^2+3n-1\right)}{2n} = \frac{3n^2+1}{n}$$

จะได้
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{3n^2+1}{n}}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n^2+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\left(\frac{n}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{3n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}\right)$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{0}{3+0}$$

$$= 0$$

จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า ลำดับ a_n เป็นลำดับลู่ออก

15) จาก $n-\frac{n^2+3}{n-7}=\frac{n(n-7)-(n^2+3)}{n-7}=\frac{-7n-3}{n-7}$

จะได้ $\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{n^2+3}{n-7}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-7n-3}{n-7}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(-\frac{7n}{n}-\frac{3}{n}\right)}{n\left(\frac{n}{n}-\frac{7}{n}\right)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-7-\frac{3}{n}}{1-\frac{7}{n}}\right)$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(-7-\frac{3}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{7}{n}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(-7) - \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}1 - \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(-7) - 3\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}1 - 7\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{-7-3(0)}{1-7(0)}$$

$$= -7$$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับ คือ -7

16) จาก $\frac{n+1}{2}+\frac{n-3n^2}{6n-5}=\frac{(n+1)(6n-5)+2(n-3n^2)}{2(6n-5)}=\frac{3n-5}{12n-10}$

จะได้ $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2}+\frac{n-3n^2}{6n-5}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5}{12n-10}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(\frac{3n}{n}-\frac{5}{n}\right)}{n\left(\frac{12n}{n}-\frac{10}{n}\right)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-\frac{5}{n}}{12-\frac{10}{n}}\right)$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(12-\frac{10}{n}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}3 - \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}12 - \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{10}{n}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 - 5\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} 12 - 10\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{3-5(0)}{12-10(0)}$$

$$= \frac{1}{4}$$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับ คือ $\frac{1}{4}$

22. วิธีการหาลิมิตของลำดับ a_n ที่กำหนดให้ ซึ่งเป็นการใช้ทฤษฎีบท 3 ข้อ 6) นั้น ไม่ถูกต้อง

เนื่องจาก การหาลิมิตโดยใช้ความรู้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ จะใช้ได้เมื่อ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ หาค่าได้ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

แต่ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n^4 - n^2\right)$ และ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n^4 + 13\right)$ ไม่มีค่า จึงไม่สามารถใช้วิธีดังกล่าวได้

23. ให้ x เป็นจำนวนเต็ม

สมมติให้ลำดับ a_n เป็นลำดับลู่เข้า โดยที่ $a_n = \left(\frac{2x^2+1}{x^2+5}\right)^n$

จะได้ว่า ลำดับ a_n เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{2x^2+1}{x^2+5}$ และ $r = \frac{2x^2+1}{x^2+5}$

จากลำดับ a_n เป็นลำดับลู่เข้า จะได้ว่า $|r| = \left|\frac{2x^2+1}{x^2+5}\right| < 1$

ดังนั้น $\quad -1 < \frac{2x^2+1}{x^2+5} < 1 \quad$ ----- (1)

จาก x เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า $x^2 \geq 0$

ดังนั้น $x^2 + 5 > 0$

จาก (1) จะได้ว่า $\quad -x^2 - 5 < 2x^2 + 1 < x^2 + 5$

พิจารณา $-x^2 - 5 < 2x^2 + 1$

จะได้ว่า $-2 < x^2$ ซึ่งเป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็ม x

พิจารณา $2x^2 + 1 < x^2 + 5$

จะได้ว่า $x^2 < 4$

ดังนั้น $-2 < x < 2$

จะได้ว่า จำนวนเต็ม x ที่สอดคล้องกับ $-2 < x < 2$ คือ $-1, 0$ และ 1

ดังนั้น จำนวนเต็ม x ทั้งหมดที่ทำให้ a_n เป็นลำดับลู่เข้า คือ $x = -1,\ x = 0$ และ $x = 1$

24. จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = 19,\ d = 4$ และ $a_n = 999$

จะได้ $999 = 19 + (n-1)(4)$

$999 = 19 + 4n - 4$

$n = 246$

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

จะได้ $S_{246} = \frac{246}{2}(19 + 999) = 125{,}214$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 125,214

25. 1) อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = 2$ และ $d = 4$

จาก $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

จะได้ $S_{40} = \frac{40}{2}(2(2) + (40-1)(4)) = 3{,}200$

ดังนั้น ผลบวก 40 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 3,200

2) อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = 20$ และ $d = -3$

จาก $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

จะได้ $S_{70} = \frac{70}{2}(2(20) + (70-1)(-3)) = -5{,}845$

ดังนั้น ผลบวก 70 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ $-5{,}845$

3) อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = -\frac{1}{3}$ และ $d = \frac{2}{3}$

จาก $S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$

จะได้ $S_{100} = \frac{100}{2}\left(2\left(-\frac{1}{3}\right) + (100-1)\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{9,800}{3}$

ดังนั้น ผลบวก 100 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ $\frac{9,800}{3}$

26. จำนวนเต็มตั้งแต่ 9 ถึง 357 ที่น้อยที่สุดที่หารด้วย 7 ลงตัว คือ $14 = 7(2)$

และจำนวนเต็มตั้งแต่ 9 ถึง 357 ที่มากที่สุดที่หารด้วย 7 ลงตัว คือ $357 = 7(51)$

จะได้ว่า ลำดับของจำนวนเต็มตั้งแต่ 9 ถึง 357 ที่หารด้วย 7 ลงตัว คือ 14, 21, 28, …, 357

ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 14 ผลต่างร่วมเป็น 7 และพจน์ที่ n เป็น 357

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ว่า $357 = 14 + (n-1)(7)$

นั่นคือ $n = 50$

จากผลบวกของจำนวนเต็มตั้งแต่ 9 ถึง 357 ที่หารด้วย 7 ลงตัว คือ $14 + 21 + 28 + \cdots + 357$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
14 + 21 + 28 + \cdots + 357 &= 14 + 21 + 28 + \cdots + \left(14 + (50-1)(7)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{50}\left(14 + (i-1)(7)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{50}(7i + 7) \\
&= \sum_{i=1}^{50}(7i) + \sum_{i=1}^{50}7 \\
&= 7\sum_{i=1}^{50}i + \sum_{i=1}^{50}7 \\
&= 7\left(\frac{50(50+1)}{2}\right) + 50(7) \\
&= 9,275
\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนที่ 7 หารลงตัว ตั้งแต่ 9 ถึง 357 คือ 9,275

27. ให้ $a_4 = 11$ และ $a_9 = -4$

จะได้ $11 = a_1 + (4-1)d$

นั่นคือ $11 = a_1 + 3d$ ----- (1)

และ $-4 = a_1 + (9-1)d$

นั่นคือ $-4 = a_1 + 8d$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = -3$ และ $a_1 = 20$

พิจารณาผลบวกของพจน์ที่ 12 ถึงพจน์ที่ 25 คือ

$$a_{12} + a_{13} + a_{14} + \cdots + a_{25} = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{11}) = S_{25} - S_{11}$$

จาก $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

จะได้ $S_{25} = \frac{25}{2}(2(20) + (25-1)(-3)) = -400$

และ $S_{11} = \frac{11}{2}(2(20) + (11-1)(-3)) = 55$

นั่นคือ $S_{25} - S_{11} = -400 - 55 = -455$

ดังนั้น ผลบวกของพจน์ที่ 12 ถึงพจน์ที่ 25 ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ -455

28. โรงละครแห่งหนึ่งจัดเก้าอี้แถวแรกไว้ 12 ตัว แถวที่สอง 14 ตัว แถวที่สาม 16 ตัว เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ นั่นคือ จำนวนเก้าอี้ในแถวที่ 1, 2, 3, … เท่ากับ 12, 14, 16, … ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรก คือ 12 และอัตราส่วนร่วม คือ 2

1) ต้องการจัดเก้าอี้ไว้ทั้งหมด 20 แถว

พิจารณาผลบวกของจำนวนเก้าอี้ตั้งแต่แถวที่ 1 ถึงแถวที่ 20 คือ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20} = S_{20}$

จาก $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

จะได้ $S_{20} = \frac{20}{2}(2(12) + (20-1)(2)) = 620$

ดังนั้น ถ้าต้องการจัดเก้าอี้ไว้ทั้งหมด 20 แถว จะต้องใช้เก้าอี้ทั้งหมด 620 ตัว

2) จากข้อ 1) ถ้าจัดเก้าอี้ 20 แถว จะมีเก้าอี้ทั้งหมด 620 ตัว แต่ต้องการจัดเก้าอี้เพียง 600 ตัว ดังนั้น จะพิจารณาว่า ถ้ามีเก้าอี้ 19 แถว จะมีเก้าอี้ทั้งหมดกี่ตัว

นั่นคือ ต้องหาค่าของ S_{19}

จาก $S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$

จะได้ $S_{19} = \frac{19}{2}\left(2(12) + (19-1)(2)\right) = 570$

จะเห็นว่าเมื่อจัดเก้าอี้ตามเงื่อนไขที่กำหนดจำนวน 19 แถว จะมีเก้าอี้ทั้งหมด 570 ตัว จึงต้องจัดเก้าอี้เพิ่มเป็นแถวที่ 20 อีก 30 ตัว จึงจะได้เก้าอี้ทั้งหมด 600 ตัว

ดังนั้น จะต้องจัดเก้าอี้ทั้งหมด 20 แถว และในแถวสุดท้าย (แถวที่ 20) จะมีเก้าอี้ 30 ตัว

29. 1) ระยะห่างระหว่างตะกร้ากับชามใบที่ 1 เท่ากับ 5 เมตร

2) ระยะห่างระหว่างตะกร้ากับชามใบที่ 2 เท่ากับ $5+3=8$ เมตร

3) ระยะห่างระหว่างตะกร้ากับชามใบที่ 3 เท่ากับ $5+3+3=11$ เมตร

4) จากข้อ 1), 2) และ 3) จะได้ว่า ระยะห่างระหว่างตะกร้ากับชามใบที่ 1, 2, 3, … คือ 5, 8, 11, … ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มี $a_1 = 5$ และ $d = 3$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $a_n = 5 + (n-1)(3)$

$= 5 + 3n - 3$

$= 3n + 2$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างตะกร้ากับชามใบที่ n เท่ากับ $3n+2$ เมตร

5) ให้การแข่งขันนี้มีชาม n ใบ

จากข้อ 4) จะได้ว่า $23 = 3n + 2$

$n = 7$

ดังนั้น จำนวนชามทั้งหมด เท่ากับ 7 ใบ

6) 6.1) จากข้อ 5) และผู้เข้าแข่งขันไม่ทำลูกปิงปองตกเลย จะได้ว่า

การตักลูกบอลลูกที่ 1 ไปยังชามใบที่ 1 ผู้เข้าแข่งขันต้องวิ่งไปและกลับเป็นระยะทาง

$5+5=2(5)=2a_1$ เมตร

การตักลูกบอลลูกที่ 2 ไปยังชามใบที่ 2 ผู้เข้าแข่งขันต้องวิ่งไปและกลับเป็นระยะทาง

$8+8=2(8)=2a_2$ เมตร

การตักลูกบอลลูกที่ 3 ไปยังชามใบที่ 3 ผู้เข้าแข่งขันต้องวิ่งไปและกลับเป็นระยะทาง

$11+11=2(11)=2a_3$ เมตร

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า การตักลูกบอลลูกที่ 7 ไปยังชามใบที่ 7 ผู้เข้าแข่งขันต้องวิ่งไปและกลับเป็นระยะทาง $2a_7$ เมตร

ดังนั้น ระยะทางจากจุดเริ่มต้นจนสิ้นสุดการแข่งขัน เท่ากับ

$2a_1+2a_2+2a_3+\cdots+2a_7=2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7)=2S_7$ เมตร

จาก $S_n = \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$

จะได้ $S_7 = \frac{7}{2}(2(5)+(7-1)(3)) = 98$

ดังนั้น ถ้าผู้เข้าแข่งขันไม่ทำลูกปิงปองตกเลย จะได้ ระยะทางจากจุดเริ่มต้นจนสิ้นสุดการแข่งขัน คือ $2\times 98=196$ เมตร

6.2) จากผู้เข้าแข่งขันทำลูกปิงปองตกระหว่างที่นำลูกปิงปองไปใส่ในชามใบที่ 4 โดยทำตกห่างจากตะกร้า 3 เมตร

จะได้ว่า ผู้เข้าแข่งขันต้องวิ่งกลับไปยังจุดเริ่มต้นเป็นระยะทาง 3 เมตร เพื่อตักลูกปิงปองลูกใหม่

ดังนั้น ผู้เข้าแข่งขันจะต้องวิ่งเป็นระยะทางที่เพิ่มขึ้น $3+3=6$ เมตร

จากข้อ 6.1) จะได้ว่า ผู้เข้าแข่งขันจะต้องวิ่งเป็นระยะทางทั้งหมด 196 + 6 = 202 เมตร

ดังนั้น ถ้าผู้เข้าแข่งขันทำลูกปิงปองตกระหว่างที่นำลูกปิงปองไปใส่ในชามใบที่ 4 โดยทำตกห่างจากตะกร้า 3 เมตร จะได้ระยะทางจากจุดเริ่มต้นจนสิ้นสุดการแข่งขันคือ 202 เมตร

30. ปริมาตรของอิฐที่ใช้สร้างบันไดขั้นที่ 15 (ขั้นบนสุด) คือ $1\times0.25\times0.35$ ลูกบาศก์เมตร

ปริมาตรของอิฐที่ใช้สร้างบันไดขั้นที่ 14 คือ $1\times0.25\times2(0.35)$ ลูกบาศก์เมตร

ปริมาตรของอิฐที่ใช้สร้างบันไดขั้นที่ 13 คือ $1\times0.25\times3(0.35)$ ลูกบาศก์เมตร

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า ปริมาตรของอิฐที่ใช้สร้างบันไดขั้นที่ 1 คือ

$1\times0.25\times15(0.35)$ ลูกบาศก์เมตร

ดังนั้น ปริมาตรรวมของอิฐที่ใช้สร้างบันไดนี้ เท่ากับ

$(1\times0.25\times0.35)+(1\times0.25\times2(0.35))+(1\times0.25\times3(0.35))+\cdots+(1\times0.25\times15(0.35))$

$=1\times0.25\times0.35(1+2+3+\cdots+15)$ ลูกบาศก์เมตร

เนื่องจาก $1+2+3+\cdots+15=\sum_{i=1}^{15} i=\frac{15}{2}(1+15)=120$

จะได้ ปริมาตรรวมของอิฐที่ใช้สร้างบันไดนี้ เท่ากับ

$1\times0.25\times0.35(1+2+3+\cdots+15)=1\times0.25\times0.35(120)=10.5$ ลูกบาศก์เมตร

31. อนุกรมเลขคณิตที่กำหนดให้มี $a_1=6, r=3$ และ $a_n=1,458$

จาก $a_n=a_1r^{n-1}$

จะได้
$$\begin{aligned} 1,458 &= 6(3)^{n-1} \\ 243 &= (3)^{n-1} \\ 3^5 &= (3)^{n-1} \end{aligned}$$

นั่นคือ
$$\begin{aligned} n-1 &= 5 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

แทน n ด้วย 6 ใน $S_n=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

จะได้ $S_6 = \frac{6(3^6-1)}{3-1} = 2,184$

ดังนั้น $6+18+54+\cdots+1,458=2,184$

31. จากอนุกรมเรขาคณิต $6+18+54+\cdots+1,458$

จะได้ $a_1=6, r=3$ และ $a_n=1,458$

จาก $a_n=a_1r^{n-1}$

จะได้
$$\begin{aligned} 1,458 &= 6(3)^{n-1} \\ 243 &= (3)^{n-1} \\ 3^5 &= (3)^{n-1} \end{aligned}$$

นั่นคือ $n-1 = 5$

จะได้ $n = 6$

แทน n ด้วย 6 ใน $S_n=\dfrac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1}$

จะได้ $S_6 = \dfrac{6\left(3^6-1\right)}{3-1} = 2,184$

ดังนั้น $6+18+54+\cdots+1,458=2,184$

32. 1) จากลำดับเรขาคณิต $1,4,16,64,\ldots$

จะได้ $a_1=1$ และ $r=4$

แทน n ด้วย 30 ใน $S_n=\dfrac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1}$

จะได้ $S_{30} = \dfrac{1\left(4^{30}-1\right)}{4-1} = \dfrac{1}{3}\left(4^{30}-1\right)$

2) จากลำดับเรขาคณิต $-\dfrac{3}{32},\dfrac{3}{16},-\dfrac{3}{8},\dfrac{3}{4},\ldots$

จะได้ $a_1=-\dfrac{3}{32}$ และ $r=-2$

แทน n ด้วย 43 ใน $S_n=\dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ $S_{43} = \dfrac{-\frac{3}{32}\left(1-(-2)^{43}\right)}{1-(-2)} = \dfrac{(-2)^{43}-1}{32}$

3) จากลำดับเรขาคณิต $\frac{27}{32}, \frac{9}{16}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \ldots$

จะได้ $a_1 = \frac{27}{32}$ และ $r = \frac{2}{3}$

แทน n ด้วย 28 ใน $S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ $$S_{28} = \frac{\frac{27}{32}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{28}\right)}{1-\frac{2}{3}} = \frac{81}{32}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{28}\right)$$

33. ให้ $a_5 = -4$ และ $a_8 = \frac{1}{2}$

จะได้ $-4 = a_1 r^{5-1}$

นั่นคือ $-4 = a_1 r^4$ ----- (1)

และ $\frac{1}{2} = a_1 r^{8-1}$

นั่นคือ $\frac{1}{2} = a_1 r^7$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $r = -\frac{1}{2}$ และ $a_1 = -64$

พิจารณาผลบวกของพจน์ที่ 2 ถึงพจน์ที่ 9 คือ

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = \left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9\right) - a_1 = S_9 - a_1$$

จาก $$S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

จะได้ $$S_9 = \frac{-64\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^9\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{171}{4}$$

จะได้ $$S_9 - a_1 = -\frac{171}{4} - (-64) = \frac{85}{4}$$

ดังนั้น ผลบวกของพจน์ที่ 2 ถึงพจน์ที่ 9 คือ $\frac{85}{4}$

34. วิทยามีเงิน 6,561 บาท

เขาไปเที่ยวและใช้เงินทุกวัน โดยที่แต่ละวันใช้เงิน $\frac{1}{3}$ ของเงินที่เหลือจากวันก่อนหน้า จะได้ว่า

วันที่ 1 วิทยาใช้เงินไป $\frac{1}{3}(6,561)$ บาท

นั่นคือ เมื่อครบ 1 วัน วิทยาเหลือเงินอยู่ $6,561-\frac{1}{3}(6,561)=\frac{2}{3}(6,561)$ บาท

วันที่ 2 วิทยาใช้เงินไป $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}(6,561)\right)$ บาท

นั่นคือ เมื่อครบ 2 วัน วิทยาเหลือเงินอยู่ $\frac{2}{3}(6,561)-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}(6,561)\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2(6,561)$ บาท

วันที่ 3 วิทยาใช้เงินไป $\frac{1}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2(6,561)\right)$ บาท

นั่นคือ เมื่อครบ 3 วัน วิทยาเหลือเงินอยู่ $\left(\frac{2}{3}\right)^2(6,561)-\frac{1}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2(6,561)\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3(6,561)$ บาท

ในทำนองเดียวกัน วันที่ n วิทยาใช้เงินไป $\frac{1}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(6,561)\right)$ บาท

นั่นคือ เมื่อครบ n วัน วิทยาเหลือเงินอยู่ $\left(\frac{2}{3}\right)^n(6,561)$ บาท

ดังนั้น เมื่อครบ 8 วัน วิทยาจะมีเงินเหลือ $\left(\frac{2}{3}\right)^8(6,561)=256$ บาท

35. 1) การแข่งขันรอบที่ 1 มีผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด 32 คน จะมีการแข่งขัน 16 คู่

การแข่งขันรอบที่ 2 มีผู้เข้าแข่งขัน คือ ผู้ชนะจากรอบที่ 1 ซึ่งมี 16 คน

จะมีการแข่งขัน $8=\frac{1}{2}(16)$ คู่

การแข่งขันรอบที่ 3 มีผู้เข้าแข่งขัน คือ ผู้ชนะจากรอบที่ 2 ซึ่งมี 8 คน

จะมีการแข่งขัน $4=\left(\frac{1}{2}\right)^2(16)$ คู่

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า การแข่งขันรอบที่ n จะมีการแข่งขัน $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(16)$ คู่

ดังนั้น ในรอบที่ n มีผู้เข้าแข่งขัน $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(16)$ คู่

2) เนื่องจากรอบสุดท้ายที่จะได้ผู้ชนะ จะมีการแข่งขันเพียง 1 คู่

นั่นคือ หา n ที่ทำให้ $a_n = 1$

จะได้ว่า
$$1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(16)$$
$$\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$4 = n-1$$
นั่นคือ $n = 5$

ดังนั้น รายการลูกทุ่งเสียงทองมีการแข่งขันทั้งหมด 5 รอบ

3) จาก 1) และ 2) จะได้ว่า รายการลูกทุ่งเสียงทองมีการแข่งขันทั้งหมด 5 รอบ

โดยรอบที่ 1, 2, 3 และ 5 มีการแข่งขัน 16, 8, 4 และ 1 คู่ ตามลำดับ

พิจารณาการแข่งขันรอบที่ 4 จะได้ว่า มีการแข่งขัน $\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1}(16) = 2$ คู่

ดังนั้น รายการลูกทุ่งเสียงทองมีการแข่งขันทั้งหมด 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31 คู่

36. คอนโดมิเนียมแห่งหนึ่งได้ประมาณจำนวนแมลงสาบที่มีอยู่ขณะเริ่มต้นโครงการไว้ 6,000 ตัว หลังจากวางยากำจัดแมลงสาบในจุดต่าง ๆ พบว่า อัตราการลดลงของจำนวนแมลงสาบเท่ากับ 17% ต่อวัน

นั่นคือ จำนวนแมลงสาบลดลงวันละ 17% ของจำนวนแมลงสาบที่เหลืออยู่ในวันก่อนหน้า

ถ้าไม่มีแมลงสาบเพิ่มขึ้นในระยะเวลา 7 วัน จะได้ว่า

จำนวนแมลงสาบที่ถูกกำจัดในวันที่ 1 ที่ดำเนินโครงการ เท่ากับ $\frac{17}{100}(6,000)$ ตัว

ทำให้เหลือจำนวนแมลงสาบอยู่ $6,000 - \frac{17}{100}(6,000) = \frac{83}{100}(6,000)$ ตัว

จำนวนแมลงสาบที่ถูกกำจัดในวันที่ 2 ที่ดำเนินโครงการ เท่ากับ $\frac{17}{100}\left(\frac{83}{100}(6,000)\right)$ ตัว

ทำให้เหลือจำนวนแมลงสาบอยู่ $\frac{83}{100}(6,000) - \frac{17}{100}\left(\frac{83}{100}(6,000)\right) = \left(\frac{83}{100}\right)^2(6,000)$ ตัว

จำนวนแมลงสาบที่ถูกกำจัดในวันที่ 3 ที่ดำเนินโครงการ เท่ากับ $\frac{17}{100}\left(\left(\frac{83}{100}\right)^2(6,000)\right)$ ตัว

ทำให้เหลือจำนวนแมลงสาบอยู่ $\left(\frac{83}{100}\right)^2(6,000)-\frac{17}{100}\left(\left(\frac{83}{100}\right)^2(6,000)\right)=\left(\frac{83}{100}\right)^3(6,000)$ ตัว

ในทำนองเดียวกัน จำนวนแมลงสาบที่ถูกกำจัดในวันที่ n ที่ดำเนินโครงการ เท่ากับ

$\frac{17}{100}\left(\left(\frac{83}{100}\right)^{n-1}(6,000)\right)$ ตัว ทำให้เหลือจำนวนแมลงสาบอยู่ $\left(\frac{83}{100}\right)^n(6,000)$ ตัว

1) เนื่องจาก จำนวนแมลงสาบที่ถูกกำจัดในวันที่เริ่มต้นโครงการ คือ จำนวนแมลงสาบที่ถูกกำจัดในวันที่ 1 ที่ดำเนินโครงการ ซึ่งเท่ากับ $\frac{17}{100}(6,000)=1,020$ ตัว
ดังนั้น จำนวนแมลงสาบที่ถูกกำจัดในวันที่เริ่มต้นโครงการ เท่ากับ 1,020 ตัว

2) เนื่องจาก จำนวนแมลงสาบขณะเริ่มต้นโครงการ เท่ากับ 6,000 ตัว
และจำนวนแมลงสาบที่ถูกกำจัดในวันที่ 1 ที่ดำเนินโครงการ เท่ากับ 1,020 ตัว
ดังนั้น จำนวนแมลงสาบที่เหลืออยู่หลังจากดำเนินโครงการไปแล้ว 1 วัน เท่ากับ
6,000 – 1,020 = 4,980 ตัว

3) เนื่องจาก จำนวนแมลงสาบที่ถูกกำจัดในวันที่ 1, 2, 3, …, n ที่ดำเนินโครงการ เท่ากับ

$$\frac{17}{100}(6,000),\ \frac{17}{100}\left(\frac{83}{100}(6,000)\right),\ \frac{17}{100}\left(\left(\frac{83}{100}\right)^2(6,000)\right),\ \ldots,\ \frac{17}{100}\left(\left(\frac{83}{100}\right)^{n-1}(6,000)\right)$$

ซึ่งเป็นลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรก คือ $\frac{17}{100}(6,000)$ ผลต่างร่วม คือ $\frac{83}{100}$ และ

พจน์ทั่วไป คือ $\frac{17}{100}\left(\left(\frac{83}{100}\right)^{n-1}(6,000)\right)$

และจำนวนแมลงสาบทั้งหมดที่ถูกกำจัดหลังจากดำเนินโครงการไปแล้ว 7 วัน คือ ผลรวมของจำนวนแมลงสาบที่ถูกกำจัดในวันที่ 1, 2, 3, …, 7 ที่ดำเนินโครงการ ซึ่งเท่ากับ

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=S_7$$

จาก $S_n=\frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ $S_7 = \dfrac{6,000\left(\frac{17}{100}\right)\left(1-\left(\frac{83}{100}\right)^7\right)}{1-\frac{83}{100}} \approx 4,372$ ตัว

ดังนั้น จำนวนแมลงสาบทั้งหมดที่ถูกกำจัดหลังจากดำเนินโครงการไปแล้ว 7 วัน มีประมาณ 4,372 ตัว

4) เนื่องจาก จำนวนแมลงสาบขณะเริ่มต้นโครงการ เท่ากับ 6,000 ตัว และจำนวนแมลงสาบทั้งหมดที่ถูกกำจัดหลังจากดำเนินโครงการไปแล้ว 7 วัน ประมาณ 4,372 ตัว

ดังนั้น จำนวนแมลงสาบที่เหลืออยู่หลังจากดำเนินโครงการไปแล้ว 7 วัน ประมาณ 6,000 – 4,372 = 1,628 ตัว

37. จาก จำนวนวันในการปฏิบัติภารกิจ 25 วัน จะได้ว่า

แบบที่ 1 เศรษฐีจะจ่ายค่าตอบแทนทั้งหมด $25\times 50,000 = 1,250,000$ บาท

แบบที่ 2 เศรษฐีจะจ่ายค่าตอบแทน ในวันที่ 1, 2, 3, … เป็นเงิน 5, 10, 20, … สตางค์ ซึ่งเป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = 5$ และ $r = 2$

จะได้ว่า เศรษฐีจะจ่ายค่าตอบแทนรวมในแบบที่ 2 เท่ากับ S_{25}

จาก $S_n = \dfrac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r-1}$

จะได้ $S_{25} = \dfrac{5\left(2^{25}-1\right)}{2-1} = 167,772,155$

นั่นคือ เศรษฐีจะจ่ายค่าตอบแทนรวมในแบบที่ 2 เท่ากับ 167,772,155 สตางค์ หรือ 1,677,721.55 บาท

1) เนื่องจาก เศรษฐีจะต้องจ่ายค่าตอบแทนรวมในแบบที่ 1 เท่ากับ 1,250,000 บาท และ เศรษฐีจะต้องจ่ายค่าตอบแทนรวมในแบบที่ 2 เท่ากับ 1,677,721.55 บาท

ดังนั้น เศรษฐีควรเลือกจ่ายค่าตอบแทนแบบที่ 1 จึงจะประหยัดเงินที่สุด

2) ถ้าใช้เวลาปฏิบัติภารกิจ 30 วัน

แบบที่ 1 จะเสียค่าตอบแทน $30 \times 50,000 = 1,500,000$ บาท

แบบที่ 2 จะเสียค่าตอบแทน $S_{30} = \dfrac{5\left(1-2^{30}\right)}{1-2}$ หรือเท่ากับ

5,368,709,115 สตางค์ หรือ 53,687,091.15 บาท

ดังนั้น ถ้าเลือกจ่ายค่าตอบแทนแบบที่ 1 จะประหยัดเงินกว่าการจ่ายค่าตอบแทนแบบที่ 2 เป็นจำนวนเงิน 52,187,091.15 บาท

3) การจ่ายค่าตอบแทนแบบที่เลือกในข้อ 1) อาจไม่ประหยัดกว่าอีกแบบ เช่น เมื่อจำนวนวันในการปฏิบัติภารกิจเป็น 24 วัน จะได้ว่า

แบบที่ 1 จะเสียค่าตอบแทน $24 \times 50,000 = 1,200,000$ บาท

แบบที่ 2 จะเสียค่าตอบแทน $S_{24} = \dfrac{5\left(1-2^{24}\right)}{1-2}$ หรือเท่ากับ

83,886,075 สตางค์ หรือ 838,860.75 บาท

จะเห็นว่าการจ่ายค่าตอบแทนแบบที่ 2 ประหยัดกว่าการจ่ายค่าตอบแทนแบบที่ 1

38. 1) กรณีที่อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเลขคณิต จะต้องได้ว่า $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

เนื่องจาก $a_2 - a_1 = 8 - 2 = 6$ และ $a_3 - a_2 = 32 - 8 = 24$

จะเห็นว่า $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$

ดังนั้น อนุกรมนี้ไม่เป็นอนุกรมเลขคณิต

กรณีที่อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิต จะต้องได้ว่า $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2}$

เนื่องจาก $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{8}{2} = 4$ และ $\dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{32}{8} = 4$

จะเห็นว่า $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2}$

ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี $a_1 = 2,\ r = 4$ และ $a_n = 8,192$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $8,192 = 2(4)^{n-1}$

$4,096 = 4^{n-1}$

$4^6 = 4^{n-1}$

นั่นคือ $n-1 = 6$

$n = 7$

ดังนั้น 8,192 เป็นพจน์ที่ 7 ของอนุกรมนี้

จาก $S_n = \dfrac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1}$

จะได้ $S_7 = \dfrac{2\left(4^7-1\right)}{4-1} = 10{,}922$

ดังนั้น $2+8+32+\cdots+8{,}192$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีผลบวกของอนุกรม เท่ากับ 10,922

2) กรณีที่อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเลขคณิต จะต้องได้ว่า $a_2-a_1=a_3-a_2$

เนื่องจาก $a_2-a_1=14-7=7$ และ $a_3-a_2=21-14=7$

จะเห็นว่า $a_2-a_1=a_3-a_2$

ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเลขคณิต ที่มี $a_1=7,\ d=7$ และ $a_n=98$

จาก $a_n = a_1+(n-1)d$

จะได้ $98 = 7+(n-1)(7)$

$98 = 7n$

$n = 14$

ดังนั้น 98 เป็นพจน์ที่ 14 ของอนุกรมนี้

จาก $S_n = \dfrac{n}{2}(a_1+a_n)$

จะได้ $S_{14} = \dfrac{14}{2}(7+98) = 735$

ดังนั้น $7+14+21+\cdots+98$ เป็นอนุกรมเลขคณิตที่มีผลบวกของอนุกรม เท่ากับ 735

กรณีที่อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิต จะต้องได้ว่า $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}$

เนื่องจาก $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{14}{7}=2$ และ $\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{21}{14}=\dfrac{3}{2}$

จะเห็นว่า $\dfrac{a_2}{a_1}\neq\dfrac{a_3}{a_2}$

ดังนั้น อนุกรมนี้ไม่เป็นอนุกรมเรขาคณิต

3) กรณีที่อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเลขคณิต จะต้องได้ว่า $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

เนื่องจาก $a_2 - a_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ และ $a_3 - a_2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

จะเห็นว่า $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเลขคณิต ที่มี $a_1 = \frac{1}{2}, d = \frac{1}{2}$ และ $a_n = 30$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $30 = \frac{1}{2} + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)$

$30 = \frac{1}{2}n$

$n = 60$

ดังนั้น 30 เป็นพจน์ที่ 60 ของอนุกรมนี้

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

จะได้ $S_{60} = \frac{60}{2}\left(\frac{1}{2} + 30\right) = 915$

ดังนั้น $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \cdots + 30$ เป็นอนุกรมเลขคณิตที่มีผลบวกของอนุกรม เท่ากับ 915

กรณีที่อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิต จะต้องได้ว่า $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$

เนื่องจาก $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ และ $\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2}$

จะเห็นว่า $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2}$

ดังนั้น อนุกรมนี้ไม่เป็นอนุกรมเรขาคณิต

4) กรณีที่อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเลขคณิต จะต้องได้ว่า $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

เนื่องจาก $a_2 - a_1 = 8 - 16 = -8$ และ $a_3 - a_2 = 4 - 8 = -4$

จะเห็นว่า $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$

ดังนั้น อนุกรมนี้ไม่เป็นอนุกรมเลขคณิต

กรณีที่อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิต จะต้องได้ว่า $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}$

เนื่องจาก $\frac{a_2}{a_1}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$ และ $\frac{a_3}{a_2}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

จะเห็นว่า $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}$

ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี $a_1=16,\ r=\frac{1}{2}$ และ $a_n=\frac{1}{32}$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $\frac{1}{32} = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\frac{1}{2^5} = 2^4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{2^5\cdot 2^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{9} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

นั่นคือ $n-1 = 9$

$$n = 10$$

ดังนั้น $\frac{1}{32}$ เป็นพจน์ที่ 10 ของอนุกรมนี้

จาก $S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ $S_{10} = \frac{16\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1,023}{32}$

ดังนั้น $16+8+4+\cdots+\frac{1}{32}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีผลบวกของอนุกรม เท่ากับ $\frac{1,023}{32}$

5) กรณีที่อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเลขคณิต จะต้องได้ว่า $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

เนื่องจาก $a_2 - a_1 = 3-(-1) = 4$ และ $a_3 - a_2 = -9-3 = -12$

จะเห็นว่า $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$

ดังนั้น อนุกรมนี้ไม่เป็นอนุกรมเลขคณิต

กรณีที่อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิต จะต้องได้ว่า $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$

เนื่องจาก $\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{-1} = -3$ และ $\frac{a_3}{a_2} = \frac{-9}{3} = -3$

จะเห็นว่า $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$

ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี $a_1 = -1, r = -3$ และ $a_n = -729$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $-729 = -1(-3)^{n-1}$

$729 = (-3)^{n-1}$

$(-3)^6 = (-3)^{n-1}$

นั่นคือ $n-1 = 6$

$n = 7$

ดังนั้น -729 เป็นพจน์ที่ 7 ของอนุกรมนี้

จาก $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

จะได้ $S_7 = \frac{(-1)(1-(-3)^7)}{1-(-3)} = -547$

ดังนั้น $(-1)+3+(-9)+\cdots+(-729)$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีผลบวกของอนุกรม เท่ากับ -547

6) กรณีที่อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเลขคณิต จะต้องได้ว่า $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

เนื่องจาก $a_2 - a_1 = -6 - (-10) = 4$ และ $a_3 - a_2 = -2 - (-6) = 4$

จะเห็นว่า $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเลขคณิต ที่มี $a_1 = -10, d = 4$ และ $a_n = 90$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $90 = -10 + (n-1)(4)$

$90 = -14 + 4n$

$n = 26$

ดังนั้น 90 เป็นพจน์ที่ 26 ของอนุกรมนี้

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

จะได้ $S_{26} = \frac{26}{2}(-10 + 90) = 1{,}040$

ดังนั้น $-10 - 6 - 2 + \cdots + 90$ เป็นอนุกรมเลขคณิตที่มีผลบวกของอนุกรม เท่ากับ 1,040

กรณีที่อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิต จะต้องได้ว่า $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$

เนื่องจาก $\frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{-10} = \frac{3}{5}$ และ $\frac{a_3}{a_2} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$

จะเห็นว่า $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2}$

ดังนั้น อนุกรมนี้ไม่เป็นอนุกรมเรขาคณิต

39. 1) จากอนุกรม $5 + 3 + \frac{9}{5} + \cdots + 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \cdots$ จะได้

$S_1 = 5$

$S_2 = 5 + 3 = 8$

$S_3 = 5 + 3 + \frac{9}{5} = \frac{49}{5}$

พิจารณาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมนี้ (S_n)

จากอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี $a_1 = 5$ และ $r = \frac{3}{5}$

และผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$

จะได้ว่า $S_n = \dfrac{5\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}{1-\frac{3}{5}} = \dfrac{25}{2}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ $5, 8, \frac{49}{5}, \ldots, \frac{25}{2}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right), \ldots$

2) จากอนุกรม $\frac{9}{25}+\frac{3}{5}+1+\cdots+\frac{9}{25}\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}+\cdots$ จะได้

$S_1 = \frac{9}{25}$

$S_2 = \frac{9}{25}+\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$

$S_3 = \frac{9}{25}+\frac{3}{5}+1 = \frac{49}{25}$

พิจารณาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมนี้ (S_n)

จากอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี $a_1 = \frac{9}{25}$ และ $r = \frac{5}{3}$

และผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ $S_n = \dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ $S_n = \dfrac{\frac{9}{25}\left(\left(\frac{5}{3}\right)^n-1\right)}{\frac{5}{3}-1} = \dfrac{27}{50}\left(\left(\frac{5}{3}\right)^n-1\right)$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ $\frac{9}{25}, \frac{24}{25}, \frac{49}{25}, \ldots, \frac{27}{50}\left(\left(\frac{5}{3}\right)^n-1\right), \ldots$

3) จากอนุกรม $\frac{1}{9}+\left(-\frac{1}{27}\right)+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n+1}}+\cdots$ จะได้

$S_1 = \frac{1}{9}$

$S_2 = \frac{1}{9}+\left(-\frac{1}{27}\right) = \frac{2}{27}$

$S_3 = \frac{1}{9}+\left(-\frac{1}{27}\right)+\frac{1}{81} = \frac{7}{81}$

พิจารณาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมนี้ (S_n)

จากอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี $a_1 = \frac{1}{9}$ และ $r = -\frac{1}{3}$

และผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

จะได้ $$S_n = \frac{\frac{1}{9}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{12}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ $\frac{1}{9}, \frac{2}{27}, \frac{7}{81}, \ldots, \frac{1}{12}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right), \ldots$

4) จากอนุกรม $1+(-1)+(-3)+\cdots+(3-2n)+\cdots$ จะได้

$S_1 = 1$

$S_2 = 1+(-1) = 0$

$S_3 = 1+(-1)+(-3) = -3$

พิจารณาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมนี้ (S_n)

จากอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเลขคณิต ที่มี $a_1 = 1$ และ $d = -2$

และผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต คือ $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

จะได้ $$S_n = \frac{n}{2}(1+(3-2n)) = \frac{n}{2}(4-2n) = 2n-n^2$$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ $1, 0, -3, \ldots, 2n-n^2, \ldots$

5) จากอนุกรม $4+0+(-14)+\cdots+(4+n^2-n^3)+\cdots$ จะได้

$S_1 = 4$

$S_2 = 4+0 = 4$

$S_3 = 4+0+(-14) = -10$

พิจารณาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมนี้

เนื่องจากผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\sum_{i=1}^{n}(4+i^2-i^3)$

จะได้
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n}\left(4+i^2-i^3\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}4+\sum_{i=1}^{n}i^2-\sum_{i=1}^{n}i^3 \\ &= 4n+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\ &= \frac{48n+\left(4n^3+6n^2+2n\right)-\left(3n^4+6n^3+3n^2\right)}{12} \\ &= \frac{-3n^4-2n^3+3n^2+50n}{12} \end{aligned}$$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ $4, 4, -10, \ldots, \frac{-3n^4-2n^3+3n^2+50n}{12}, \ldots$

6) จากอนุกรม $18+1.8+0.18+\cdots+18(0.1)^{n-1}+\cdots$ จะได้

$S_1 = 18$

$S_2 = 18+1.8 = 19.8$

$S_3 = 18+1.8+0.18 = 19.98$

พิจารณาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมนี้ (S_n)

จากอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี $a_1 = 18$ และ $r = 0.1$

และผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ $S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

จะได้ $$S_n = \frac{18\left(1-(0.1)^n\right)}{1-0.1} = 20\left(1-(0.1)^n\right)$$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ $18, 19.8, 19.98, \ldots, 20\left(1-(0.1)^n\right), \ldots$

7) จากอนุกรม $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\cdots$ จะได้

$S_1 = \frac{3}{4}$

$S_2 = \frac{3}{4}+\frac{5}{36} = \frac{8}{9}$

$S_3 = \frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\frac{7}{144} = \frac{15}{16}$

สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} &= \frac{2k+1+\left(k^2-k^2\right)}{k^2(k+1)^2}\\ &= \frac{\left(k^2+2k+1\right)-k^2}{k^2(k+1)^2}\\ &= \frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2}\\ &= \frac{(k+1)^2}{k^2(k+1)^2}-\frac{k^2}{k^2(k+1)^2}\\ &= \frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\end{aligned}$$

นั่นคือ $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\ &= 1-\frac{1}{(n+1)^2}\\ &= \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ $\frac{3}{4},\frac{8}{9},\frac{15}{16},\ldots,\frac{n(n+2)}{(n+1)^2},\ldots$

8) สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ จะได้

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}}-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

จะได้ $S_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{1\cdot\sqrt{2}} = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$S_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{1\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$S_3 = S_2 + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 2} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

สำหรับพจน์ทั่วไปของลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม พิจารณา

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\sqrt{2}-1}{1\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 2}+\cdots+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}} \\ &= \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \\ &= 1-\frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ $1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \ldots, 1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \ldots$

40. 1) $5+3+\frac{9}{5}+\cdots+5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+\cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=5$ และ $r=\frac{3}{5}$

เนื่องจาก $|r|=\frac{3}{5}<1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรม คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{5}{1-\frac{3}{5}} = \frac{25}{2}$

2) $\frac{9}{25}+\frac{3}{5}+1+\cdots+\frac{9}{25}\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}+\cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=\frac{9}{25}$ และ $r=\frac{5}{3}$

เนื่องจาก $|r|=\frac{5}{3}>1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

3) $\frac{1}{9}+\left(-\frac{1}{27}\right)+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n+1}}+\cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=\frac{1}{9}$ และ $r=-\frac{1}{3}$

เนื่องจาก $|r|=\frac{1}{3}<1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรม คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{12}$

4) $1+(-1)+(-3)+\cdots+(3-2n)+\cdots$

เป็นอนุกรมที่มีผลบวกย่อย n พจน์แรกคือ $S_n=2n-n^2$

จากลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมซึ่งคือ $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{2}{n}-1\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n}-1}\\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-1\right)}\\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right)-\lim\limits_{n\to\infty}1}\\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)-\lim\limits_{n\to\infty}1}\\
&= \frac{0}{2(0)-1}\\
&= 0
\end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า ลำดับนี้เป็นลำดับลู่ออก

ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

5) $4+0+(-14)+\cdots+\left(4+n-n^3\right)+\cdots$

เป็นอนุกรมที่มีผลบวกย่อย n พจน์แรกคือ $S_n=\dfrac{-3n^4-2n^3+3n^2+50n}{12}$

จากลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมซึ่งคือ $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{12}{-3n^4-2n^3+3n^2+50n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4\left(\frac{12}{n^4}\right)}{n^4\left(-3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{50}{n^3}\right)}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{12}{n^4}}{-3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{50}{n^3}}\right)\\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{12}{n^4}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{50}{n^3}\right)}\\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{12}{n^4}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}(-3)-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{50}{n^3}\right)}\\
&= \frac{12\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)}{-\lim\limits_{n\to\infty}3-2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)+3\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)+50\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)}\\
&= \frac{12(0)}{-3-2(0)+3(0)+50(0)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า ลำดับนี้เป็นลำดับลู่ออก

ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

6) $18+1.8+0.18+\cdots+18(0.1)^{n-1}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=18$ และ $r=\frac{1}{10}$

เนื่องจาก $|r|=\frac{1}{10}<1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรม คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{18}{1-\frac{1}{10}} = 20$

7) $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\cdots$

เป็นอนุกรมที่มีผลบวกย่อย n พจน์แรกคือ $S_n=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}$

จากลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมซึ่งคือ $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}\right)\\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)}\\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right)}\\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}1+2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}1+2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}\\
&= \frac{1+2(0)+0}{1+2(0)}\\
&= 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรม คือ 1

8) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{1\cdot\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 2}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}+\cdots$

เป็นอนุกรมที่มีผลบวกย่อย n พจน์แรกคือ $S_n=1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=1-\sqrt{\dfrac{1}{n+1}}$

จากลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมซึ่งคือ $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\sqrt{\frac{1}{n+1}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n+1}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}1-\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}1-\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}1-\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}1-\sqrt{\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}}\\
&= \lim_{n\to\infty}1-\sqrt{\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}}\\
&= 1-\sqrt{\frac{0}{1+0}}\\
&= 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรม คือ 1

41. ให้ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์แรก คือ a_1 อัตราส่วนร่วม คือ r และผลบวกของอนุกรมเท่ากับ 1

จะได้ว่า $|r| < 1$ และ $\frac{a_1}{1-r} = 1$

นั่นคือ $a_1 = 1 - r$ ----- (1)

จาก ผลบวกย่อยสองพจน์แรกของอนุกรมนี้คือ $\frac{3}{4}$

จะได้ว่า $a_1 + a_2 = \frac{3}{4}$

นั่นคือ $a_1(1+r) = \frac{3}{4}$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้

$$(1-r)(1+r) = \frac{3}{4}$$

$$1 - r^2 = \frac{3}{4}$$

$$r^2 = \frac{1}{4}$$

ดังนั้น $r = \frac{1}{2}$ หรือ $r = -\frac{1}{2}$

กรณี $r = \frac{1}{2}$ จะได้ $a_1 = \frac{1}{2}$

จาก $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ จะได้ $S_{10} = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1023}{1024}$

กรณี $r = -\frac{1}{2}$ จะได้ $a_1 = \frac{3}{2}$

จาก $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ จะได้ $S_{10} = \frac{\frac{3}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1023}{1024}$

ดังนั้น ผลบวก 10 พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{1023}{1024}$

42. 1) จาก $0.\dot{1}2\dot{3} = 0.123123123\ldots$

$$= 0.123 + 0.000123 + 0.000000123 + \cdots$$

$$= \frac{123}{1,000} + \frac{123}{1,000,000} + \frac{123}{1,000,000,000} + \cdots$$

$$= \frac{123}{10^3} + \frac{123}{10^6} + \frac{123}{10^9} + \cdots$$

จะได้ว่า $\frac{123}{10^3} + \frac{123}{10^6} + \frac{123}{10^9} + \cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{123}{10^3}$ และ $r = \frac{1}{10^3}$

เนื่องจาก $|r| = \frac{1}{10^3} < 1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรม

คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{123}{10^3}}{1-\frac{1}{10^3}} = \frac{41}{333}$

จะได้ว่า $0.\dot{1}2\dot{3} = \frac{41}{333}$

2) จาก $0.11\dot{2} = 0.11222\ldots$

$$= 0.11 + 0.002 + 0.0002 + 0.00002 + \cdots$$

$$= \frac{11}{100} + \frac{2}{1,000} + \frac{2}{10,000} + \frac{2}{100,000} + \cdots$$

จะได้ว่า $\frac{2}{1,000} + \frac{2}{10,000} + \frac{2}{100,000} + \cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{2}{1,000}$ และ $r = \frac{1}{10}$

เนื่องจาก $|r| = \frac{1}{10} < 1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรม

คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{2}{1,000}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{450}$

จะได้ว่า $0.11\dot{2} = \frac{11}{100} + \frac{1}{450} = \frac{101}{900}$

3) จาก $1.\dot{9} = 1.999\ldots$

$$= 1 + 0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1,000} + \cdots$$

จะได้ว่า $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1,000} + \cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{9}{10}$ และ $r = \frac{1}{10}$

เนื่องจาก $|r| = \frac{1}{10} < 1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรม

คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1$

จะได้ว่า $1.\dot{9} = 1+1 = 2$

4) จาก $0.0989898\ldots = 0.098 + 0.00098 + 0.0000098 + \cdots$

$$= \frac{98}{1,000} + \frac{98}{100,000} + \frac{98}{10,000,000} + \cdots$$

จะได้ว่า $\frac{98}{1,000} + \frac{98}{100,000} + \frac{98}{10,000,000} + \cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{98}{1,000}$

และ $r = \frac{1}{100}$

เนื่องจาก $|r| = \frac{1}{100} < 1$ จะได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรม

คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{98}{1,000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{49}{495}$

จะได้ว่า $0.0989898\ldots = \frac{49}{495}$

43. จาก $a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1} + \cdots = \frac{3}{2}$

จะเห็นว่า $a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1} + \cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์แรก คือ a_1 อัตราส่วนร่วม คือ r และมีผลบวกเป็น $\frac{3}{2}$

จะได้ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{3}{2}$

$2a_1 + 3r = 3$ ----- (1)

และจาก $a_1 - a_1r + a_1r^2 - a_1r^3 + \cdots + (-1)^{n-1}a_1r^{n-1} + \cdots = \frac{3}{4}$

จะเห็นว่า $a_1 - a_1r + a_1r^2 - a_1r^3 + \cdots + (-1)^{n-1}a_1r^{n-1} + \cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์แรก คือ a_1 อัตราส่วนร่วม คือ $-r$ และมีผลบวก คือ $\frac{3}{4}$

จะได้ $\dfrac{a_1}{1-(-r)} = \dfrac{3}{4}$

$4a_1 - 3r = 3$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $a_1 = 1$ และ $r = \dfrac{1}{3}$

44. เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งมีด้านยาวด้านละ 10 นิ้ว

จะได้ ครึ่งหนึ่งของด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ายาว $\frac{1}{2}(10)$ นิ้ว

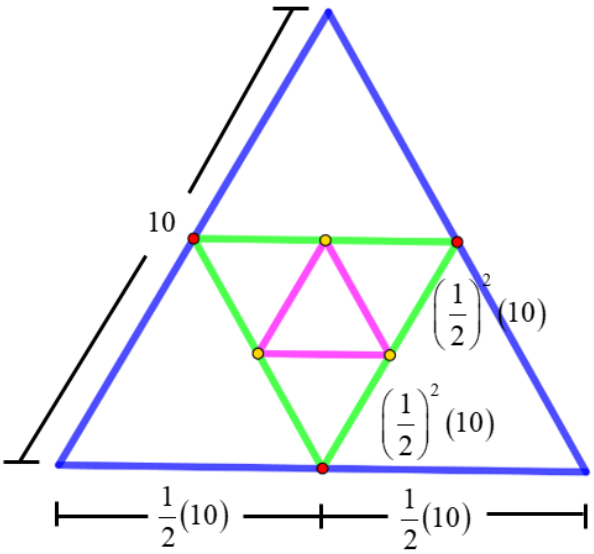
นั่นคือ ด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 2 ที่เกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อม

จุดกึ่งกลางด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปแรกยาว $\frac{1}{2}(10)$ นิ้ว

และ ครึ่งหนึ่งของด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 2 ยาว $2.5 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(10)$ นิ้ว

นั่นคือ ด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 3 ที่เกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อม

จุดกึ่งกลางด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 2 ยาว $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(10)$ นิ้ว ดังรูป



จะได้ ความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 1 เท่ากับ $3(10)$ นิ้ว

ความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 2 เท่ากับ $3\left(\frac{1}{2}\right)(10)$ นิ้ว

ความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 3 เท่ากับ $3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(10)=3\left(\frac{1}{2}\right)^2(10)$ นิ้ว

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า ความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ n

เท่ากับ $3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(10)$ นิ้ว

จะได้ว่า ความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ เท่ากับ

$3(10), 3\left(\frac{1}{2}\right)(10), 3\left(\frac{1}{2}\right)^2(10), \ldots, 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(10), \ldots$ นิ้ว

ถ้าสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าตามกระบวนการที่กำหนดนี้ไปเรื่อย ๆ ไม่สิ้นสุด

จะได้ผลบวกของความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมด

$3(10)+3\left(\frac{1}{2}\right)(10)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2(10)+\cdots+3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(10)+\cdots$ นิ้ว

พิจารณาอนุกรม $3(10)+3\left(\frac{1}{2}\right)(10)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2(10)+\cdots+3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(10)+\cdots$ ซึ่งเป็น

อนุกรมเลขคณิตที่มี $a_1=3(10)$ และ $r=\frac{1}{2}$

เนื่องจาก $|r|=\left|\frac{1}{2}\right|<1$ จะได้ว่าอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{a_1}{1-r}=\frac{3(10)}{1-\frac{1}{2}}=60$

ดังนั้น ถ้าสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าด้วยกระบวนการที่กำหนดไปเรื่อย ๆ ไม่สิ้นสุด ผลบวกของความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมด เท่ากับ 60 นิ้ว

45. ในช่วงเวลากลางวันของแต่ละวัน หอยทากจะคลานขึ้นมาได้ 5 เมตร และในเวลากลางคืนหอยทากจะลื่นลงไปเป็นระยะทางครึ่งหนึ่งของระยะห่างระหว่างตัวมันกับก้นบ่อ

ในวันที่ 1 ช่วงเวลากลางวัน หอยทากจะคลานขึ้นมาได้ 5 เมตรจากก้นบ่อน้ำ

และในเวลากลางคืนจะลื่นลงไป $\frac{1}{2}(5)=\frac{5}{2}$ เมตร

ดังนั้น เมื่อสิ้นวันที่ 1 หอยทากจะอยู่ห่างจากก้นบ่อ $5-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}=\frac{5(1)}{2}=\frac{5(2^1-1)}{2^1}$ เมตร

ในวันที่ 2 ช่วงเวลากลางวัน หอยทากจะคลานขึ้นมาได้ 5 เมตรจากวันแรก ทำให้อยู่ที่

ตำแหน่ง $\frac{5}{2}+5=\frac{15}{2}$ เมตร จากก้นบ่อ

และในเวลากลางคืนจะลื่นลงไป $\frac{1}{2}\left(\frac{15}{2}\right)=\frac{15}{4}$ เมตร

ดังนั้น เมื่อสิ้นวันที่ 2 หอยทากจะอยู่ห่างจากก้นบ่อ $\frac{15}{2}-\frac{15}{4}=\frac{15}{4}=\frac{5(3)}{2^2}=\frac{5\left(2^2-1\right)}{2^2}$ เมตร

ในวันที่ 3 ช่วงเวลากลางวัน หอยทากจะคลานขึ้นมาได้ 5 เมตรจากวันที่สอง ทำให้อยู่ที่

ตำแหน่ง $\frac{15}{4}+5=\frac{35}{4}$ เมตร จากก้นบ่อ

และในเวลากลางคืนจะลื่นลงไป $\frac{1}{2}\left(\frac{35}{4}\right)=\frac{35}{8}$ เมตร

ดังนั้น เมื่อสิ้นวันที่ 3 หอยทากจะอยู่ห่างจากก้นบ่อ $\frac{35}{4}-\frac{35}{8}=\frac{35}{8}=\frac{5(7)}{2^3}=\frac{5\left(2^3-1\right)}{2^3}$ เมตร

ในทำนองเดียวกัน เมื่อสิ้นวันที่ n หอยทากจะอยู่ห่างจากก้นบ่อ $\frac{5\left(2^n-1\right)}{2^n}$ เมตร

จะได้ว่า เมื่อสิ้นวันที่ 1, 2, 3, …, n, … หอยทากจะอยู่ห่างจากก้นบ่อ

$\frac{5}{2}, \frac{15}{4}, \frac{35}{8}, \ldots, \frac{5\left(2^n-1\right)}{2^n}, \ldots$ เมตร

เมื่อหอยทากเคลื่อนที่ในรูปแบบนี้โดยไม่มีที่สิ้นสุด จะได้ว่าหอยทากจะอยู่ห่างจากก้นบ่อ

เท่ากับ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\left(2^n-1\right)}{2^n}$

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\left(2^n-1\right)}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}5\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}5\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\right)=5(1-0)=5$

จะเห็นว่า เมื่อสิ้นแต่ละวัน หอยทากตัวนี้จะอยู่ห่างจากก้นบ่อไม่เกิน 5 เมตร

แต่เนื่องจากบ่อน้ำนี้ลึก 10 เมตร

ดังนั้น หอยทากตัวนี้ไม่สามารถคลานออกจากบ่อน้ำนี้ได้

46. 1) จากอนุกรม $(-2)+8+(-24)+\cdots+n(-2)^n+\cdots$ จะได้

$$S_1 = -2$$
$$S_2 = -2+8 = 6$$
$$S_3 = -2+8-24 = -18$$

ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมนี้

จะได้ $S_n = 1(-2)+2\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)^3+\cdots+n\cdot(-2)^n$ ----- (1)

จาก (1) จะได้

$$(-2)S_n = 1(-2)^2+2\cdot(-2)^3+3\cdot(-2)^4+\cdots+(n-1)\cdot(-2)^n+n(-2)^{n+1} \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$3S_n = (-2)+(2-1)(-2)^2+(3-2)(-2)^3+\cdots+(n-(n-1))(-2)^n-n\cdot(-2)^{n+1}$$
$$3S_n = \left((-2)+(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^n\right)-n\cdot(-2)^{n+1} \quad \text{----- (3)}$$

จะเห็นว่า $(-2)+(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^n$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=-2$

และ $r=-2$

จาก (3) และสูตรการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต จะได้

$$3S_n = \frac{(-2)\left(1-(-2)^n\right)}{1-(-2)}-n\cdot(-2)^{n+1}$$
$$3S_n = -\frac{2}{3}\left(1-(-2)^n\right)-n\cdot(-2)^{n+1}$$
$$S_n = -\frac{2}{9}\left(1-(-2)^n\right)-\frac{n\cdot(-2)^{n+1}}{3}$$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ $-2, 6, -18, \ldots, -\frac{2}{9}\left(1-(-2)^n\right)-\frac{n\cdot(-2)^{n+1}}{3}, \ldots$

2) จากอนุกรม $1+0.2+0.03+\cdots+10\left(\frac{n}{10^n}\right)+\cdots$ จะได้

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1+0.2 = 1+\frac{2}{10}$$
$$S_3 = 1+0.2+0.03 = 1+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}$$

ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมนี้

จะได้ $S_n = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{n}{10^{n-1}}$ ----- (1)

จาก (1) จะได้

$$\frac{1}{10}S_n = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{n}{10^n} \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$\frac{9}{10}S_n = 1 + (2-1)\frac{1}{10} + (3-2)\frac{1}{10^2} + \cdots + (n-(n-1))\frac{1}{10^{n-1}} - n \cdot \frac{1}{10^n}$$

$$\frac{9}{10}S_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}} - n \cdot \frac{1}{10^n} \quad \text{----- (3)}$$

จะเห็นว่า $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = 1$ และ $r = \frac{1}{10}$

จาก (3) และสูตรการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต จะได้

$$\frac{9}{10}S_n = \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{10}} - n \cdot \frac{1}{10^n}$$

$$\frac{9}{10}S_n = \frac{10}{9}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right) - \frac{n}{10^n}$$

$$S_n = \frac{100}{81}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right) - \frac{n}{9 \cdot 10^{n-1}}$$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ $1, 1.2, 1.23, \ldots, \frac{100}{81}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right) - \frac{n}{9 \cdot 10^{n-1}}, \ldots$

3) จากอนุกรม $1 + 4 + 18 + \cdots + n \cdot n! + \cdots$ จะได้

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + 4 = 5$$
$$S_3 = 1 + 4 + 18 = 23$$

ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมนี้

จะได้ $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n!$

สังเกตว่า สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ จะได้

$$\begin{aligned} k\cdot k! &= (k+1-1)\cdot k! \\ &= ((k+1)-1)\cdot k! \\ &= (k+1)k!-k! \\ &= (k+1)!-k! \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} S_n &= 1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n! \\ &= (2!-1!)+(3!-2!)+(4!-3!)+\cdots+(n!-(n-1)!)+((n+1)!-n!) \\ &= -1!+(n+1)! \\ &= (n+1)!-1! \end{aligned}$$

นั่นคือ ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ $1, 5, 23, \ldots, (n+1)!-1, \ldots$

47. พนักงานห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่งจัดเรียงส้มสายน้ำผึ้งให้มีลักษณะคล้ายพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดย

ในชั้นที่ 1 (ชั้นล่างสุด) วางส้มจำนวน 100 ผล

ในชั้นที่ 2 วางส้มจำนวน 81 ผล

ในชั้นที่ 3 วางส้มจำนวน 64 ผล

และวางส้มเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งในชั้นที่ n (ชั้นบนสุด) ซึ่งวางส้มจำนวน 1 ผล

จะได้ว่า พนักงานคนนี้วางส้มในชั้นที่ $1, 2, 3, \ldots, n$ จำนวน $100, 81, 64, \ldots, 1$ ผล

1) จำนวนส้มทั้งหมดที่วาง เท่ากับ $100+81+64+\cdots+9+4+1$

พิจารณาอนุกรม $100+81+64+\cdots+9+4+1$ จะได้

$$\begin{aligned} 100+81+64+\cdots+9+4+1 &= 1+4+9+\cdots+100 \\ &= 1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2 \\ &= \sum_{n=1}^{10} n^2 \\ &= \frac{10(10+1)(20+1)}{6} \\ &= 385 \end{aligned}$$

ดังนั้น จะมีส้มวางอยู่ที่ชั้นวางนี้ 385 ผล

2) เนื่องจากในชั้นที่ 5 และชั้นที่ 7 วางส้มจำนวน 6^2 และ 4^2 ตามลำดับ

จะได้ว่า ถ้าไม่นับส้มในชั้นที่ 5 และ 7 จะเหลือส้ม $385-(6^2+4^2)=333$ ผล

3) ต้องการนำส้ม 1,015 ผล มาจัดเรียงเป็นพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสในลักษณะเดียวกับที่กำหนด

โดยในชั้นที่ 1 (ชั้นล่างสุด) วางส้มจำนวน n^2 ผล

ในชั้นที่ 2 วางส้มจำนวน $(n-1)^2$ ผล

ในชั้นที่ 3 วางส้มจำนวน $(n-2)^2$ ผล

และวางส้มเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งในชั้นที่ n (ชั้นบนสุด) ซึ่งวางส้มจำนวน 1 ผล

จะได้ว่า พนักงานคนนี้วางส้มในชั้นที่ $1, 2, 3, \ldots, n$ จำนวน $n^2, (n-1)^2, (n-2)^2, \ldots, 1$ ผล

ดังนั้น จำนวนส้มทั้งหมดที่วาง เท่ากับ $n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+1$ ผล

พิจารณาอนุกรม $n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+1$ จะได้

$$\begin{aligned} n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+1 &= 1+4+9+\cdots+n^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

เนื่องจากมีส้มทั้งหมด 1,015 ผล จะได้

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1{,}015$$

นั่นคือ $n = 14$

ดังนั้น จะต้องวางส้มในชั้นแรก $14^2 = 196$ ผล และจะวางส้มได้ทั้งหมด 14 ชั้น

48. ฝากเงิน 5,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 1.5 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน ในที่นี้ไม่มีการฝากและถอนในระหว่าง 3 ปี

ให้ $P = 5000,\ k = 4,\ n = 3$ และ $i = 1.5$ จะได้ว่า $r = \frac{i}{100} = \frac{1.5}{100} = 0.015$

จากทฤษฎีบท 10 จะได้ว่า จำนวนเงินในบัญชีเมื่อฝากเงินครบ 3 ปี คือ $5{,}000\left(1+\frac{0.015}{4}\right)^{4(3)}$ บาท

หรือประมาณ 5,229.70 บาท

49. ฝากเงิน 18,600 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 4 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน ในที่นี้ไม่มีการฝากและถอนในระหว่าง 15 ปี

ให้ $P = 18600,\ k = 2,\ n = 15$ และ $i = 4$ จะได้ว่า $r = \frac{i}{100} = \frac{4}{100} = 0.04$

จากทฤษฎีบท 10 จะได้ว่า จำนวนเงินในบัญชีเมื่อฝากเงินครบ 15 ปี คือ $18,600\left(1+\frac{0.04}{2}\right)^{2(15)}$ บาท หรือประมาณ 33,691.33 บาท

50. แม่ของสุทัศน์ต้องการฝากเงินในธนาคาร 10,000,000 บาท เป็นเวลา 10 ปี โดยไม่มีการฝากถอนในระหว่าง 10 ปีนี้

พิจารณา ธนาคาร A ซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยทบต้นทุกสิ้นเดือน

ให้ $P = 10000000,\ k = 12,\ n = 10$ และ $i = 12$ จะได้ว่า $r = \frac{i}{100} = \frac{12}{100} = 0.12$

จากทฤษฎีบท 10 จะได้ว่า เมื่อแม่ของสุทัศน์เลือกฝากเงินในธนาคาร A ครบ 10 ปี จะได้เงินรวม $10,000,000\left(1+\frac{0.12}{12}\right)^{12(10)}$ บาท หรือประมาณ 33,003,868.95 บาท

พิจารณา ธนาคาร B ซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 12.5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกสิ้นปี

ให้ $P = 10000000,\ n = 10$ และ $i = 12.5$ จะได้ว่า $r = \frac{i}{100} = \frac{12.5}{100} = 0.125$

จากทฤษฎีบท 9 จะได้ว่า เมื่อแม่ของสุทัศน์เลือกฝากเงินในธนาคาร B ครบ 10 ปี จะได้เงินรวม $10,000,000(1+0.125)^{10}$ บาท หรือประมาณ 32,473,210.25 บาท

ดังนั้น แม่ของสุทัศน์ควรเลือกฝากเงินกับธนาคาร A จึงจะได้เงินรวมมากที่สุด และได้เงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ 10 ประมาณ 33,003,868.95 บาท

51. เอกฝากเงิน 100,000 บาท โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน และอัตราดอกเบี้ยคงที่ตลอดระยะเวลาที่ฝากเงิน

เมื่อฝากเงินครบ 10 ปี เขาพบว่ามีเงินในบัญชีประมาณ 148,595 บาท

ให้ $P = 100000,\ k = 2,\ n = 10$ และมีเงินรวม 148,595 บาท

จากทฤษฎีบท 10 จะได้ว่า

$$148,595 = 100,000\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2(10)}$$

$$1.48595 = \left(1+\frac{r}{2}\right)^{20}$$

นั่นคือ

$$1+\frac{r}{2} = \sqrt[20]{1.48595}$$

$$r = 2\left(\sqrt[20]{1.48595}-1\right)$$

$$r \approx 0.04$$

ดังนั้น ธนาคารแห่งนี้กำหนดอัตราดอกเบี้ยประมาณ 4% ต่อปี

52. ต้นตระการกู้เงินจากวิทวัสจำนวน 200,000 บาท โดยมีกำหนดชำระหนี้ทั้งหมดในอีก 2 ปีข้างหน้า เป็นเงิน 300,000 บาท และดอกเบี้ยที่วิทวัสเรียกเก็บคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี

ให้ $P = 100000,\ n = 2$ และมีเงินรวม 300,000 บาท

จากทฤษฎีบท 9 จะได้ว่า

$$300,000 = 200,000(1+r)^2$$

$$1.5 = (1+r)^2$$

นั่นคือ

$$r = \sqrt{1.5}-1$$

$$r \approx 0.2247$$

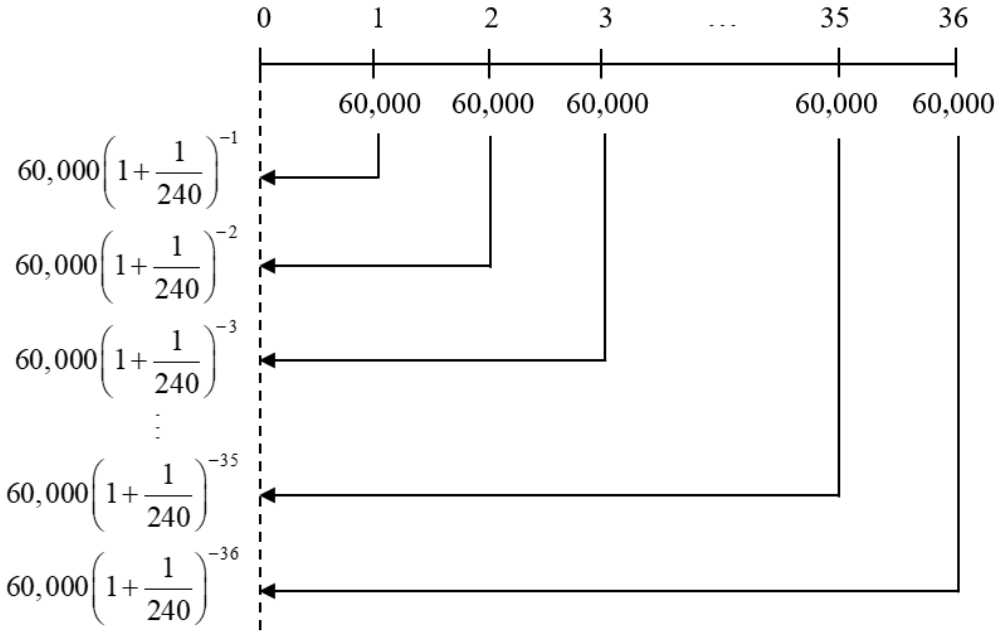
ดังนั้น ดอกเบี้ยที่วิทวัสเรียกเก็บสามารถคิดเป็นอัตราดอกเบี้ยร้อยละ $0.2247 \times 100 = 22.47$ ต่อปี ซึ่งอัตราดอกเบี้ยดังกล่าวไม่เป็นไปตามที่กฎหมายกำหนด

53. แต่ละเดือนบริษัทต้องจ่ายเงินชดเชยรายได้รวมเป็นเงิน $23,000 + 37,000 = 60,000$ บาท เป็นเวลา 3 ปี

บริษัทแห่งนี้นำเงินที่จะใช้ในการจ่ายเงินชดเชยรายได้ไปฝากธนาคาร ซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน (หรืออัตราดอกเบี้ยต่อเดือน คือ $\frac{5}{12}\%$)

จะได้ว่า $r = \dfrac{\frac{5}{12}}{100} = \dfrac{1}{240}$

เขียนแผนภาพแสดงมูลค่าปัจจุบันของเงินที่บริษัทนำไปฝากธนาคารเป็นเวลา 36 เดือน (3 ปี) ได้ดังนี้



จากแผนภาพจะได้ว่า

มูลค่าปัจจุบันของเงินชดเชยรายได้ที่ต้องจ่ายในเดือนแรก คือ

$$60,000\left(1+\frac{1}{240}\right)^{-1}=60,000\left(\frac{240}{241}\right) \text{ บาท}$$

มูลค่าปัจจุบันของเงินชดเชยรายได้ที่ต้องจ่ายในเดือนที่ 2 คือ

$$60,000\left(1+\frac{1}{240}\right)^{-2}=60,000\left(\frac{240}{241}\right)^{2} \text{ บาท}$$

มูลค่าปัจจุบันของเงินชดเชยรายได้ที่ต้องจ่ายในเดือนที่ 3 คือ

$$60,000\left(1+\frac{1}{240}\right)^{-3}=60,000\left(\frac{240}{241}\right)^{3} \text{ บาท}$$

$$\vdots$$

มูลค่าปัจจุบันของเงินชดเชยรายได้ที่ต้องจ่ายในเดือนที่ 36 คือ

$$60,000\left(1+\frac{1}{240}\right)^{-36}=60,000\left(\frac{240}{241}\right)^{36} \text{ บาท}$$

นั่นคือ เมื่อครบ 3 ปี ยอดเงินรวมของเงินชดเชยรายได้ที่ต้องจ่าย เท่ากับ

$$60,000\left(\frac{240}{241}\right)+60,000\left(\frac{240}{241}\right)^2+60,000\left(\frac{240}{241}\right)^3+\cdots+60,000\left(\frac{240}{241}\right)^{36} \text{ บาท}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=60,000\left(\frac{240}{241}\right)$ และ $r=\frac{240}{241}$

จะได้ ยอดเงินรวมของเงินชดเชยรายได้ที่ต้องจ่าย เท่ากับ

$$\frac{60,000\left(\frac{240}{241}\right)\left(1-\left(\frac{240}{241}\right)^{36}\right)}{1-\frac{240}{241}} \approx 2,001,942.08 \text{ บาท}$$

ดังนั้น นายจ้างต้องนำเงินไปฝากอย่างน้อย 2,001,924.08 บาท

54. วิชัยต้องการฝากเงินกับธนาคารแห่งหนึ่งซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี และวิชัยต้องการให้มีเงินในบัญชีประมาณ 250,000 บาท ในเวลา 10 ปี โดยไม่มีการฝากถอนในระหว่าง 10 ปีนี้

ให้ $S=250000,\ k=1,\ n=10$ และ $i=5$ นั่นคือ $r=\frac{5}{100}=0.05$

จะได้ $P=250,000\left(1+\frac{0.05}{1}\right)^{-1(10)} \approx 153,478.31$

ดังนั้น วิชัยต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อย 153,479 บาท

55. ธีระฝากเงินไว้กับธนาคารแห่งหนึ่ง เมื่อเวลาผ่านไป 10 ปี โดยไม่มีการฝากถอนในระหว่าง 10 ปีนี้ พบว่ามีเงินในบัญชี 122,079.42 บาท โดยธนาคารกำหนดอัตราดอกเบี้ย 2% ต่อปี และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน

ให้ $S=122079.42,\ k=4,\ n=10$ และ $i=2$ นั่นคือ $r=\frac{2}{100}=0.02$

จะได้ $P=122,079.42\left(1+\frac{0.02}{4}\right)^{-4(10)} \approx 100,000$

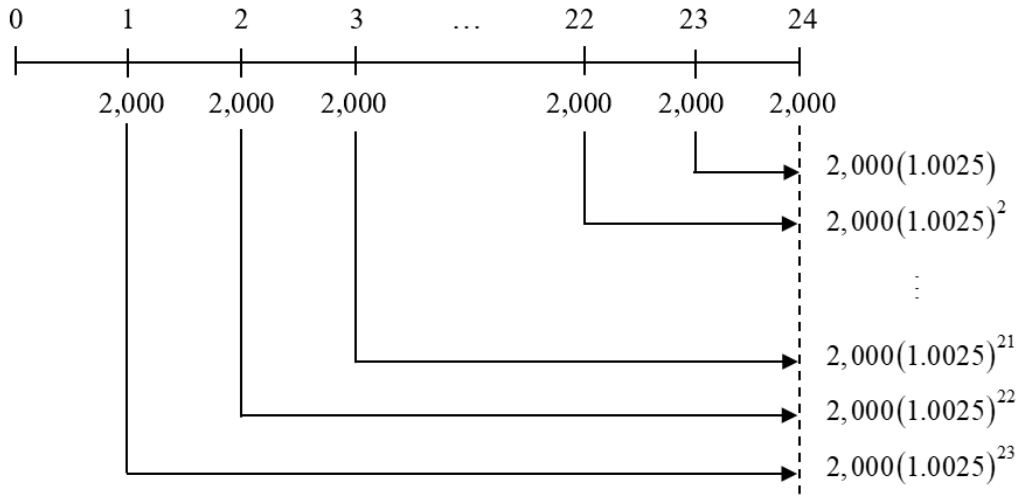
ดังนั้น เงินต้นที่ธีระฝากไว้เมื่อ 10 ปีก่อน ประมาณ 100,000 บาท

56. หมากฝากเงินกับธนาคารแห่งหนึ่งเดือนละ 2,000 บาท ทุกสิ้นเดือน และธนาคารกำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน

นั่นคือ ธนาคารคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นร้อยละ $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ ต่อเดือน

จะได้ว่า $r=\frac{\frac{1}{4}}{100}=0.0025$

เขียนแผนภาพแสดงการฝากเงินและมูลค่าของเงินเมื่อสิ้นเดือนที่ 24 ได้ดังนี้



จากแผนภาพจะได้ว่าเมื่อสิ้นงวดที่ 24

เงินฝากเมื่อสิ้นเดือนที่ 1 จำนวน 2,000 บาท จะมีมูลค่า $2,000(1.0025)^{23}$ บาท

เงินฝากเมื่อสิ้นเดือนที่ 2 จำนวน 2,000 บาท จะมีมูลค่า $2,000(1.0025)^{22}$ บาท

เงินฝากเมื่อสิ้นเดือนที่ 3 จำนวน 2,000 บาท จะมีมูลค่า $2,000(1.0025)^{21}$ บาท

$\vdots$

เงินฝากเมื่อสิ้นเดือนที่ 23 จำนวน 2,000 บาท จะมีมูลค่า $2,000(1.0025)$ บาท

เงินฝากเมื่อสิ้นเดือนที่ 24 จำนวน 2,000 บาท จะมีมูลค่า $2,000$ บาท

นั่นคือ เมื่อสิ้นเดือนที่ 24 หมากจะได้เงินรวม

$2,000(1.0025)^{23}+2,000(1.0025)^{22}+2,000(1.0025)^{21}+\cdots+2,000$ บาท

หรือ $2,000+2,000(1.0025)+2,000(1.0025)^{2}+\cdots+2,000(1.0025)^{23}$ บาท

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 24 พจน์ พจน์แรก คือ $2,000$ และอัตราส่วนร่วม คือ 1.0025

จะได้ผลบวก 24 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\dfrac{2,000\left((1.0025)^{24}-1\right)}{1.0025-1}$ หรือประมาณ 49,405.64 บาท

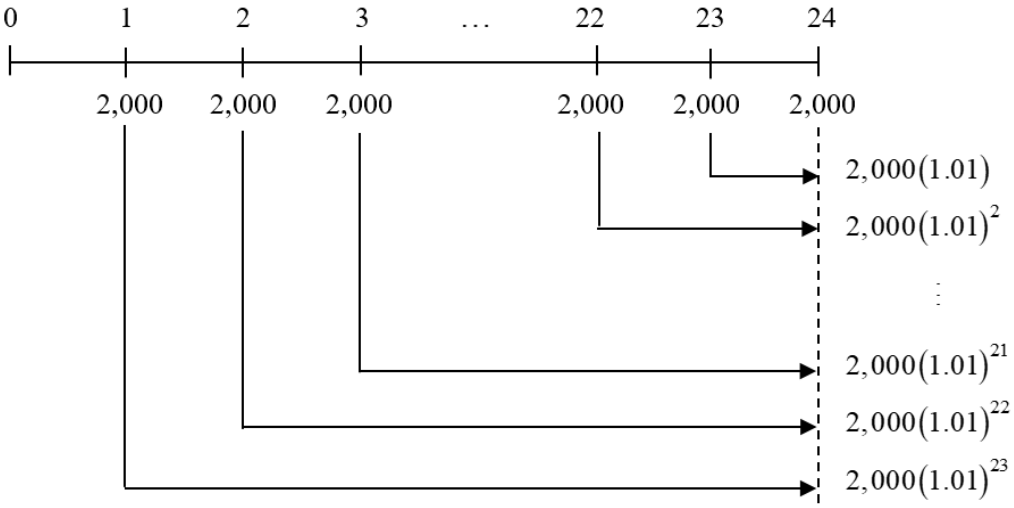
ดังนั้น เมื่อสิ้นเดือนที่ 24 หมากจะมีเงินรวมประมาณ 49,405.64 บาท

57. มะปรางมีรายรับเดือนละ 20,000 บาท และต้องการออมเงินทุกสิ้นเดือน เดือนละ 10% ของรายรับ นั่นคือ มะปรางออมเงินทุกสิ้นเดือน เดือนละ $\dfrac{10}{100}(20,000)=2,000$ บาท

มะปรางฝากเงินเข้าบัญชีธนาคารที่กำหนดอัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน นั่นคือ ธนาคารกำหนดอัตราดอกเบี้ย $\dfrac{12}{12}=1\%$ ต่อเดือน

จะได้ว่า $r=\dfrac{1}{100}=0.01$

เขียนแผนภาพแสดงการฝากเงินและมูลค่าของเงินเมื่อสิ้นเดือนที่ 24 (ครบ 2 ปี) ได้ดังนี้



จากแผนภาพจะได้ว่าเมื่อสิ้นงวดที่ 24

เงินฝากเมื่อสิ้นเดือนที่ 1 จำนวน 2,000 บาท จะมีมูลค่า $2,000(1.01)^{23}$ บาท

เงินฝากเมื่อสิ้นเดือนที่ 2 จำนวน 2,000 บาท จะมีมูลค่า $2,000(1.01)^{22}$ บาท

เงินฝากเมื่อสิ้นเดือนที่ 3 จำนวน 2,000 บาท จะมีมูลค่า $2,000(1.01)^{21}$ บาท

⋮

เงินฝากเมื่อสิ้นเดือนที่ 23 จำนวน 2,000 บาท จะมีมูลค่า $2,000(1.01)$ บาท

เงินฝากเมื่อสิ้นเดือนที่ 24 (ครบ 2 ปี) จำนวน 2,000 บาท จะมีมูลค่า $2,000$ บาท

นั่นคือ เมื่อเวลาผ่านไป 2 ปี มะปรางจะได้เงินออมทั้งหมด

$2,000(1.01)^{23}+2,000(1.01)^{22}+2,000(1.01)^{21}+\cdots+2,000$ บาท

หรือ $2,000+2,000(1.01)+2,000(1.01)^{2}+\cdots+2,000(1.01)^{23}$ บาท

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 24 พจน์ พจน์แรก คือ $2,000$ และอัตราส่วนร่วม คือ 1.01

จะได้ผลบวก 24 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\dfrac{2,000\left((1.01)^{24}-1\right)}{1.01-1}$ หรือประมาณ 53,946.93 บาท

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 2 ปี มะปรางจะมีเงินออมทั้งหมดประมาณ 53,946.93 บาท

58. ในวันที่ 1 มิถุนายน 2561 ส้มซ่าฝากเงิน 100,000 บาท เข้าบัญชีเงินฝากออมทรัพย์ที่ให้อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 1.2 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน

นั่นคือ ธนาคารให้อัตราดอกเบี้ยร้อยละ $\dfrac{1.2}{12}=0.1\%$ ต่อเดือน

ถ้าไม่มีการฝากถอนในระยะเวลา 1 ปี จากทฤษฎีบท 10 จะได้ว่า เมื่อครบ 1 ปี ส้มซ่าจะมีเงินในบัญชีทั้งหมด $100,000\left(1+\dfrac{0.1}{100}\right)^{12(1)}$ บาท หรือประมาณ 101,206.62 บาท

จาก ส้มซ่าโอนเงินให้น้องสาวทุกวันที่ 1 ของเดือน ตั้งแต่เดือนมิถุนายน 2561 โดยไม่เสียค่าธรรมเนียมในการโอน

จะได้ว่า เมื่อต้นเดือนที่ 1 (มิถุนายน) ส้มซ่าถอนเงินไป 5,000 บาท ทำให้เมื่อครบ 1 ปี เงินในบัญชีของส้มซ่าจะลดลง $5,000(1.001)^{12}$ บาท

เมื่อต้นเดือนที่ 2 ส้มซ่าถอนเงินไป 5,000 บาท ทำให้เมื่อครบ 1 ปี เงินในบัญชีของส้มซ่าจะลดลง $5,000(1.001)^{11}$ บาท

เมื่อต้นเดือนที่ 3 ส้มซ่าถอนเงินไป 5,000 บาท ทำให้เมื่อครบ 1 ปี เงินในบัญชีของส้มซ่าจะลดลง $5,000(1.001)^{10}$ บาท

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า เมื่อต้นเดือนที่ 12 ส้มซ่าถอนเงินไป 5,000 บาท ทำให้เมื่อครบ 1 ปี เงินในบัญชีของส้มซ่าจะลดลง $5,000(1.001)$ บาท

ดังนั้น เมื่อครบ 1 ปี เงินในบัญชีของส้มซ่าจะลดลงทั้งหมด

$5,000(1.001)^{12}+5,000(1.001)^{11}+5,000(1.001)^{10}+\cdots+5,000(1.001)$

หรือ $5,000(1.001)+5,000(1.001)^{2}+5,000(1.001)^{3}+\cdots+5,000(1.001)^{12}$ ซึ่งเป็น

อนุกรมเรขาคณิตที่มี 12 พจน์ พจน์แรก คือ $5,000(1.001)$ และอัตราส่วนร่วม คือ 1.001

นั่นคือ เมื่อครบ 1 ปี เงินในบัญชีของส้มซ่าจะลดลงทั้งหมด $\dfrac{(5,000(1.001))(1.001^{12}-1)}{1.001-1}$ บาท

หรือประมาณ 60,391.43 บาท

ดังนั้น เมื่อครบ 1 ปี ส้มซ่าจะมีเงินเหลือในบัญชีประมาณ 101,206.62 – 60,391.43 = 40,815.19 บาท

เนื่องจาก เมื่อครบ 1 ปี หากไม่นำดอกเบี้ยจากธนาคารมาคำนวณ ส้มซ่าจะเหลือเงิน

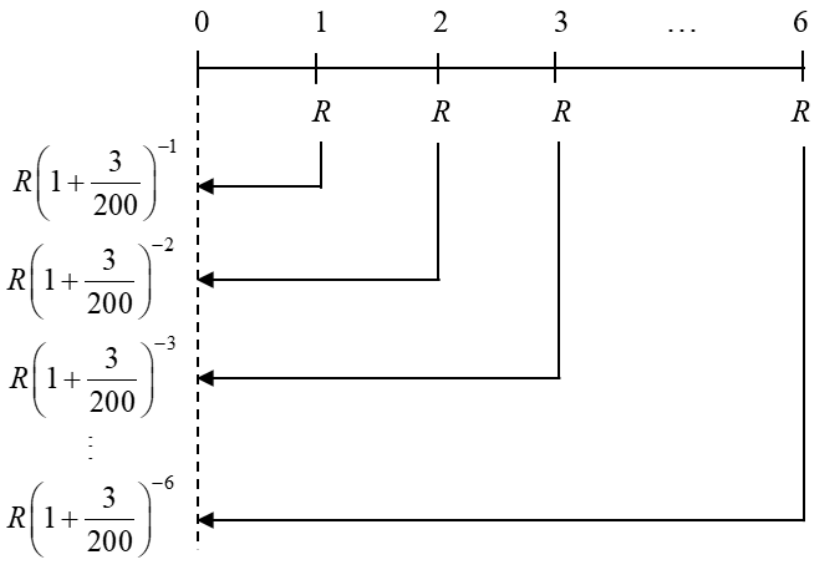
$$100,000-12(5,000)=40,000$$

จะได้ว่า เมื่อครบ 1 ปี ส้มซ่าจะได้รับดอกเบี้ยจากบัญชีเงินฝากนี้ประมาณ

40,815.19 – 40,000 = 815.19 บาท

59. ยอดรักผ่อนตู้เย็นราคา 30,000 บาท ด้วยยอดชำระเท่ากันทุกเดือน เดือนละ R บาท เป็นเวลา 6 เดือน โดยผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน อัตราดอกเบี้ย 18% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน (หรืออัตราดอกเบี้ยต่องวด คือ $\frac{18}{12}\%$) จะได้ว่า $r=\dfrac{\frac{18}{12}}{100}=\dfrac{203}{200}$

เขียนแผนภาพแสดงการผ่อนตู้เย็นของยอดรักเป็นเวลา 6 เดือน ได้ดังนี้



จากแผนภาพจะได้ว่า

มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 1 คือ $R\left(1+\frac{3}{200}\right)^{-1}=R\left(\frac{200}{203}\right)$ บาท

มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 2 คือ $R\left(1+\frac{3}{200}\right)^{-2}=R\left(\frac{200}{203}\right)^{2}$ บาท

มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 3 คือ $R\left(1+\frac{3}{200}\right)^{-3}=R\left(\frac{200}{203}\right)^{3}$ บาท

$\vdots$

มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 6 คือ $R\left(1+\frac{3}{200}\right)^{-6}=R\left(\frac{200}{203}\right)^{6}$ บาท

นั่นคือ เมื่อครบ 6 เดือน ยอดเงินรวมที่ยอดรักจ่ายเพื่อผ่อนตู้เย็น เท่ากับ

$$R\left(\frac{200}{203}\right)+R\left(\frac{200}{203}\right)^{2}+R\left(\frac{200}{203}\right)^{3}+\cdots+R\left(\frac{200}{203}\right)^{6} \text{ บาท}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 6 พจน์ พจน์แรก คือ $R\left(\frac{200}{203}\right)$ และอัตราส่วนร่วม คือ $\frac{200}{203}$

จะได้ผลบวก 6 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\dfrac{R\left(\frac{200}{203}\right)\left(1-\left(\frac{200}{203}\right)^{6}\right)}{1-\frac{200}{203}}$ บาท

เนื่องจาก ยอดรักผ่อนตู้เย็นราคา 30,000 บาท

จะได้ $$30{,}000 = \frac{R\left(\frac{200}{203}\right)\left(1-\left(\frac{200}{203}\right)^{6}\right)}{1-\frac{200}{203}}$$

นั่นคือ $$R = \frac{30{,}000\left(1-\frac{200}{203}\right)}{\left(\frac{200}{203}\right)\left(1-\left(\frac{200}{203}\right)^{6}\right)} \approx 5{,}265.76$$

ดังนั้น ยอดรักจะต้องผ่อนชำระเดือนละประมาณ 5,265.76 บาท

60. อนงค์ซื้อรถยนต์ราคา 600,000 บาท โดยตกลงจ่ายเงินดาวน์ 15% ของราคารถยนต์

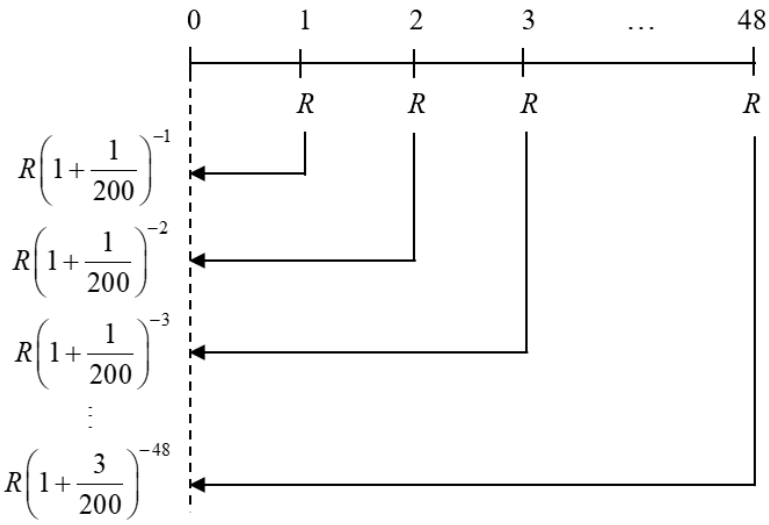
นั่นคือ อนงค์จ่ายเงินดาวน์ $\frac{15}{100}(600,000)=90,000$ บาท

และผ่อนชำระส่วนที่เหลือเป็นจำนวนเงินเท่ากันทุกเดือน เป็นเวลา 4 ปี โดยผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน เดือนละ R บาท

อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี (หรืออัตราดอกเบี้ยต่องวด คือ $\frac{6}{12}\%$)

จะได้ว่า $r=\frac{\frac{6}{12}}{100}=\frac{1}{200}$

เขียนแผนภาพแสดงการจ่ายเงินผ่อนรถยนต์ของใบเตยเป็นเวลา 4 ปี (48 งวด) ได้ดังนี้



จากแผนภาพจะได้ว่า

มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 1 คือ $R\left(1+\frac{1}{200}\right)^{-1}=R\left(\frac{200}{201}\right)$ บาท

มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 2 คือ $R\left(1+\frac{1}{200}\right)^{-2}=R\left(\frac{200}{201}\right)^{2}$ บาท

มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 3 คือ $R\left(1+\frac{1}{200}\right)^{-3}=R\left(\frac{200}{201}\right)^{3}$ บาท

$\vdots$

มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 48 คือ $R\left(1+\frac{1}{200}\right)^{-48}=R\left(\frac{200}{201}\right)^{48}$ บาท

นั่นคือ เมื่อครบ 4 ปี (48 เดือน) ยอดเงินรวมที่อนงค์จ่ายเพื่อผ่อนรถยนต์ เท่ากับ

$$R\left(\frac{200}{201}\right)+R\left(\frac{200}{201}\right)^{2}+R\left(\frac{200}{201}\right)^{3}+\cdots+R\left(\frac{200}{201}\right)^{48} \text{ บาท}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 48 พจน์ พจน์แรก คือ $R\left(\frac{200}{201}\right)$ และอัตราส่วนร่วม คือ $\frac{200}{201}$

จะได้ผลบวก 6 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\dfrac{R\left(\frac{200}{201}\right)\left(1-\left(\frac{200}{201}\right)^{48}\right)}{1-\frac{200}{201}}$ บาท

เนื่องจากอนงค์เหลือเงินที่ต้องชำระอีก 600,000 – 90,000 = 510,000 บาท

จะได้ $$510{,}000 = \frac{R\left(\frac{200}{201}\right)\left(1-\left(\frac{200}{201}\right)^{48}\right)}{1-\frac{200}{201}}$$

นั่นคือ $$R = \frac{510{,}000\left(1-\frac{200}{201}\right)}{\left(\frac{200}{201}\right)\left(1-\left(\frac{200}{201}\right)^{48}\right)} \approx 11{,}977.36$$

ดังนั้น อนงค์จะต้องผ่อนชำระเดือนละประมาณ 11,977.36 บาท

และเสียดอกเบี้ยทั้งหมด $48(11{,}977.36)-51{,}000=64{,}913.28$ บาท

บทที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น

แบบฝึกหัด 2.1ก

1. 1) แสดงค่าของ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ เมื่อ x เป็นค่าตามที่กำหนด

x	$f(x)$
3.9	0.251582
3.99	0.250156
3.999	0.250016

x	$f(x)$
4.1	0.248457
4.01	0.249844
4.001	0.249984

จากตารางจะเห็นว่า $f(x)$ เข้าใกล้ 0.25 เมื่อ x เข้าใกล้ 4 ทั้งทางด้านซ้ายและขวาของ 4

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=0.25$

2) แสดงค่าของ $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+x-6}$ เมื่อ x เป็นค่าตามที่กำหนด

x	$f(x)$
1.9	0.204082
1.99	0.200401
1.999	0.200401

x	$f(x)$
2.1	0.196078
2.01	0.199601
2.001	0.199601

จากตารางจะเห็นว่า $f(x)$ เข้าใกล้ 0.2 เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทั้งทางด้านซ้ายและขวาของ 2

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+x-6}=0.2$

3) แสดงค่าของ $f(x)=\dfrac{3x-3}{x^3-1}$ เมื่อ x เป็นค่าตามที่กำหนด

x	$f(x)$
0.9	1.107011
0.99	1.010067
0.999	1.001001

x	$f(x)$
1.1	0.906344
1.01	0.990066
1.001	0.999001

จากตารางจะเห็นว่า $f(x)$ เข้าใกล้ 1 เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทั้งทางด้านซ้ายและขวาของ 1

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{x^3-1}=1$

4) แสดงค่าของ $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ เมื่อ x เป็นค่าตามที่กำหนด

x	$f(x)$
–0.1	0.951626
–0.01	0.995017
–0.001	0.999500

x	$f(x)$
0.1	1.051709
0.01	1.005017
0.001	1.000500

จากตารางจะเห็นว่า $f(x)$ เข้าใกล้ 1 เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทั้งทางด้านซ้ายและขวาของ 0

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

5) แสดงค่าของ $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ เมื่อ x เป็นค่าตามที่กำหนด

x	$f(x)$
–1	0.841471
–0.5	0.958851
–0.1	0.998334
–0.05	0.999583
–0.01	0.999983

x	$f(x)$
1	0.841471
0.5	0.958851
0.1	0.998334
0.05	0.999583
0.01	0.999983

จากตารางจะเห็นว่า $f(x)$ เข้าใกล้ 1 เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทั้งทางด้านซ้ายและขวาของ 0

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

6) แสดงค่าของ $f(x)=x\ln x$ เมื่อ x เป็นค่าตามที่กำหนด

x	$f(x)$
0.1	–0.230259
0.01	–0.046052
0.001	–0.006908
0.0001	–0.000921
0.00001	–0.000115

จากตารางจะเห็นว่า $f(x)$ เข้าใกล้ 0 เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวาของ 0

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$

7) แสดงค่าของ $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2+x}$ เมื่อ x เป็นค่าตามที่กำหนด

x	$f(x)$
-0.1	-1.111111
-0.01	-1.010101
-0.001	-1.001001

x	$f(x)$
0.1	0.909091
0.01	0.990099
0.001	0.999001

จากตารางจะเห็นว่า $f(x)$ เข้าใกล้ -1 เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้ายและ $f(x)$ เข้าใกล้ 1 เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x^2+x}$ ไม่มีค่า

2. 1) $f(1)=2$

2) เมื่อ $x\to 1^-$ หมายถึง x เข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้าย $(x<1)$ จะได้ว่าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 2 ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$

3) เมื่อ $x\to 1^+$ หมายถึง x เข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา $(x>1)$ จะได้ว่าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 3 ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3$

4) เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ไม่มีค่า

5) จาก $f(x)$ ไม่นิยามที่ $x=5$ ดังนั้น $f(5)$ ไม่มีค่า

6) เมื่อ $x\to 5^+$ หมายถึง x เข้าใกล้ 5 ทางด้านขวา $(x>5)$ จะได้ว่าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 4 ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=4$

7) เมื่อ $x\to 5^-$ หมายถึง x เข้าใกล้ 5 ทางด้านซ้าย $(x<5)$ จะได้ว่าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 4 ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=4$

8) เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=4$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=4$

3. 1) $f(0)=3$

2) เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทั้งทางด้านซ้าย $(x<0)$ และขวา $(x>0)$

จะได้ว่าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 3

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=3$

3) $f(3)=3$

4) เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ทางด้านซ้าย $(x<3)$ จะได้ว่าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 4

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=4$

5) เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ทางด้านขวา $(x>3)$ จะได้ว่าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 2

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2$

6) เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ไม่มีค่า

4. 1) $g(0)=-1$

2) เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย $(x<0)$ จะได้ว่าค่าของ $g(x)$ เข้าใกล้ -1

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=-1$

3) เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา $(x>0)$ จะได้ว่าค่าของ $g(x)$ เข้าใกล้ -2

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-2$

4) เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ ไม่มีค่า

5) $g(2)=1$

6) เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย $(x<2)$ จะได้ว่าค่าของ $g(x)$ เข้าใกล้ 2

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=2$

7) เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา $(x>2)$ จะได้ว่าค่าของ $g(x)$ เข้าใกล้ 0

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=0$

8) เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ ไม่มีค่า

9) เมื่อ x เข้าใกล้ 4 ทั้งทางด้านซ้าย $(x<4)$ และขวา $(x>4)$

จะได้ว่าค่าของ $g(x)$ เข้าใกล้ 3

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 4} g(x)=3$

5. 1) $f(1)=0$

2) เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้าย $(x<1)$ จะได้ว่าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ -1

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1$

3) เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา $(x>1)$ จะได้ว่าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 0

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$

4) เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ไม่มีค่า

6. 1) เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย $(x<2)$ จะได้ว่าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 2

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2$

2) เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา $(x>2)$ จะได้ว่าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ -2

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-2$

3) เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ไม่มีค่า

4) เมื่อ x เข้าใกล้ -2 ทางด้านซ้าย $(x<-2)$ จะได้ว่าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 0

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=0$

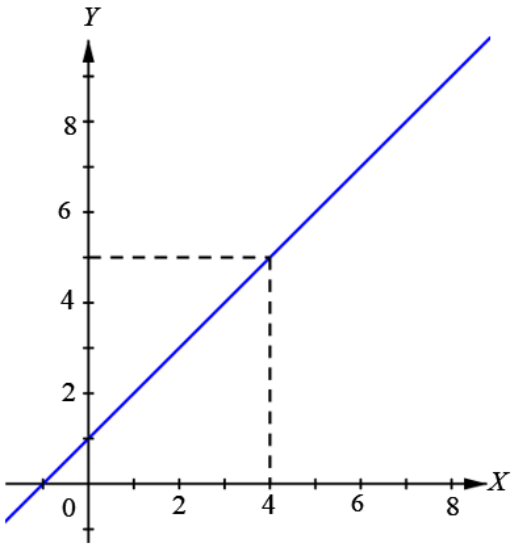
5) เมื่อ x เข้าใกล้ -2 ทางด้านขวา $(x>-2)$ จะได้ว่าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 0

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=0$

6) เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=0$

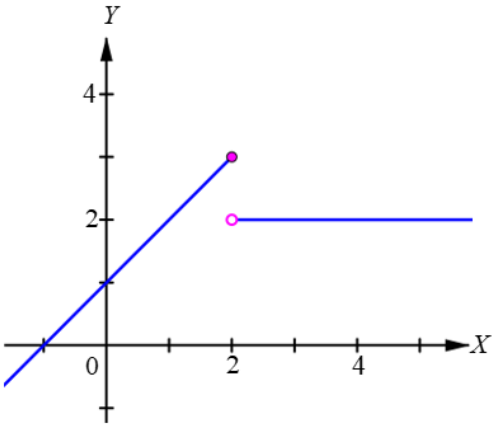
7. 1) เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=1+x$ ได้ดังรูป



จากกราฟ เมื่อ x เข้าใกล้ 4 ทางด้านซ้าย $(x<4)$ จะได้ว่าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 5

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 4^-}(1+x)=5$

2) เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases} 2 & ,x>2 \\ x+1 & ,x\le 2 \end{cases}$ ได้ดังรูป



จากกราฟ จะได้ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3$ และ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2$

แต่ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ไม่มีค่า

แบบฝึกหัด 2.1ข

1. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3x^2+7x-12\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(3x^2\right)+\lim\limits_{x\to 0}\left(7x\right)-\lim\limits_{x\to 0}12$

$= 3\lim\limits_{x\to 0}x^2+7\lim\limits_{x\to 0}x-12$

$= 3(0)^2+7(0)-12$

$= -12$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^5-2x\right) = \lim\limits_{x\to -1}\left(x^5\right)-\lim\limits_{x\to -1}\left(2x\right)$

$= \lim\limits_{x\to -1}\left(x^5\right)-2\lim\limits_{x\to -1}x$

$= (-1)^5-2(-1)$

$= 1$

3) $\lim\limits_{x\to 5}x^5\left(x-2\right) = \left(\lim\limits_{x\to 5}x^5\right)\left(\lim\limits_{x\to 5}\left(x-2\right)\right)$

$= \left(5^5\right)(5-2)$

$= 9{,}375$

4) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x+3\right)\left(x^2+2\right) = \left(\lim\limits_{x\to -1}\left(x+3\right)\right)\left(\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2+2\right)\right)$

$= (-1+3)\left((-1)^2+2\right)$

$= 6$

5) เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 3}\left(2x-5\right)=2(3)-5=1\neq 0$

จะได้ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{2x-5} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 3}\left(x+1\right)}{\lim\limits_{x\to 3}\left(2x-5\right)}$

$= \dfrac{3+1}{1}$

$= 4$

6) เนื่องจาก $\lim_{x\to -5}(x+5)=0$ จึงไม่สามารถใช้ทฤษฎีบท 2 ข้อ 5 ได้โดยตรง จัดรูปฟังก์ชันใหม่ ดังนี้

$$\frac{x^2-25}{x+5} = \frac{(x-5)(x+5)}{x+5}$$
$$= x-5 \quad \text{เมื่อ} \quad x \neq -5$$

ดังนั้น $\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5} = \lim_{x\to -5}(x-5) = -5-5 = -10$

7) เนื่องจาก $\lim_{x\to 1}\left(x^2-x-2\right) = (1)^2-1-2 = -2 \neq 0$

จะได้ $$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2-x-2} = \frac{\lim_{x\to 1}(x+1)}{\lim_{x\to 1}\left(x^2-x-2\right)}$$
$$= \frac{1+1}{-2}$$
$$= -1$$

8) เนื่องจาก $\lim_{x\to 1}\left(x^2+4x+3\right) = (1)^2+4(1)+3 = 8 \neq 0$

จะได้ $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-2}{x^2+4x+3} = \frac{\lim_{x\to 1}\left(x^2-x-2\right)}{\lim_{x\to 1}\left(x^2+4x+3\right)}$$
$$= \frac{1^2-1-2}{8}$$
$$= -\frac{1}{4}$$

9) เนื่องจาก $\lim_{x\to 1}(1-x)=0$ จึงไม่สามารถใช้ทฤษฎีบท 2 ข้อ 5 ได้โดยตรง จัดรูปฟังก์ชันใหม่ ดังนี้

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \frac{1-\sqrt{x}}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}$$
$$= \frac{1}{1+\sqrt{x}} \quad \text{เมื่อ} \quad x \neq 1$$

ดังนั้น $$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{\lim_{x\to 1}1}{\lim_{x\to 1}\left(1+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\lim_{x\to 1}1+\lim_{x\to 1}\sqrt{x}} = \frac{1}{1+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

10) เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 9}(9-x)=0$ จึงไม่สามารถใช้ทฤษฎีบท 2 ข้อ 5 ได้โดยตรง จัดรูปฟังก์ชันใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x} &= \frac{3-\sqrt{x}}{\left(3-\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x}\right)}\\ &= \frac{1}{3+\sqrt{x}} \qquad \text{เมื่อ} \quad x\neq 9\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{1}{3+\sqrt{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 9}1}{\lim\limits_{x\to 9}\left(3+\sqrt{x}\right)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 9}3+\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x}}=\dfrac{1}{3+\sqrt{9}}=\dfrac{1}{6}$

11) เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ จึงไม่สามารถใช้ทฤษฎีบท 2 ข้อ 5 ได้โดยตรง จัดรูปฟังก์ชันใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} &= \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}\cdot\frac{2+\sqrt{x+3}}{2+\sqrt{x+3}}\\ &= \frac{4-(x+3)}{(x-1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}\\ &= -\frac{1}{2+\sqrt{x+3}} \qquad \text{เมื่อ} \quad x\neq 1\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(-\dfrac{1}{2+\sqrt{x+3}}\right)$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(-1)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=\frac{-1}{\lim\limits_{x\to 1}2+\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+3}}=-\frac{1}{2+\sqrt{1+3}}=-\frac{1}{4}$$

12)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2} &= \sqrt[3]{\lim_{x\to 0}\left(x^2-1\right)^2}\\ &= \sqrt[3]{\left(\lim_{x\to 0}\left(x^2-1\right)\right)^2}\\ &= \sqrt[3]{\left(0^2-1\right)^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

2. 1) เนื่องจาก $|x+4| = -(x+4)$ เมื่อ $x<-4$

จะได้ $\lim\limits_{x\to -4^-} |x+4| = \lim\limits_{x\to -4^-} -(x+4) = 0$

เนื่องจาก $|x+4| = x+4$ เมื่อ $x>-4$

จะได้ $\lim\limits_{x\to -4^+} |x+4| = \lim\limits_{x\to -4^+} (x+4) = 0$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to -4^-} |x+4| = 0 = \lim\limits_{x\to -4^+} |x+4|$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -4} |x+4| = 0$

2) เนื่องจาก $|x-2| = -(x-2)$ เมื่อ $x<2$

จะได้ $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} (-1) = -1$

และเนื่องจาก $|x-2| = x-2$ เมื่อ $x>2$

จะได้ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} 1 = 1$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x-2} \neq \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$ ไม่มีค่า

3) เนื่องจาก $|x+4| = -(x+4)$ เมื่อ $x<-4$

จะได้ $\lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{|x+4|}{x+4} = \lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{-(x+4)}{x+4} = \lim\limits_{x\to -4^-} (-1) = -1$

4) เนื่องจาก $|x| = -x$ เมื่อ $x<0$

จะได้ $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0$

5) เนื่องจาก $|2x-3| = -(2x-3)$ เมื่อ $x<\dfrac{3}{2}$

จะได้ $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^-} \dfrac{2x^2-3x}{|2x-3|} = \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^-} \dfrac{x(2x-3)}{-(2x-3)} = \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^-} (-x) = -\dfrac{3}{2}$

เนื่องจาก $|2x-3| = 2x-3$ เมื่อ $x>\dfrac{3}{2}$

จะได้ $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}\dfrac{2x^2-3x}{|2x-3|} = \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}\dfrac{x(2x-3)}{2x-3} = \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+} x = \dfrac{3}{2}$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-}\dfrac{2x^2-3x}{|2x-3|} \neq \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}\dfrac{2x^2-3x}{|2x-3|}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\dfrac{2x^2-3x}{|2x-3|}$ ไม่มีค่า

3. 1) เมื่อ $x<2$ จะได้ว่า $f(x) = x-1$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-}(x-1)\\ &= 2-1\\ &= 1\end{aligned}$$

2) เมื่อ $x>2$ จะได้ว่า $f(x) = x^2-4x+6$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+}(x^2-4x+6)\\ &= 2^2-4(2)+6\\ &= 2\end{aligned}$$

3) จาก 1) และ 2) จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ไม่มีค่า

4) เมื่อ x เข้าใกล้ 0 จะได้ว่า $f(x) = x-1$

และ
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}(x-1)\\ &= 0-1\\ &= -1\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

5) เมื่อ x เข้าใกล้ 5 จะได้ว่า $f(x) = x^2-4x+6$

และ
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5} f(x) &= \lim_{x\to 5}(x^2-4x+6)\\ &= 5^2-4(5)+6\\ &= 11\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 11$

4. 1) เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา จะได้ว่า $f(x) = x^2$

และ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0^2 = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

2) เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย จะได้ว่า $f(x) = x$

จะได้ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$

3) จาก 1) และ 2) จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

4) เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย จะได้ว่า $f(x) = x^2$

และ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x^2 = 2^2 = 4$

5) เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา จะได้ว่า $f(x) = 8 - x$

และ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (8 - x) = 8 - 2 = 6$

6) จาก 4) และ 5) จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ไม่มีค่า

7) เมื่อ x เข้าใกล้ 1 จะได้ว่า $f(x) = x^2$

จะได้ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1^2 = 1$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

8) เมื่อ x เข้าใกล้ 6 จะได้ว่า $f(x) = 8 - x$

จะได้ $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = \lim\limits_{x\to 6} (8 - x) = 8 - 6 = 2$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = 2$

5. 1) จาก x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย นั่นคือ $x<0$

จะได้ $|x| = -x$ และ $f(x)=\frac{-x}{x}=-1$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$

จาก x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา นั่นคือ $x>0$

จะได้ $|x| = x$ และ $f(x)=\frac{x}{x}=1$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ไม่มีค่า

2) จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

3) กรณี x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย จะได้ว่า $x<0$ ดังนั้น $|x| = -x$

จะได้ว่า $f(x)=\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1$

นั่นคือ
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\left(f(x)\cdot g(x)\right) &= \lim_{x\to 0^-}(-1)\cdot x\\ &= \lim_{x\to 0^-}(-x)\\ &= 0\end{aligned}$$

กรณี x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา จะได้ว่า $x>0$ ดังนั้น $|x| = x$

จะได้ว่า $f(x)=\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1$

จะได้
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x)\cdot g(x) &= \lim_{x\to 0^+} 1\cdot x\\ &= \lim_{x\to 0^+} x\\ &= 0\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\cdot g(x)=0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot g(x)=0$

6. 1) เนื่องจาก $f(x) = 1$ เมื่อ $1 \le x < 2$

จะได้ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 1$

$= 1$

2) เนื่องจาก $f(x) = 0$ เมื่อ $0 \le x < 1$

จะได้ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 0$

$= 0$

3) เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \ne \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ ไม่มีค่า

แบบฝึกหัด 2.2

1. 1) จากฟังก์ชัน f ที่กำหนด

จะได้ $f(0) = -1$

และ $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(3x-1) = 3(0)-1 = -1$

จะเห็นว่า $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$

2) จากฟังก์ชัน f ที่กำหนด

จะได้ $f(4) = -\frac{1}{4}$

และ
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4} f(x) &= \lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}\\ &= \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}\\ &= \lim_{x\to 4}(x+4)\\ &= 8\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\lim_{x\to 4} f(x) \neq f(4)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=4$

3) จากฟังก์ชัน f ที่กำหนด

จะได้ $f(1) = -\frac{2}{3}$

และ
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+1}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$

4) จากฟังก์ชัน f ที่กำหนด

จะได้ $f(x)=\begin{cases} x & \text{เมื่อ } x\geq 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x<0 \end{cases}$

ดังนั้น $f(0)=0$

จาก $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$

5) จากฟังก์ชัน f ที่กำหนด

จะได้ $f(-1)=-1$

และจาก $|x+1|=x+1$ เมื่อ $x\geq -1$ และ $|x+1|=-(x+1)$ เมื่อ $x<-1$

จะได้ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{|x+1|}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+} 1=1$

และ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{|x+1|}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-(x+1)}{x+1}=-\lim\limits_{x\to -1^-} 1=-1$

$= \lim\limits_{x\to -1^+}(-1)$

$= -1$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ไม่มีค่า

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=-1$

2. 1) **พิจารณาฟังก์ชัน** f

จะเห็นว่า $f(1)=2$ แต่ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ มีค่าน้อยกว่า 1

ซึ่งได้ว่า $f(1)$ ไม่เท่ากับ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[-1,1]$

พิจารณาฟังก์ชัน g

จะเห็นว่า $g(0)=2$ แต่ $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$ จึงได้ว่า $g(0)\neq \lim\limits_{x\to 0} g(x)$

นั่นคือ ฟังก์ชัน g ไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$

จะได้ว่า ฟังก์ชัน g ไม่ต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง $[-1,1]$

ดังนั้น ฟังก์ชัน g ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[-1,1]$

พิจารณาฟังก์ชัน h

จาก $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=2$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=1$

จึงได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ ไม่มีค่า

นั่นคือ ฟังก์ชัน h ไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$

จะได้ว่า ฟังก์ชัน h ไม่ต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง $[-1,1]$

ดังนั้น ฟังก์ชัน h ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[-1,1]$

2) **พิจารณาฟังก์ชัน** f

ให้ $c\in(-1,1)$ จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

นั่นคือ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง $(-1,1)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-1,1)$

พิจารณาฟังก์ชัน g

จะเห็นว่า $g(0)=2$ แต่ $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$ ซึ่งได้ว่า $g(0)\neq \lim\limits_{x\to 0} g(x)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน g ไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$

นั่นคือ ฟังก์ชัน g ไม่ต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง $(-1,1)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน g ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-1,1)$

พิจารณาฟังก์ชัน h

จะเห็นว่า $\lim_{x\to 0^-} h(x)=2$ และ $\lim_{x\to 0^+} h(x)=1$ ซึ่งได้ว่า $\lim_{x\to 0^-} h(x)\neq \lim_{x\to 0^+} h(x)$

นั่นคือ $\lim_{x\to 0} h(x)$ ไม่มีค่า

ดังนั้น ฟังก์ชัน h ไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$

นั่นคือ ฟังก์ชัน h ไม่ต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง $(-1,1)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน h ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-1,1)$

3) **พิจารณาฟังก์ชัน** f

เนื่องจาก $f(1)=2$ แต่ $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ มีค่าน้อยกว่า 1

ซึ่งได้ว่า $f(1)$ ไม่เท่ากับ $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

นั่นคือ f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$

จะได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจุดบน $[0,1]$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,1]$

พิจารณาฟังก์ชัน g

จะเห็นว่า $g(0)=2$ แต่ $\lim_{x\to 0^+} g(x)=1$ จะได้ว่า $g(0)\neq \lim_{x\to 0^+} g(x)$

นั่นคือ g ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$

จะได้ว่า g ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจุดบน $[0,1]$

ดังนั้น ฟังก์ชัน g ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,1]$

พิจารณาฟังก์ชัน h

จาก $h(0)=2$ แต่ $\lim_{x\to 0^+} h(x)=1$ จะได้ว่า $h(0)\neq \lim_{x\to 0^+} h(x)$

นั่นคือ h ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$

จะได้ว่า h ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจุดบน $[0,1]$

ดังนั้น ฟังก์ชัน h ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,1]$

4) **พิจารณาฟังก์ชัน** f

ให้ $c \in (-1,0)$ จะเห็นว่า $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

พิจารณาที่ $x = 0$ จะได้ว่า $f(0) = 1$ และ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$

นั่นคือ $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$

นั่นคือ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง $(-1,0]$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-1,0]$

พิจารณาฟังก์ชัน g

จะเห็นว่า $g(0) = 2$ แต่ $\lim_{x \to 0^-} g(x) = 1$ จึงได้ว่า $g(0) \neq \lim_{x \to 0^-} g(x)$

นั่นคือ g ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$

จะได้ว่า g ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจุดบน $(-1,0]$

ดังนั้น ฟังก์ชัน g ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-1,0]$

พิจารณาฟังก์ชัน h

ให้ $c \in (-1,0)$ จะเห็นว่า $\lim_{x \to c} h(x) = h(c)$ ดังนั้น h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-1,0)$

พิจารณาที่ $x = 0$ จะได้ $h(0) = 2$ และ $\lim_{x \to 0^-} h(x) = 2$

นั่นคือ $h(0) = 2 = \lim_{x \to 0^-} h(x)$

จะได้ว่า h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจุดบนช่วง $(-1,0]$

ดังนั้น ฟังก์ชัน h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-1,0]$

3. 1) ให้ $c \in (-\infty,4)$ จะได้ว่า $\lim_{x \to c} f(x) = \frac{2}{c-4} = f(c)$

นั่นคือ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง $(-\infty,4)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-\infty,4)$

2) ให้ $c \in (4,6)$ จะได้ว่า $\lim_{x \to c} f(x) = \frac{2}{c-4} = f(c)$

นั่นคือ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง $(4, 6)$

พิจารณา กรณี $x = 6$ จะได้ $f(6) = 1$ และ $\lim_{x \to 6} f(x) = \frac{2}{6-4} = 1$

นั่นคือ $f(6) = 1 = \lim_{x \to 6^-} f(x)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x=6$

จะได้ว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง $(4,6]$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(4,6]$

3) ให้ $c\in(4,\infty)$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\dfrac{2}{c-4}=f(c)$

นั่นคือ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง $(4,\infty)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(4,\infty)$

4. 1) จาก $(-\infty,1]=(-\infty,-2)\cup\{-2\}\cup(-2,1)\cup\{1\}$

และจากฟังก์ชัน g ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

(1) ให้ $c\in(-\infty,-2)$ จะได้ว่า $g(x)=2x-2$

และ $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\lim\limits_{x\to c}(2x-2)=2c-2=g(c)$

นั่นคือ ฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง $(-\infty,-2)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน g ต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,-2)$

(2) พิจารณาความต่อเนื่องที่จุด $x=-2$

เมื่อ x เข้าใกล้ -2 ทางด้านซ้าย จะได้ $g(x)=2x-2$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}(2x-2)=2(-2)-2=-6$

เมื่อ x เข้าใกล้ -2 ทางด้านขวา จะได้ $g(x)=x-4$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(x-4)=-2-4=-6$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -2} g(x)=-6$

จาก $g(-2)=(-2)-4=-6$

จะได้ว่า $g(-2)=-6=\lim\limits_{x\to -2} g(x)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน g ต่อเนื่องที่จุด $x=-2$

(3) ให้ $c \in (-2,1)$ จะได้ว่า $g(x) = x - 4$

ดังนั้น เนื่องจาก $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c}(x-4) = c - 4 = g(c)$

นั่นคือ ฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดบนช่วง $(-2,1)$

จาก $\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-}(x-4) = 1 - 4 = -3 = g(1)$

จะได้ว่า ฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 1$

ดังนั้น ฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-2,1]$

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ว่าฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ทุกจุดบนช่วง $(-\infty,-2)$, $\{-2\}$ และ $(-2,1]$

ดังนั้น ฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,1]$

2) จากข้อ 1) จะได้ว่า ฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-2,1]$

3) จาก $\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-}(x-4) = 1 - 4 = -3$

แต่ $\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+}(4-x) = 4 - 1 = 3$ จะได้ว่า $\lim_{x \to 1} g(x)$ ไม่มีค่า

นั่นคือ ฟังก์ชัน g ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

ดังนั้น ฟังก์ชัน g ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-2,2]$

4) จาก $\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+}(4-x) = 4 - 1 = 3$ แต่ $g(1) = -3$

จะได้ว่า $\lim_{x \to 1^+} g(x) \neq g(1)$ ไม่มีค่า

นั่นคือ ฟังก์ชัน g ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

ดังนั้น ฟังก์ชัน g ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[1,\infty)$

5. 1) ต้องการให้ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุด

ซึ่งคือ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,\infty)$

และ $(-\infty,\infty) = (-\infty,1) \cup \{1\} \cup (1,\infty)$

จะได้ว่า (1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$

(2) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,1)$

(3) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(1,\infty)$

จาก (1) พิจารณา ที่จุด $x = 1$

จาก $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(7x-2) = 5$ และ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} kx^2 = k$

และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$ จะได้ว่า $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

นั่นคือ $k=5$ ดังนั้น $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$

และจะเห็นว่า $f(1) = 5 = \lim_{x\to 1} f(x)$ จริง

จาก (2) พิจารณาบนช่วง $(-\infty,1)$

จะได้ว่า $f(x) = 7x-2$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันพหุนาม

โดยทฤษฎีบท 6 จะได้ว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดบนช่วง $(-\infty,1)$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,1)$ จริง

จาก (3) พิจารณาบนช่วง $(1,\infty)$

จะได้ว่า $f(x) = kx^2 = 5x^2$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันพหุนาม

โดยทฤษฎีบท 6 จะได้ว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดบนช่วง $(1,\infty)$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(1,\infty)$ จริง

ดังนั้น จาก (1), (2) และ (3) จะได้ว่าถ้า $k=5$ แล้วฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุด

2) จาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจุด

พิจารณาที่จุด $x=2$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(kx^2) = 4k$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(2x+k) = 4+k$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=2$ จะได้ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = 4k = 4+k$

นั่นคือ $k = \frac{4}{3}$

พิจารณา $f(x) = \begin{cases} 2x+\frac{4}{3} & ,x>2 \\ \frac{4}{3}x^2 & ,x\le 2 \end{cases}$

จะเห็นว่า กรณี $x>2$ จะได้ $f(x) = 2x+\frac{4}{3}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันพหุนาม โดยทฤษฎีบท 6 จะได้ว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุด

ในทำนองเดียวกัน กรณี $x \le 2$ จะได้ $f(x) = \frac{4}{3}x^2$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันพหุนาม

โดยทฤษฎีบท 6 จะได้ว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุด

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุด เมื่อ $k = \frac{4}{3}$

แบบฝึกหัด 2.3

1. ให้ $y = f(x) = 2x^2 - 3$

จะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก a เป็น $a+h$ คือ

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\left(2(a+h)^2-3\right)-\left(2a^2-3\right)}{h}\\ &= \frac{4ah+2h^2}{h}\\ &= 4a+2h\end{aligned}$$

1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 2 เป็น 2.2 คือ

$$\begin{aligned}\frac{f(2+0.2)-f(2)}{0.2} &= 4(2)+2(0.2)\\ &= 8.4\end{aligned}$$

2) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 2 เป็น 2.1 คือ

$$\begin{aligned}\frac{f(2+0.1)-f(2)}{0.1} &= 4(2)+2(0.1)\\ &= 8.2\end{aligned}$$

3) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 2 เป็น 2.01 คือ

$$\begin{aligned}\frac{f(2+0.01)-f(2)}{0.01} &= 4(2)+2(0.01)\\ &= 8.02\end{aligned}$$

4) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x=2$ คือ

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0}\left(4(2)+2h\right)\\ &= 8\end{aligned}$$

2. ให้ $y = f(x) = \frac{1}{x}$

จะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก a เป็น $a+h$ คือ

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}\\ &= \frac{-h}{ha(a+h)}\\ &= -\frac{1}{a(a+h)}\end{aligned}$$

1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 4 เป็น 5 คือ

$$\begin{aligned}\frac{f(4+1)-f(4)}{1} &= -\frac{1}{4(4+1)}\\ &= -\frac{1}{20}\end{aligned}$$

2) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 4 เป็น 4.1 คือ

$$\begin{aligned}\frac{f(4+0.1)-f(4)}{0.1} &= -\frac{1}{4(4+0.1)}\\ &= -\frac{1}{16.4} = -\frac{5}{82}\end{aligned}$$

3) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 4 เป็น 4.01 คือ

$$\begin{aligned}\frac{f(4+0.01)-f(4)}{0.01} &= -\frac{1}{4(4+0.01)}\\ &= -\frac{1}{16.04} = -\frac{25}{401}\end{aligned}$$

4) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x=4$ คือ

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} &= \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{4(4+h)}\right)\\ &= -\frac{1}{16}\end{aligned}$$

3. 1) ให้ A เป็นพื้นที่วงกลม (หน่วยเป็นตารางเซนติเมตร)

r เป็นรัศมีของวงกลม (หน่วยเป็นเซนติเมตร)

โดยที่ $A(r)=\pi r^2$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่วงกลมเทียบกับความยาวของรัศมี เมื่อความยาวของรัศมีเปลี่ยนจาก r เป็น $r+h$ เซนติเมตร คือ

$$\begin{aligned}\frac{A(r+h)-A(r)}{h} &= \frac{\pi(r+h)^2-\pi r^2}{h}\\ &= \frac{\pi(r^2+2rh+h^2)-\pi r^2}{h}\\ &= \frac{2\pi rh+\pi h^2}{h}\\ &= 2\pi r+\pi h\end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่วงกลมเทียบกับความยาวของรัศมี เมื่อความยาวของรัศมีเปลี่ยนจาก r เป็น $r+h$ เซนติเมตร คือ $2\pi r+\pi h$ ตารางเซนติเมตรต่อเซนติเมตร

2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่วงกลมเทียบกับความยาวของรัศมี ขณะรัศมียาว r เซนติเมตร คือ

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{A(r+h)-A(r)}{h} &= \lim_{h\to 0}(2\pi r+\pi h)\\ &= 2\pi r\end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่วงกลมเทียบกับความยาวของรัศมี ขณะรัศมียาว r เซนติเมตร คือ $2\pi r$ ตารางเซนติเมตรต่อเซนติเมตร

4. 1) ให้ x เป็นความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (หน่วยเป็นเซนติเมตร)

A เป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (หน่วยเป็นตารางเซนติเมตร)

โดยที่ $A(x)=x^2$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวด้าน เมื่อความยาวด้านเปลี่ยนจาก 10 เป็น 12 เซนติเมตร คือ

$$\frac{A(10+2)-A(10)}{2} = \frac{(10+2)^2-10^2}{2}$$
$$= 22$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวด้าน เมื่อความยาวด้านเปลี่ยนจาก 10 เป็น 12 เซนติเมตร คือ 22 ตารางเซนติเมตรต่อเซนติเมตร

2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวด้าน ขณะด้านยาว 10 เซนติเมตร คือ

$$\lim_{h\to 0}\frac{A(10+h)-A(10)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(10+h)^2-10^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{20h+h^2}{h}$$
$$= 20$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวด้านขณะด้านยาว 10 เซนติเมตร คือ 20 ตารางเซนติเมตรต่อเซนติเมตร

5. 1) ให้ x เป็นความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า (หน่วยเป็นเซนติเมตร)

A เป็นพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า (หน่วยเป็นตารางเซนติเมตร)

โดยที่ $A(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเทียบกับความยาวด้าน เมื่อความยาวด้านเปลี่ยนจาก 10 เป็น 9 เซนติเมตร คือ

$$\frac{A(10-1)-A(10)}{-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(9)^2-\frac{\sqrt{3}}{4}(10)^2}{-1}$$
$$= \frac{19\sqrt{3}}{4}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเทียบกับความยาวด้าน เมื่อความยาวด้านเปลี่ยนจาก 10 เป็น 9 เซนติเมตร คือ $\frac{19\sqrt{3}}{4}$ ตารางเซนติเมตรต่อเซนติเมตร

2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเทียบกับความยาวด้านขณะด้านยาว 10 เซนติเมตร คือ

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{A(10+h)-A(10)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(10+h)^2-\frac{\sqrt{3}}{4}(10)^2}{h}\\ &= 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเทียบกับความยาวด้านขณะด้านยาว 10 เซนติเมตร คือ $5\sqrt{3}$ ตารางเซนติเมตรต่อเซนติเมตร

6. จากอัตราการเปลี่ยนแปลงของ N เทียบกับ t ขณะที่ $t=3$ คือ

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{N(3+h)-N(3)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{8}{(3+h)+1}-\frac{8}{3+1}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{32-8(4+h)}{h(4+h)(4)}\\ &= -\frac{8}{16}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของ N เทียบกับ t ขณะที่ $t=3$ คือ $-\frac{1}{2}$ กรัมต่อนาที

7. จาก $PV = 6,000$ นั่นคือ $P = \frac{6,000}{V}$

ให้ $P(V) = \frac{6,000}{V}$

จะได้ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ P เทียบกับ V ขณะที่ $V = 100$ คือ

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{P(100+h)-P(100)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{6,000}{100+h}-\frac{6,000}{100}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{6000-60(100+h)}{h(100+h)} \\
&= -\frac{60}{100} \\
&= -0.6
\end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของ P เทียบกับ V ขณะที่ $V = 100$ คือ -0.6

8. ให้ r แทน ความยาวของรัศมีของฐานของกรวยกลมตรง

และ h แทน ความสูงของกรวยกลมตรง

1) ให้ V แทน ปริมาตรของกรวยกลมตรงที่มีรัศมีของฐานยาว r

โดยส่วนสูงมีค่าคงตัวเท่ากับ h

จะได้ $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของกรวยกลมตรงเทียบกับความยาวของรัศมีของฐาน ขณะรัศมียาว r หน่วย เมื่อส่วนสูงมีค่าเท่ากับ h คือ

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to 0}\frac{V(r+k)-V(r)}{k} &= \lim_{k\to 0}\frac{\frac{1}{3}\pi(r+k)^2 h-\frac{1}{3}\pi r^2 h}{k} \\
&= \lim_{k\to 0}\frac{2\pi rkh+\pi k^2 h}{3k} \\
&= \lim_{k\to 0}\frac{2\pi rh+\pi kh}{3} \\
&= \frac{2\pi rh}{3} \text{ ลูกบาศก์หน่วยต่อหน่วย}
\end{aligned}$$

2) ให้ V แทน ปริมาตรของกรวยกลมตรงที่มีความสูง h

โดยรัศมีของฐานมีค่าคงตัว เท่ากับ r

จะได้ $V(h)=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของกรวยกลมตรงเทียบกับส่วนสูง ขณะส่วนสูงยาว h หน่วย เมื่อความยาวของรัศมีของฐานมีค่าคงตัวเท่ากับ r คือ

$$\begin{aligned}\lim_{k\to 0}\frac{V(h+k)-V(h)}{k} &= \lim_{k\to 0}\frac{\frac{1}{3}\pi r^2(h+k)-\frac{1}{3}\pi r^2 h}{k}\\ &= \lim_{k\to 0}\frac{\pi r^2 k}{3k}\\ &= \lim_{k\to 0}\frac{\pi r^2}{3}\\ &= \frac{\pi r^2}{3} \quad \text{ลูกบาศก์หน่วยต่อหน่วย}\end{aligned}$$

9. ให้ $F(r)=\frac{k}{r^2}$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ F เทียบกับ r ขณะที่ r เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 0 คือ

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{F(r+h)-F(r)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{k}{(r+h)^2}-\frac{k}{r^2}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-2rkh-kh^2}{hr^2(r+h)^2}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-2rk-kh}{r^2(r+h)^2}\\ &= -\frac{2k}{r^3} \quad \text{นิวตันต่อเมตร}\end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของ F เทียบกับ r ขณะที่ r เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 0 คือ $-\frac{2k}{r^3}$ นิวตันต่อเมตร

10. จาก $s(t)$ แทนความสูงของปะการังเทียมจากระดับน้ำทะเล ณ เวลา t หลังจากหย่อนปะการังเทียมจากเฮลิคอปเตอร์

ดังนั้น $s(5)=0$ หมายถึง ความสูงของปะการังเทียมจากระดับน้ำทะเลเท่ากับ 0 ณ เวลา 5 วินาที

$s'(5)=-27$ หมายถึง ณ เวลา 5 วินาที หลังจากหย่อนปะการังเทียมจากเฮลิคอปเตอร์ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงของปะการังเทียมเป็น -27 เมตรต่อวินาที หรือเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ความสูงของปะการังเทียมลดลงด้วยอัตรา 27 เมตรต่อวินาที

11. 1)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(6x+3h) \\ &= 6x \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right) \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{x+h}\right)-\frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{hx(x+h)} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} \\ &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

4) $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h}\cdot\frac{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)-x}{h\left((x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{h}{h\left((x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}\right)$$

$$= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

12. 1) จาก $f(x) = x^2 - x$

จะได้ $$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(h^2 - h) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(h-1)$$

$$= -1$$

12. 2) จาก $f(x)=2x^3+1$

จะได้
$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(2(2+h)^3+1\right)-\left(2(2)^3+1\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(2\left(8+12h+6h^2+h^3\right)+1\right)-\left(2(8)+1\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{24h+12h^2+2h^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(24+12h+2h^2\right)\\
&= 24
\end{aligned}$$

3) จาก $f(x)=\frac{1}{x^2}$

จะได้
$$\begin{aligned}
f'(-1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(-1+h)^2}-\frac{1}{(-1)^2}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1-\left(-1+h^2\right)}{(-1+h)^2(-1)h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1-\left(1-2h+h^2\right)}{-h(-1+h)^2}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2h-h^2}{-h(-1+h)^2}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h-2}{(-1+h)^2}\\
&= \frac{-2}{-1}\\
&= 2
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 2.4

1. 1) จาก $y = -3$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(-3)$

$= 0$

2) จาก $y = x^3 + \frac{x}{3}$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3 + \frac{x}{3}\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{3}\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(x^3\right) + \frac{1}{3}\frac{d}{dx}(x)$

$= 3x^2 + \frac{1}{3}$

3) จาก $y = x^3 - 3x + 7$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 3x + 7\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(x^3\right) - \frac{d}{dx}(3x) + \frac{d}{dx}(7)$

$= \frac{d}{dx}\left(x^3\right) - 3\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(7)$

$= 3x^2 - 3 + 0$

$= 3x^2 - 3$

4) จาก $y = -5x^2 + x + 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

$= -5x^2 + x + 2x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-5x^2 + x + 2x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)$

$= \frac{dy}{dx}\left(-5x^2\right) + \frac{dy}{dx}(x) + \frac{dy}{dx}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{dy}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$

$= -5\frac{dy}{dx}\left(x^2\right) + \frac{dy}{dx}(x) + 2\frac{dy}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{dy}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$

$$= -5(2x)+1+2\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -10x+1+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

5) จาก $s = 4t^5-3t^2+t-8$

จะได้ $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4t^5-3t^2+t-8\right)$

$$= \frac{d}{dt}\left(4t^5\right)-\frac{d}{dt}\left(3t^2\right)+\frac{d}{dt}(t)-\frac{d}{dt}(8)$$

$$= 4\frac{d}{dt}\left(t^5\right)-3\frac{d}{dt}\left(t^2\right)+\frac{d}{dt}(t)-\frac{d}{dt}(8)$$

$$= 4\left(5t^4\right)-3(2t)+1-0$$

$$= 20t^4-6t+1$$

6) **วิธีที่ 1** เนื่องจาก $s = \left(4t^2+t-1\right)(t+2)$

จะได้ $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\left(4t^2+t-1\right)(t+2)\right)$

$$= \left(4t^2+t-1\right)\frac{d}{dt}(t+2)+(t+2)\frac{d}{dt}\left(4t^2+t-1\right)$$

$$= \left(4t^2+t-1\right)(1+0)+(t+2)(8t+1-0)$$

$$= \left(4t^2+t-1\right)+\left(8t^2+17t+2\right)$$

$$= 12t^2+18t+1$$

วิธีที่ 2 เนื่องจาก $s = \left(4t^2+t-1\right)(t+2)$

$$= 4t^3+9t^2+t-2$$

จะได้ $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4t^3+9t^2+t-2\right)$

$$= \frac{d}{dt}\left(4t^3\right)+\frac{d}{dt}\left(9t^2\right)+\frac{d}{dt}(t)-\frac{d}{dt}(2)$$

$$= 4\left(3t^2\right)+9(2t)+1-0$$

$$= 12t^2+18t+1$$

7) จาก $y = x(x+1)(x+2)$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x(x+1)(x+2)\right)$

$$= x\frac{d}{dx}\left((x+1)(x+2)\right)+(x+1)(x+2)\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\left((x+1)\frac{d}{dx}(x+2)+(x+2)\frac{d}{dx}(x+1)\right)+(x+1)(x+2)(1)$$

$$= x\left((x+1)(1+0)+(x+2)(1+0)\right)+(x+1)(x+2)$$

$$= x(x+1+x+2)+(x^2+3x+2)$$

$$= 2x^2+3x+x^2+3x+1$$

$$= 3x^2+6x+2$$

8) จาก $y = (4x-x^2)(x^2+3)$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left((4x-x^2)(x^2+3)\right)$

$$= (4x-x^2)\frac{d}{dx}(x^2+3)+(x^2+3)\frac{d}{dx}(4x-x^2)$$

$$= (4x-x^2)(2x+0)+(x^2+3)(4-2x)$$

$$= -4x^3+12x^2-6x+12$$

9) จาก $y = x(x^2+1)$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x(x^2+1)\right)$

$$= x\frac{d}{dx}(x^2+1)+(x^2+1)\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x(2x+0)+(x^2+1)(1)$$

$$= 3x^2+1$$

10) จาก $y = \frac{x^3+2}{x}$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+2}{x}\right)$

$$= \frac{x\frac{d}{dx}(x^3+2)-(x^3+2)\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x(3x^2+0)-(x^3+2)(1)}{x^2}$$

$$= \frac{2x^3-2}{x^2}$$

11) จาก $y = \dfrac{3}{3x^2+1}$

จะได้ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3}{3x^2+1}\right)$

$$= \frac{\left(3x^2+1\right)\frac{d}{dx}(3)-3\frac{d}{dx}\left(3x^2+1\right)}{\left(3x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(3x^2+1\right)(0)-3\left(3(2x)+0\right)}{\left(3x^2+1\right)^2}$$

$$= -\frac{18x}{\left(3x^2+1\right)^2}$$

12) จาก $y = \dfrac{1+3x}{1-3x}$

จะได้ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1+3x}{1-3x}\right)$

$$= \frac{(1-3x)\frac{dy}{dx}(1+3x)-(1+3x)\frac{dy}{dx}(1-3x)}{(1-3x)^2}$$

$$= \frac{(1-3x)(0+3)-(1+3x)(0-3)}{(1-3x)^2}$$

$$= \frac{(3-9x)+(3+9x)}{(1-3x)^2}$$

$$= \frac{6}{(1-3x)^2}$$

13) จาก $s = t\left(12-\dfrac{1}{t^2}\right)$

จะได้ $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(t\left(12-\dfrac{1}{t^2}\right)\right)$

$$= t\frac{d}{dt}\left(12-\frac{1}{t^2}\right)+\left(12-\frac{1}{t^2}\right)\frac{d}{dt}(t)$$

$$= t\frac{d}{dt}\left(12-t^{-2}\right)+\left(12-\frac{1}{t^2}\right)\frac{d}{dt}(t)$$

$$= t\left(0-(-2)t^{-3}\right)+\left(12-\frac{1}{t^2}\right)(1)$$

$$= t\left(\frac{2}{t^3}\right)+\left(12-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$= \frac{1}{t^2}+12$$

14) จาก $y = \dfrac{x^5-3x^2+5x-2}{x^2}$

จะได้ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^5-3x^2+5x-2}{x^2}\right)$

$$= \frac{x^2\frac{d}{dx}\left(x^5-3x^2+5x-2\right)-\left(x^5-3x^2+5x-2\right)\frac{d}{dx}\left(x^2\right)}{\left(x^2\right)^2}$$

$$= \frac{x^2\left(5x^4-6x+5-0\right)-\left(x^5-3x^2+5x-2\right)(2x)}{x^4}$$

$$= \frac{\left(5x^6-6x^3+5x^2\right)-\left(2x^6-6x^3+10x^2-4x\right)}{x^4}$$

$$= \frac{3x^6-5x^2+4x}{x^4}$$

$$= 3x^2-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}$$

15) จาก $s = \dfrac{5t^6+t-3}{\sqrt{t}}$

จะได้ $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{5t^6+t-3}{\sqrt{t}}\right)$

$$= \frac{\sqrt{t}\frac{d}{dt}\left(5t^6+t-3\right)-\left(5t^6+t-3\right)\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\right)}{\left(\sqrt{t}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{t}\right)\left(30t^5+1-0\right)-\left(5t^6+t-3\right)\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(\sqrt{t}\right)^2}$$

$$= \frac{30t^{\frac{11}{2}} + t^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}t^{\frac{11}{2}} - \frac{t^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{3}{2}t^{-\frac{1}{2}}}{t}$$

$$= \frac{55t^4\sqrt{t}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{3}{2t\sqrt{t}}$$

16) จาก $y = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\left(3x^3 + 27\right)$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\left(3x^3 + 27\right)\right)$

$$= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\frac{d}{dx}\left(3x^3 + 27\right) + \left(3x^3 + 27\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\left(9x^2 + 0\right) + \left(3x^3 + 27\right)\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)$$

$$= 6x + 3 - \frac{27}{x^2} - \frac{54}{x^3}$$

17) จาก $y = \frac{4x+1}{x^2-5}$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{4x+1}{x^2-5}\right)$

$$= \frac{\left(x^2-5\right)\frac{d}{dx}(4x+1) - (4x+1)\frac{d}{dx}\left(x^2-5\right)}{\left(x^2-5\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^2-5\right)(4+0) - (4x+1)(2x-0)}{\left(x^2-5\right)^2}$$

$$= -\frac{4x^2+2x+20}{\left(x^2-5\right)^2}$$

18) จาก $y = \left(\frac{3x+2}{x}\right)\left(x^{-5}+1\right)$

จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\left(\frac{3x+2}{x}\right)\left(x^{-5}+1\right)\right)$$

$$= \left(\frac{3x+2}{x}\right)\frac{d}{dx}\left(x^{-5}+1\right) + \left(x^{-5}+1\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{3x+2}{x}\right)$$

$$= \left(\frac{3x+2}{x}\right)\left(-5x^{-6}+0\right)+\left(x^{-5}+1\right)\left(\frac{x\frac{d}{dx}(3x+2)-(3x+2)\frac{d}{dx}(x)}{x^2}\right)$$

$$= \left(\frac{3x+2}{x}\right)\left(-5x^{-6}\right)+\left(x^{-5}+1\right)\left(\frac{x(3+0)-(3x+2)(1)}{x^2}\right)$$

$$= (3x+2)\left(-5x^{-7}\right)+\left(x^{-7}+x^{-2}\right)(-2)$$

$$= -15x^{-6}-10x^{-7}-2x^{-7}-2x^{-2}$$

$$= -\frac{2}{x^2}-\frac{15}{x^6}-\frac{12}{x^7}$$

19) จาก $y = \dfrac{3}{\sqrt{x}+2}$

จะได้ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}+2}\right)$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\frac{d}{dx}(3)-3\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)(0)-3\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+0\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}$$

$$= -\frac{3}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^2}$$

20) จาก $y = \left(2x^7-x^2\right)\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\left(2x^7-x^2\right)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$

$$= \left(2x^7-x^2\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\frac{d}{dx}\left(2x^7-x^2\right)$$

$$= \left(2x^7 - x^2\right)\left(\frac{(x+1)\frac{d}{dx}(x-1)-(x-1)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}\right)+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(14x^6-2x\right)$$

$$= \left(2x^7 - x^2\right)\left(\frac{(x+1)(1-0)-(x-1)(1+0)}{(x+1)^2}\right)+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(14x^6-2x\right)$$

$$= \frac{\left(2x^7-x^2\right)(2)+(x-1)\left(14x^6-2x\right)(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{14x^8+4x^7-14x^6-2x^3-2x^2+2x}{(x+1)^2}$$

2. 1) จาก $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 2x^3 - x^{-\frac{1}{2}}$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(2x^3 - x^{-\frac{1}{2}}\right)$

$$= 6x^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 6x^2 + \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

ดังนั้น $f'(1) = 6(1)^2 + \frac{1}{2(1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{13}{2}$

2) จาก $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5\right)$

$$= x^4 - x^2 + x - 4$$

ดังนั้น $f'(1) = 1^4 - 1^2 + 1 - 4 = -3$

3) จาก $f(x) = (2x^2-3x+1)(x-x^2)$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}\left((2x^2-3x+1)(x-x^2)\right)$

$$= (2x^2-3x+1)\frac{d}{dx}(x-x^2)+(x-x^2)\frac{d}{dx}(2x^2-3x+1)$$

$$= (2x^2-3x+1)(1-2x)+(x-x^2)(4x-3+0)$$

$$= (2x^2-3x+1)(1-2x)+(x-x^2)(4x-3)$$

ดังนั้น

$$f'(-1) = \left(2(-1)^2-3(-1)+1\right)\left(1-2(-1)\right)+\left((-1)-(-1)^2\right)\left(4(-1)-3\right) = 32$$

4) จาก $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$

$$= \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(2x-1)-(2x-1)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(2-0)-(2x-1)(1+0)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3}{(x+1)^2}$$

ดังนั้น $f'(2) = \frac{3}{(2+1)^2} = \frac{1}{3}$

3. 1) จาก $g(x) = \sqrt{x}f(x) = x^{\frac{1}{2}}f(x)$

จะได้ $g'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}f(x)\right)$

$$= x^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(f(x)) + f(x)\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \sqrt{x}f'(x) + f(x)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \sqrt{x}f'(x) + \frac{f(x)}{2\sqrt{x}}$$

ดังนั้น $g'(4) = \sqrt{4}f'(4) + \frac{f(4)}{2\sqrt{4}}$

$$= \sqrt{4}(-5) + \frac{3}{2\sqrt{4}}$$

$$= -\frac{37}{4}$$

2) จาก $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

จะได้ $g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$

$$= \frac{x\frac{d}{dx}(f(x)) - f(x)\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x\cdot f'(x) - f(x)(1)}{x^2}$$

$$= \frac{x\cdot f'(x) - f(x)}{x^2}$$

ดังนั้น $g'(4) = \frac{4\cdot f'(4) - f(4)}{4^2}$

$$= \frac{4\cdot(-5) - 3}{4^2}$$

$$= -\frac{23}{16}$$

4. 1) จาก $F(x) = 2f(x)+4g(x)$

จะได้ $F'(x) = \frac{d}{dx}(2f(x)+4g(x))$

$= 2f'(x)+4g'(x)$

ดังนั้น $F'(2) = 2f'(2)+4g'(2)$

$= 2(-1)+4(0)$

$= -2$

2) จาก $F(x) = \frac{f(x)+3g(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}+3$

จะได้ $F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}+3\right)$

$= \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

ดังนั้น $F'(2) = \frac{g(2)f'(2)-f(2)g'(2)}{(g(2))^2}$

$= \frac{(2)(-1)-(1)(0)}{(2)^2}$

$= -\frac{1}{2}$

5. จาก $P(x) = ax^2+bx+c$

จะได้ $P'(x) = \frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)$

$= 2ax+b$

จาก $P'(0) = -3$

จะได้ $2a(0)+b = -3$

นั่นคือ $b = -3$

จะได้ว่า $P'(x) = 2ax-3$

จาก $P'(1) = -1$

จะได้ $2a(1)-3 = -1$

นั่นคือ $a = 1$

จะได้ว่า $P'(x) = 2x-3$

และ $P(x) = x^2-3x+c$

จาก $P(1) = 1$

จะได้ $(1)^2-3(1)+c = 1$

นั่นคือ $c = 3$

ดังนั้น $P(x) = x^2-3x+3$

6. 1) จาก $s(x) = \dfrac{3x+145}{x+8}$ เมื่อ x แทนจำนวนวันตั้งแต่เริ่มต้นงานมหกรรมลดราคา และ ณ เวลาเริ่มต้นมหกรรมลดราคา ซึ่ง $x=0$

จะได้ $s(0) = \dfrac{3(0)+145}{0+8} = 18.125$

ดังนั้น จำนวนสินค้า ณ เวลาเริ่มต้นมหกรรมลดราคา มีอยู่ประมาณ 1,813 ชิ้น

2) จะได้ $s(10) = \dfrac{3(10)+145}{10+8} \approx 9.722$

ดังนั้น จำนวนสินค้าคงเหลือในวันที่ 10 มีประมาณ 972 ชิ้น

จาก
$$\begin{aligned} s'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{3x+145}{x+8}\right) \\ &= \frac{(x+8)\frac{d}{dx}(3x+145)-(3x+145)\frac{d}{dx}(x+8)}{(x+8)^2} \\ &= \frac{(x+8)(3+0)-(3x+145)(1+0)}{(x+8)^2} \\ &= -\frac{121}{(x+8)^2} \end{aligned}$$

จะได้ $s'(10) = -\dfrac{121}{(10+8)^2} \approx -0.373$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนสินค้าในวันที่ 10 คือ -37 ชิ้นต่อวัน

3) จะได้ $s(15) = \dfrac{3(15)+145}{15+8} \approx 8.261$

ดังนั้น จำนวนสินค้าคงเหลือในวันที่ 15 มีประมาณ 826 ชิ้น

จาก $s'(x) = -\dfrac{121}{(x+8)^2}$

จะได้ $s'(15) = -\dfrac{121}{(15+8)^2} \approx -0.229$

$= -\dfrac{121}{529}$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนสินค้าในวันที่ 15 คือ -23 ชิ้นต่อวัน

4) จะได้ $s(25) = \dfrac{3(25)+145}{25+8} \approx 0.667$

ดังนั้น จำนวนสินค้าคงเหลือในวันที่ 25 มีประมาณ 667 ชิ้น

จาก $s'(x) = -\dfrac{121}{(x+8)^2}$

จะได้ $s'(25) = -\dfrac{121}{(25+8)^2} \approx -0.111$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนสินค้าในวันที่ 25 คือ -11 ชิ้นต่อวัน

5) จาก $S'(x) = -\dfrac{121}{(x+8)^2}$

และ $(x+8)^2 > 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{N}$

ดังนั้น $S'(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{N}$

จะเห็นว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนสินค้าคงเหลือเป็นจำนวนลบ หมายความว่าจำนวนสินค้าที่เหลือจะลดลงเมื่อจำนวนวันเพิ่มขึ้น

นั่นคือ มีลูกค้าเข้ามาอุดหนุนสินค้าอยู่ตลอด

แต่อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนสินค้าคงเหลือจาก 2), 3) และ 4) จะเห็นว่า

$\dfrac{121}{324} > \dfrac{121}{529} > \dfrac{1}{9}$

แสดงว่าการเปลี่ยนแปลงของจำนวนสินค้าคงเหลือลดลงเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น

นั่นคือ ยอดขายสินค้าของร้านนี้ลดลง เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น

ดังนั้น ในช่วงวันที่ 10 ถึงวันที่ 25 ร้านค้านี้ขายสินค้าได้ทุกวัน แต่ขายได้น้อยลงเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น

7. ให้ P แทนรายรับรวม (หน่วยเป็นบาท) ที่ได้จากการขายสินค้าหลังจากปีปัจจุบัน

จะได้ว่า $P = P(x)$

n แทนจำนวนสินค้าที่ขายได้ (หน่วยเป็นชิ้น) ในปีที่ x ปีหลังจากปีปัจจุบัน

$q(x)$ แทนราคาของสินค้า (หน่วยเป็นบาท) ในปีที่ x ปีหลังจากปีปัจจุบัน

จะได้ $n(x) = 200,000 - 6,000x$

$q(x) = 250 + 10x$

และ $P(x) = n(x) \cdot q(x) = (200,000 - 6,000x)(250 + 10x)$

จะได้ $P(x) = \frac{d}{dx}((200,000 - 6,000x)(250 + 10x))$

$= (200,000 - 6,000x)(10) + (250 + 10x)(-6,000)$

นั่นคือ $P'(3) = (200,000 - 6,000(3))(10) + (250 + 10(3))(-6,000)$

$= 140,000$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของรายรับรวมที่ได้จากการขายสินค้าชนิดนี้ในปีที่ 3 คือ 140,000 บาท

แบบฝึกหัด 2.5

1. 1) ให้ $u = 2x+3$

ดังนั้น $y = (2x+3)^5 = u^5$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \frac{d}{du}\left(u^5\right)\cdot\frac{d}{dx}(2x+3)\\ &= \left(5u^4\right)(2)\\ &= 10(2x+3)^4\end{aligned}$$

2) ให้ $u = 1-3x$

ดังนั้น $y = (1-3x)^3 = u^3$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \frac{d}{du}\left(u^3\right)\cdot\frac{d}{dx}(1-3x)\\ &= \left(3u^2\right)(-3)\\ &= -9(1-3x)^2\end{aligned}$$

3) ให้ $u = 3-4x^2$

ดังนั้น $y = \left(3-4x^2\right)^4 = u^4$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \frac{d}{du}\left(u^4\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(3-4x^2\right)\\ &= \left(4u^3\right)(-8x)\\ &= -32x\left(3-4x^2\right)^3\end{aligned}$$

4) ให้ $u = 2 - 3x + 4x^2$

ดังนั้น $y = \left(2 - 3x + 4x^2\right)^3 = u^3$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \frac{d}{du}\left(u^3\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(2-3x+4x^2\right)\\ &= \left(3u^2\right)\left(-3+8x\right)\\ &= 3\left(2-3x+4x^2\right)^2\left(-3+8x\right)\end{aligned}$$

5) ให้ $u = x^3 - 2x$

ดังนั้น $y = \left(x^3 - 2x\right)^4 = u^4$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \frac{d}{du}\left(u^4\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^3-2x\right)\\ &= \left(4u^3\right)\left(3x^2-2\right)\\ &= 4\left(x^3-2x\right)^3\left(3x^2-2\right)\end{aligned}$$

6) ให้ $u = 1 - 2x$

ดังนั้น $y = \sqrt{1-2x} = u^{\frac{1}{2}}$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \frac{d}{du}\left(u^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(1-2x\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right)\left(-2\right)\\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\end{aligned}$$

7) ให้ $u = 3x^2 + 2$

ดังนั้น $y = \sqrt{3x^2+2} = u^{\frac{1}{2}}$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \frac{d}{du}\left(u^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(3x^2+2\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right)(6x)\\ &= \frac{3x}{\sqrt{3x^2+2}}\end{aligned}$$

8) ให้ $u = x^2 - 3$

ดังนั้น $y = \sqrt[3]{x^2-3} = u^{\frac{1}{3}}$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \frac{d}{du}\left(u^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2-3\right)\\ &= \left(\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\right)(2x)\\ &= \frac{2x}{3\left(x^2-3\right)^{\frac{2}{3}}}\end{aligned}$$

9) ให้ $u = 2t^2 - 1$

ดังนั้น $s = \left(2t^2 - 1\right)^{-3} = u^{-3}$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \frac{ds}{du}\cdot\frac{du}{dt}\\ &= \frac{d}{du}\left(u^{-3}\right)\cdot\frac{d}{dt}\left(2t^2-1\right)\\ &= \left(-3u^{-4}\right)(4t)\end{aligned}$$

$$= -12t\left(2t^2 - 1\right)^{-4}$$

$$= -\frac{12t}{\left(2t^2-1\right)^4}$$

10) ให้ $u = t^2 - 3t + 2$

ดังนั้น $s = \dfrac{1}{\left(t^2-3t+2\right)^2} = u^{-2}$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{du}\cdot\frac{du}{dt}$$

$$= \frac{d}{du}\left(u^{-2}\right)\cdot\frac{d}{dt}\left(t^2-3t+2\right)$$

$$= \left(-2u^{-3}\right)\left(2t-3\right)$$

$$= -\frac{2\left(2t-3\right)}{\left(t^2-3t+2\right)^3}$$

11) ให้ $u = x^2 + 2x$

ดังนั้น $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}} = u^{-\frac{1}{2}}$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du}\left(u^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2+2x\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}\right)\left(2x+2\right)$$

$$= -\frac{x+1}{\left(x^2+2x\right)^{\frac{3}{2}}}$$

12) ให้ $u = x^2 - 2x + 3$

ดังนั้น $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 3}} = u^{-\frac{1}{3}}$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \frac{d}{du}\left(u^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(x^2 - 2x + 3\right) \\
&= \left(-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}\right)(2x - 2) \\
&= -\frac{2x - 2}{3\left(x^2 - 2x + 3\right)^{\frac{4}{3}}}
\end{aligned}$$

13) จาก $y = (x-3)^3(2x+1)$

จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left((x-3)^3(2x+1)\right) \\
&= (x-3)^3 \frac{d}{dx}(2x+1) + (2x+1)\frac{d}{dx}\left((x-3)^3\right) \\
&= (x-3)^3(2) + (2x+1)\frac{d}{dx}\left((x-3)^3\right)
\end{aligned}$$

พิจารณา $\dfrac{d}{dx}(x-3)^3$

ให้ $u = x - 3$

ดังนั้น $(x-3)^3 = u^3$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left((x-3)^3\right) &= \frac{d}{du}\left(u^3\right) \cdot \frac{d}{dx}(x-3) \\
&= \left(3u^2\right)(1) \\
&= 3(x-3)^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= (x-3)^3(2) + (2x+1)\frac{d}{dx}\left((x-3)^3\right) \\
&= (x-3)^3(2) + (2x+1)\left(3(x-3)^2\right) \\
&= (8x-3)(x-3)^2
\end{aligned}$$

14) ให้ $u=\dfrac{2x+1}{1-2x}$

ดังนั้น $y=\left(\dfrac{2x+1}{1-2x}\right)^3=u^3$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

$$=\frac{d}{du}\left(u^3\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{1-2x}\right)$$

$$=\left(3u^2\right)\left(\frac{(1-2x)\frac{d}{dx}(2x+1)-(2x+1)\frac{d}{dx}(1-2x)}{(1-2x)^2}\right)$$

$$=3\left(\frac{2x+1}{1-2x}\right)^2\left(\frac{(1-2x)(2)-(2x+1)(-2)}{(1-2x)^2}\right)$$

$$=3\left(\frac{2x+1}{1-2x}\right)^2\left(\frac{4}{(1-2x)^2}\right)$$

$$=\frac{12(2x+1)^2}{(1-2x)^4}$$

15) จาก $y=\dfrac{(2x+3)^3}{\left(4x^2-1\right)^8}$

จะได้ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{(2x+3)^3}{\left(4x^2-1\right)^8}\right)$

$$=\frac{\left(4x^2-1\right)^8\frac{d}{dx}\left((2x+3)^3\right)-(2x+3)^3\frac{d}{dx}\left(\left(4x^2-1\right)^8\right)}{\left(\left(4x^2-1\right)^8\right)^2}$$

พิจารณา $\dfrac{d}{dx}(2x+3)^3$

ให้ $u=2x+3$

ดังนั้น $(2x+3)^3=u^3$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ $\frac{d}{dx}\left((2x+3)^3\right) = \frac{d}{du}\left(u^3\right)\cdot\frac{d}{dx}(2x+3)$

$= \left(3u^2\right)(2)$

$= 6(2x+3)^2$

พิจารณา $\frac{d}{dx}\left(4x^2-1\right)^8$

ให้ $y = 4x^2-1$

ดังนั้น $\left(4x^2-1\right)^8 = y^8$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ $\frac{d}{dx}\left(\left(4x^2-1\right)^8\right) = \frac{d}{dx}\left(y^8\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(4x^2-1\right)$

$= \left(8y^7\right)(8x)$

$= 64x\left(4x^2-1\right)^7$

ดังนั้น
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(4x^2-1\right)^8\frac{d}{dx}\left((2x+3)^3\right)-(2x+3)^3\frac{d}{dx}\left(\left(4x^2-1\right)^8\right)}{\left(\left(4x^2-1\right)^8\right)^2}$$

$$= \frac{\left(4x^2-1\right)^8\left(6(2x+3)^2\right)-(2x+3)^3\left(64x\left(4x^2-1\right)^7\right)}{\left(\left(4x^2-1\right)^8\right)^2}$$

$$= \frac{\left(4x^2-1\right)^7(2x+3)^2\left(6\left(4x^2-1\right)-(2x+3)64x\right)}{\left(4x^2-1\right)^{16}}$$

$$= \frac{(2x+3)^2\left(24x^2-6-128x^2-192x\right)}{\left(4x^2-1\right)^9}$$

$$= \frac{(2x+3)^2\left(-104x^2-192x-6\right)}{\left(4x^2-1\right)^9}$$

$$= -\frac{2\left(52x^2+96x+3\right)(2x+3)^2}{\left(4x^2-1\right)^9}$$

2. **วิธีที่ 1** จาก $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

จะได้

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{\left(x^2+1\right)\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^2+1\right)(1) - x(2x+0)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

จาก $g(x) = \sqrt{3x-1}$

ให้ $u = 3x-1$

จะได้ว่า $g(x) = \sqrt{3x-1} = u^{\frac{1}{2}}$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$g'(x) = \frac{dg}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du}\left(u^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}(3x-1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right)(3)$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

เนื่องจาก $F(x) = f(g(x))$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ $F'(x) = (fog)'(x)$

$$= \frac{1-(g(x))^2}{\left((g(x))^2+1\right)^2}\cdot\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

$$= \frac{1-\left(\sqrt{3x-1}\right)^2}{\left(\left(\sqrt{3x-1}\right)^2+1\right)^2}\cdot\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

$$= \frac{2-3x}{6x^2\sqrt{3x-1}}$$

วิธีที่ 2 จาก

$$\begin{aligned} F(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\sqrt{3x-1}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3x-1}}{\left(\sqrt{3x-1}\right)^2+1} \\ &= \frac{\sqrt{3x-1}}{3x} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{3x-1}}{3x}\right) \\ &= \frac{3x\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3x-1}\right)-\sqrt{3x-1}\frac{d}{dx}(3x)}{(3x)^2} \\ &= \frac{3x\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3x-1}\right)-\sqrt{3x-1}(3)}{9x^2} \end{aligned}$$

ให้ $u = 3x-1$

จะได้ว่า $\sqrt{3x-1} = u^{\frac{1}{2}}$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\sqrt{3x-1}\right) &= \frac{d}{du}\left(\sqrt{u}\right)\cdot\frac{d}{dx}(3x-1) \\ &= \left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right)(3) \\ &= \frac{3}{2\sqrt{3x-1}} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{3x\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3x-1}\right)-\sqrt{3x-1}(3)}{9x^2} \\ &= \frac{3x\left(\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}\right)-3\sqrt{3x-1}}{9x^2} \\ &= \frac{9x-6(3x-1)}{9x^2\left(2\sqrt{3x-1}\right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{6-9x}{9x^2\left(2\sqrt{3x-1}\right)}$$

$$= \frac{2-3x}{6x^2\sqrt{3x-1}}$$

3. จาก $F(x) = f(g(x))$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ $F'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

ดังนั้น $F'(2) = f'(g(2))\cdot g'(2)$

$$= f'(4)\cdot 5$$

$$= 9\times 5$$

$$= 45$$

4. จาก $f(x) = \frac{g(x)}{x}$ $x^{-1}g(x)$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{x}\right)$

$$= \frac{x\frac{d}{dx}(g(x)) - g(x)\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x\cdot g'(x) - g(x)}{x^2}$$

จาก $F(x) = f(g(x))$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ $F'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

ดังนั้น $F'(2) = f'(g(2))\cdot g'(2)$

$$= f'(3)\cdot 9$$

$$= \left(\frac{3g'(3)-g(3)}{3^2}\right)\cdot 9$$

$$= \left(\frac{3(8)-2}{3^2}\right)\cdot 9$$

$$= 22$$

5. 1) จาก $x(t) = \dfrac{300t^2}{1+t^2}$

จะได้ $$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{300t^2}{1+t^2}\right)$$

$$= \frac{\left(1+t^2\right)\frac{d}{dt}\left(300t^2\right)-300t^2\frac{d}{dt}\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(1+t^2\right)\left(600t\right)-300t^2\left(2t\right)}{\left(1+t^2\right)^2}$$

$$= \frac{600t}{\left(1+t^2\right)^2}$$

จาก $P(x) = 2\sqrt{x}-20 = 2x^{\frac{1}{2}}-20$

จะได้ $$\frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2x^{\frac{1}{2}}-20\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)-0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}$$

2) โดยกฎลูกโซ่ จะได้ $$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{600t}{\left(1+t^2\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{300t^2}{1+t^2}}}\cdot\frac{600t}{\left(1+t^2\right)^2}$$

ดังนั้น
$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{300(2)^2}{1+2^2}}}\cdot\frac{600(2)}{\left(1+2^2\right)^2}$$
$$= \frac{600(2)}{\frac{2\left(10\sqrt{3}\right)}{\sqrt{5}}\cdot 25}$$
$$= \frac{4\sqrt{15}}{5}$$

6. ให้ $u = t+10$

จาก $N(t) = (t+10)^5 = u^5$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้
$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN}{du}\cdot\frac{du}{dt}$$
$$= \frac{d}{du}\left(u^5\right)\cdot\frac{d}{dt}(t+10)$$
$$= \left(5u^4\right)(1)$$
$$= 5(t+10)^4$$

จากที่ t แทนจำนวนชั่วโมง จะได้ว่า $t>0$ นั่นคือ $5(t+10)^4>0$ จะได้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียเป็นบวก นั่นคือ แบคทีเรียมีจำนวนเพิ่มขึ้นเมื่อเวลาผ่านไปโดยอยู่ในรูปกำลังสี่ของเวลา

ดังนั้น $\frac{dN}{dt}=5(t+10)^4$ และแบคทีเรียมีจำนวนเพิ่มขึ้นเมื่อเวลาผ่านไปโดยอยู่ในรูปกำลังสี่ของเวลา

7. ให้ $u = 1+\frac{r}{1200}$

เนื่องจาก $A(r) = 10^6\left(1+\frac{r}{1200}\right)^{216} = 10^6 u^{216}$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned} A'(r) &= \frac{dA}{du}\cdot\frac{du}{dr} \\ &= \frac{d}{du}\left(10^6 u^{216}\right)\cdot\frac{d}{dr}\left(1+\frac{r}{1200}\right) \\ &= \left(10^6(216)u^{215}\right)\left(\frac{1}{1200}\right) \\ &= 180,000\left(1+\frac{r}{1200}\right)^{215} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} A'(1.5) &= 180,000\left(1+\frac{1.5}{1200}\right)^{215} \\ A'(2.5) &= 180,000\left(1+\frac{2.5}{1200}\right)^{215} \\ A'(3) &= 180,000\left(1+\frac{3}{1200}\right)^{215} \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนเงินในบัญชีของวนิดา เทียบกับอัตราดอกเบี้ย 1.5%, 2.5% และ 3% ต่อปี คือ $180,000\left(1+\frac{1.5}{1200}\right)^{215}$, $180,000\left(1+\frac{2.5}{1200}\right)^{215}$ และ $180,000\left(1+\frac{3}{1200}\right)^{215}$ ตามลำดับ

แบบฝึกหัด 2.6

1. 1) จาก $y = x^2 - 3x$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^2 - 3x\right) = 2x - 3$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(3, 0)$ คือ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = 3$

เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(3, 0)$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3, 0)$ และมีความชัน 3

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(3, 0)$ คือ $y - 0 = 3(x - 3)$

นั่นคือ $y = 3x - 9$

2) จาก $y = 5x^2 - 6$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(5x^2 - 6\right) = 10x$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(2, 14)$ คือ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = 20$

เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(2, 14)$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 14)$ และมีความชัน 20

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(2, 14)$ คือ $y - 14 = 20(x - 2)$

นั่นคือ $y = 20x - 26$

3) จาก $y = x - x^2$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x - x^2\right) = 1 - 2x$

เมื่อ $x = \frac{1}{2}$ จะได้ $y = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ คือ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{1}{2}} = 0$

เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดซึ่ง $x = \frac{1}{2}$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ และมีความชัน 0

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดซึ่ง $x = \frac{1}{2}$ คือ $y - \frac{1}{4} = 0\left(x - \frac{1}{2}\right)$

นั่นคือ $y = \frac{1}{4}$

4) จาก $y=\dfrac{x^2+2}{x}$

จะได้ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2+2}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x+2x^{-1}\right) = 1-2x^{-2}$

เมื่อ $x=1$ จะได้ $y=\dfrac{1^2+2}{1}=3$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(1,3)$ คือ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1} = -1$

เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดซึ่ง $x=1$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,3)$ และมีความชัน -1

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดซึ่ง $x=1$ คือ $y-3=-(x-1)$

นั่นคือ $y=-x+4$

5) จาก $y=\sqrt[3]{3x^2-4}$

ให้ $u = 3x^2-4$

ดังนั้น $y = u^{\frac{1}{3}}$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \frac{d}{du}\left(u^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(3x^2-4\right)\\ &= \left(\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\right)(6x)\\ &= \frac{2x}{\sqrt[3]{\left(3x^2-4\right)^2}}\end{aligned}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(-2,2)$ คือ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = -1$

เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(-2,2)$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2,2)$ และมีความชัน -1

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(-2,2)$ คือ $y-2=(-1)(x-(-2))$

นั่นคือ $y=-x$

6) จาก $y=\dfrac{5}{\left(x^2-x-1\right)^2}$

ให้ $u = x^2-x-1$

ดังนั้น $y = \dfrac{5}{u^2}$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \frac{d}{du}\left(\frac{5}{u^2}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2-x-1\right)\\ &= \left(-\frac{10}{u^3}\right)(2x-1)\\ &= -\frac{10(2x-1)}{\left(x^2-x-1\right)^3}\end{aligned}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $\left(3,\frac{1}{5}\right)$ คือ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=3} = -\dfrac{2}{5}$

เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $\left(3,\frac{1}{5}\right)$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $\left(3,\frac{1}{5}\right)$ และมีความชัน $-\dfrac{2}{5}$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $\left(3,\frac{1}{5}\right)$ คือ $y-\dfrac{1}{5}=\left(-\dfrac{2}{5}\right)(x-3)$

นั่นคือ $y=-\dfrac{2}{5}x+\dfrac{7}{5}$

2. เนื่องจาก กราฟของ $y=ax$ ขนานกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=3x^2+8$ ที่จุด $(1,11)$

ดังนั้น เส้นตรง $y=ax$ มีความชันเท่ากับความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=3x^2+8$ ที่จุด $(1,11)$

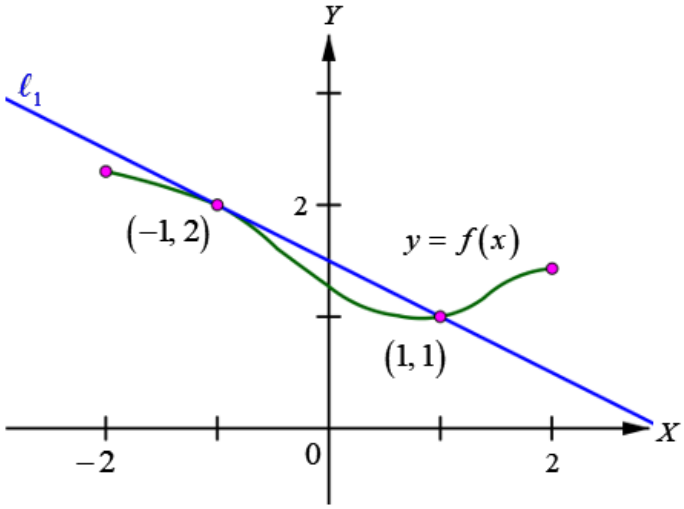
จะได้ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(3x^2+8) = 6x$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(1,11)$ คือ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 6$

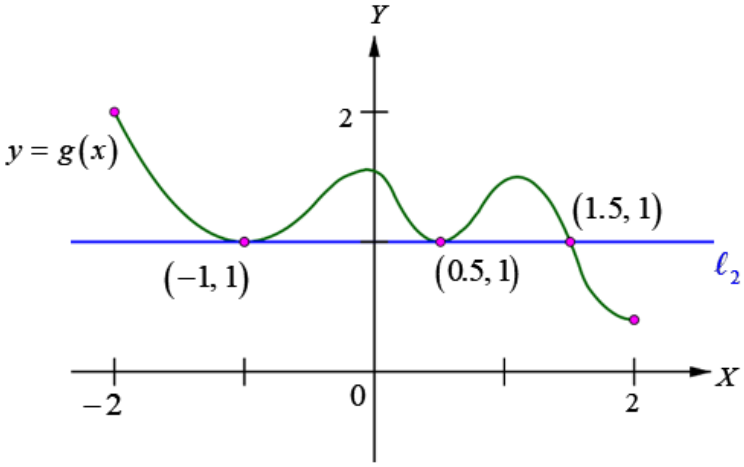
เนื่องจาก ความชันของเส้นตรง $y=ax$ คือ a

ดังนั้น $a=6$

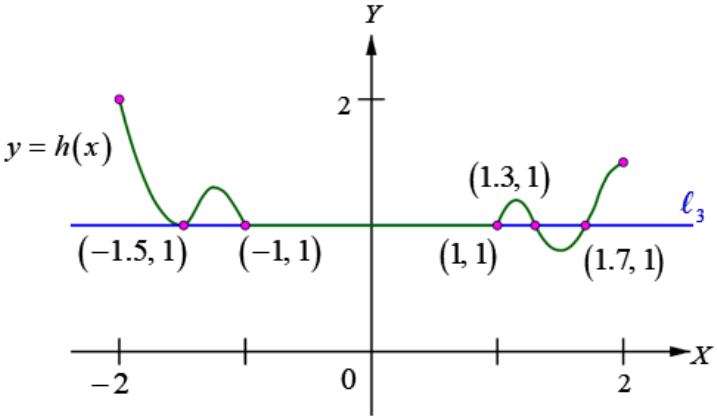
3. 1) จากเงื่อนไขของโจทย์ สามารถเขียนกราฟของเส้นตรง ℓ_1 และกราฟของฟังก์ชัน f ได้มากกว่าหนึ่งแบบ แต่ในที่นี้จะนำเสนอเป็นแนวทางตัวอย่างเพียงแบบเดียวเท่านั้น



2) จากเงื่อนไขของโจทย์ สามารถเขียนกราฟของเส้นตรง ℓ_2 และกราฟของฟังก์ชัน g ได้มากกว่าหนึ่งแบบ แต่ในที่นี้จะนำเสนอเป็นแนวทางตัวอย่างเพียงแบบเดียวเท่านั้น



3) จากเงื่อนไขของโจทย์ สามารถเขียนกราฟของเส้นตรง ℓ_3 และกราฟของฟังก์ชัน h ได้มากกว่าหนึ่งแบบ แต่ในที่นี้จะนำเสนอเป็นแนวทางตัวอย่างเพียงแบบเดียวเท่านั้น



4. เนื่องจาก $f'(2)$ คือ ความชันของเส้นโค้ง $y=f(x)$ ที่จุด $(2,\ f(2))$
และเส้นตรง $3x-y=1$ เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=f(x)$ ที่จุด $(2,\ f(2))$
ดังนั้น $f'(2)$ คือความชันของเส้นตรง $3x-y=1$
นั่นคือ $f'(2)=3$

5. เนื่องจาก $f'(3)$ คือ ความชันของเส้นโค้ง $y=f(x)$ ที่จุด $(3,\ f(3))$ และ $f(3)=-1$
ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(3,-1)$ คือ 5
เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(3,-1)$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,-1)$ และมีความชัน 5
ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(3,-1)$ คือ $y-(-1)=5(x-3)$
นั่นคือ $y=5x-16$

6. เนื่องจาก $y=-x+x^2$
จะได้ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(-x+x^2\right)=-1+2x$
ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (a,b) คือ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}=-1+2a$
เนื่องจาก ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (a,b) คือ 3
ดังนั้น $-1+2a=3$
นั่นคือ $a=2$

เนื่องจาก เส้นโค้ง $y=-x+x^2$ ผ่านจุด (a,b)

ดังนั้น $b=-a+a^2=-2+2^2=2$

จะได้ $a=2$ และ $b=2$

7. เนื่องจาก $y=3x^2-5$

จะได้ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(3x^2-5\right)=6x-0=6x$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1,-2)$ คือ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=6(1)=6$

เนื่องจาก เส้นตรง $y=mx+c$ ขนานกับเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1,-2)$

ดังนั้น เส้นตรง $y=mx+c$ มีความชัน 6 และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

นั่นคือ $m=6$ และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

8. เนื่องจาก $y=x^3$

จะได้ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^3\right)=3x^2$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1,1)$ คือ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=3\left(1^2\right)=3$

จะได้ว่า เส้นตรงที่ต้องการมีความชัน 3 และผ่านจุด $(2,3)$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ต้องการ คือ $y-3=3(x-2)$ นั่นคือ $y=3x-3$

9. ให้ (a,b) เป็นจุดบนเส้นโค้ง $y=x^3-3x$ ซึ่งเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนี้ขนานกับแกน X

เนื่องจาก $y=x^3-3x$

จะได้ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^3-3x\right)=3x^2-3$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (a,b) คือ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}=3a^2-3$

เนื่องจาก เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (a,b) ขนานกับแกน X

ดังนั้น เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (a,b) มีความชันเป็น 0

นั่นคือ $3a^2-3=0$

จะได้ $a=-1$ หรือ $a=1$

เนื่องจาก (a,b) เป็นจุดบนเส้นโค้ง $y=x^3-3x$

ดังนั้น $b = a^3 - 3a$

ดังนั้น เมื่อ $a = -1$ จะได้ $b = (-1)^3 - 3(-1) = 2$

และ เมื่อ $a = 1$ จะได้ $b = 1^3 - 3(1) = -2$

ดังนั้น จุดบนเส้นโค้ง $y = x^3 - 3x$ ซึ่งเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนี้ขนานกับแกน X คือ $(-1, 2)$ และ $(1, -2)$

10. ให้ (a, b) เป็นจุดบนเส้นโค้ง $y = x^4$ ซึ่งเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนี้มีความชัน $\frac{1}{2}$

เนื่องจาก $y = x^4$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (a, b) คือ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = 4a^3$

เนื่องจาก เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (a, b) มีความชัน $\frac{1}{2}$

ดังนั้น $4a^3 = \frac{1}{2}$

นั่นคือ $a = \frac{1}{2}$

เนื่องจาก (a, b) เป็นจุดบนเส้นโค้ง $y = x^4$

ดังนั้น $b = a^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

จะได้ว่า เส้นตรงที่มีความชัน $\frac{1}{2}$ และสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^4$ จะผ่านจุด $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$

เนื่องจากเส้นตรงที่ต้องการ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$ และมีความชัน $\frac{1}{2}$

ดังนั้น เส้นตรงที่มีความชัน $\frac{1}{2}$ และสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^4$ คือ $y - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

นั่นคือ $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{16}$

11. เนื่องจาก $y = ax^2$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(ax^2\right) = 2ax$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดซึ่ง $x = 2$ คือ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = 2a(2) = 4a$

เนื่องจาก สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ $x = 2$ คือ $4x + y = b$

ดังนั้น เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ $x = 2$ จะมีความความชัน -4

นั่นคือ $-4 = 4a$

จะได้ $a = -1$

เนื่องจาก เส้นตรง $4x + y = b$ สัมผัสเส้นโค้ง $y = -x^2$ ที่ $x = 2$

และจุด $\left(2, -2^2\right) = (2, -4)$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง $y = -x^2$

ดังนั้น เส้นตรง $4x + y = b$ ผ่านจุด $(2, -4)$

นั่นคือ $b = 4(2) + (-4) = 4$

ดังนั้น $a = -1$ และ $b = 4$

แบบฝึกหัด 2.7

1. 1) จาก $f(x) = 5x^2 - 4x + 2$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(5x^2 - 4x + 2\right)$

$= 10x - 4$

ดังนั้น $f''(x) = \frac{d}{dx}(10x - 4)$

$= 10$

2) จาก $f(x) = 5 + 2x + 4x^3 - 3x^5$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(5 + 2x + 4x^3 - 3x^5\right)$

$= 2 + 12x^2 - 15x^4$

ดังนั้น $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(2 + 12x^2 - 15x^4\right)$

$= 24x - 60x^3$

3) จาก $f(x) = 3x^4 - 2x + \sqrt{x} - 5 = 3x^4 - 2x + x^{\frac{1}{2}} - 5$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^4 - 2x + x^{\frac{1}{2}} - 5\right)$

$= 12x^3 - 2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

ดังนั้น $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(12x^3 - 2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$

$= 36x^2 - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$= 36x^2 - \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$

4) จาก $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{x} + 4x^2 = x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-1} + 4x^2$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-1} + 4x^2\right)$

$= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 2x^{-2} + 8x$

ดังนั้น $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 2x^{-2} + 8x\right)$

$= -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} - 4x^{-3} + 8$

$= -\frac{2}{9x^{\frac{5}{3}}} - \frac{4}{x^3} + 8$

5) จาก $f(x) = \left(5x^2 - 3\right)\left(7x^3 + x\right) = 35x^5 - 16x^3 - 3x$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(35x^5 - 16x^3 - 3x\right)$

$= 175x^4 - 48x^2 - 3$

ดังนั้น $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(175x^4 - 48x^2 - 3\right)$

$= 700x^3 - 96x$

6) จาก $f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + x^{-1}$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(1 + x^{-1}\right)$

$= -x^{-2}$

ดังนั้น $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(-x^{-2}\right)$

$= 2x^{-3}$

$= \frac{2}{x^3}$

7) จาก $f(x) = \dfrac{3x-2}{5x} = \dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{5}x^{-1}$

จะได้ $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{5}x^{-1}\right)$

$= \dfrac{2}{5}x^{-2}$

ดังนั้น $f''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2}{5}x^{-2}\right)$

$= -\dfrac{4}{5}x^{-3}$

$= -\dfrac{4}{5x^3}$

2. 1) จาก $f(x) = x^{-5} + x^5$

จะได้ $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-5} + x^5\right)$

$= -5x^{-6} + 5x^4$

$f''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(-5x^{-6} + 5x^4\right)$

$= 30x^{-7} + 20x^3$

ดังนั้น $f'''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(30x^{-7} + 20x^3\right)$

$= -210x^{-8} + 60x^2$

$= -\dfrac{210}{x^8} + 60x^2$

2) จาก $f(x) = 5x^2 - 4x + 7$

จะได้ $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(5x^2 - 4x + 7\right)$

$= 10x - 4$

$f''(x) = \dfrac{d}{dx}(10x - 4)$

$= 10$

ดังนั้น $f'''(x) = \dfrac{d}{dx}(10)$

$= 0$

3) จาก $f(x) = 3x^{-2} + 4x^{-1} + x$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^{-2} + 4x^{-1} + x\right)$

$= -6x^{-3} - 4x^{-2} + 1$

$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(-6x^{-3} - 4x^{-2} + 1\right)$

$= 18x^{-4} + 8x^{-3}$

ดังนั้น $f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(18x^{-4} + 8x^{-3}\right)$

$= -72x^{-5} - 24x^{-4}$

$= -\frac{72}{x^5} - \frac{24}{x^4}$

4) จาก $f(x) = \frac{x}{x+1}$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$= \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$

$= \frac{(x+1)(1) - x(1)}{(x+1)^2}$

$= (x+1)^{-2}$

$f''(x) = \frac{d}{dx}\left((x+1)^{-2}\right)$

$= -2(x+1)^{-3}\frac{d}{dx}(x+1)$

$= -2(x+1)^{-3}$

ดังนั้น $f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(-2(x+1)^{-3}\right)$

$= 6(x+1)^{-4}\frac{d}{dx}(x+1)$

$= 6(x+1)^{-4}$

$= \frac{6}{(x+1)^4}$

3. จาก $f(x) = 3x^2 - 2$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 2)$

$= 6x$

$f''(x) = \frac{d}{dx}(6x)$

$= 6$

และ $f'''(x) = \frac{d}{dx}(6)$

$= 0$

ดังนั้น $f'''(2) = 0$

4. จาก $y = \frac{6}{x^4} = 6x^{-4}$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(6x^{-4})$

$= -24x^{-5}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-24x^{-5})$

$= 120x^{-6}$

$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(120x^{-6})$

$= -720x^{-7}$

ดังนั้น $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}(-720x^{-7})$

$= 5,040x^{-8}$

5. จาก $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}(1-x)^{-1}$

$= -1(1-x)^{-2}\frac{d}{dx}(1-x)$

$= -1(1-x)^{-2}(-1)$

$= (1-x)^{-2}$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}(1-x)^{-2} \\
&= -2(1-x)^{-3}\frac{d}{dx}(1-x) \\
&= -2(1-x)^{-3}(-1) \\
&= (1)(2)(1-x)^{-3} \\
f'''(x) &= \frac{d}{dx}\left(2(1-x)^{-3}\right) \\
&= 2\frac{d}{dx}(1-x)^{-3} \\
&= 2\left(-3(1-x)^{-4}\frac{d}{dx}(1-x)\right) \\
&= 2\left(-3(1-x)^{-4}(-1)\right) \\
&= (1)(2)(3)(1-x)^{-4} \\
&\vdots \\
\text{ดังนั้น}\quad f^{(n)}(x) &= (1)(2)(3)\cdots(n)(1-x)^{-(n+1)} \\
&= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัด 2.8.1

1. จาก $s(t)=2t^3-t+5$

   จะได้ว่า $v(t) = s'(t) = 6t^2-1$

   และ $a(t)=v'(t)=12t$

   ดังนั้น ระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้น ขณะเวลา 1 วินาที

   คือ $|s(1)-s(0)|=\left|\left(2(1)^3-(1)+5\right)-\left(2(0)^3-(0)+5\right)\right|=|1|=1$ เมตร

   ความเร็วของวัตถุขณะเวลา 1 วินาที คือ $v(1)=6(1)^2-1=5$ เมตรต่อวินาที

   และ ความเร่งของวัตถุขณะเวลา 1 วินาที คือ $a(1)=12$ เมตรต่อวินาที^{2}

2. จาก $s(t)=t^3-3t^2+t+5$

   จะได้ว่า $v(t)=s'(t)=3t^2-6t+1$

   และ $a(t)=v'(t)=6t-6$

   ดังนั้น ระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้นขณะ $t=1$

   คือ $|s(1)-s(0)|=\left|\left(1^3-3(1^2)+1+5\right)-\left(0^3-3(0^2)+0+5\right)\right|=|-1|=1$ เมตร

   ความเร็วของวัตถุขณะ $t=1$ คือ $v(1)=3(1^2)-6(1)+1=-2$ เมตรต่อวินาที

   และความเร่งของวัตถุขณะ $t=1$ คือ $a(1)=6(1)-6=0$ เมตรต่อวินาที^{2}

3. จาก $s(t)=-5t^2+50$

   จะได้ว่า $v(t)=s'(t)=-10t$

   และ $a(t)=v'(t)=-10$

   1) ระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้น หลังจากปล่อยวัตถุไปแล้ว 3 วินาที

      คือ $|s(3)-s(0)|=\left|\left(-5(3)^2+50\right)-\left(-5(0)^2+50\right)\right|=|45|=45$ เมตร

   2) ความเร็วของวัตถุขณะเวลา 2 วินาที คือ $v(2)=-10(2)=-20$ เมตรต่อวินาที

   3) ความเร่งของวัตถุขณะเวลา 5 วินาที คือ $a(5)=-10$ เมตรต่อวินาที^{2}

4. จาก $s(t)=10t-5t^2$

จะได้ว่า $v(t)=s'(t)=10-10t$

และ $a(t)=v'(t)=-10$

1) ความเร็วของก้อนหินขณะเวลา t ใด ๆ คือ $10-10t$ เมตรต่อวินาที

2) ความเร่งของก้อนหินขณะเวลา t ใด ๆ คือ -10 เมตรต่อวินาที^{2}

3) **วิธีที่ 1** เนื่องจาก $s(t)=10t-5t^2$

จะได้ $s(t)=-5(t-1)^2+5$

นั่นคือ กราฟของ s เป็นพาราโบลาคว่ำที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(1, 5)$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที ก้อนหินจึงจะอยู่ในตำแหน่งสูงที่สุดจากตำแหน่งเริ่มต้น

วิธีที่ 2 จาก $s(t)=10t-5t^2$

จะได้ $v(t)=s'(t)=10-10t$

เนื่องจาก เมื่อก้อนหินอยู่ในตำแหน่งที่สูงที่สุดจากตำแหน่งเริ่มต้น ก้อนหินจะมีความเร็วเป็น 0 เมตรต่อวินาที

นั่นคือ $v(t)=0$

จะได้ $10-10t = 0$

$t = 1$

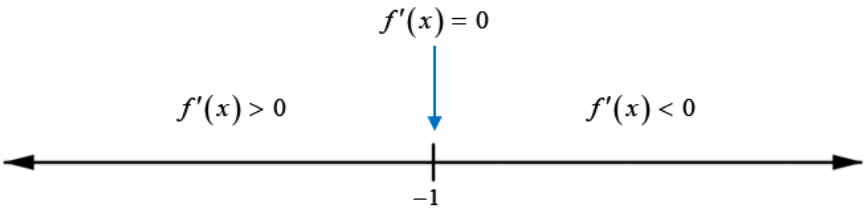
ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที ก้อนหินจึงจะอยู่ในตำแหน่งสูงที่สุดจากตำแหน่งเริ่มต้น

แบบฝึกหัด 2.8.2

1. 1) เนื่องจาก $f'(x) = -2 - 2x = -2(x+1)$

ดังนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = -1$

พิจารณาค่าของ $f'(x)$ โดยเขียนเส้นจำนวนและจุดแบ่งช่วง ดังนี้



จะได้ว่า $f'(x) > 0$ บนช่วง $(-\infty, -1)$

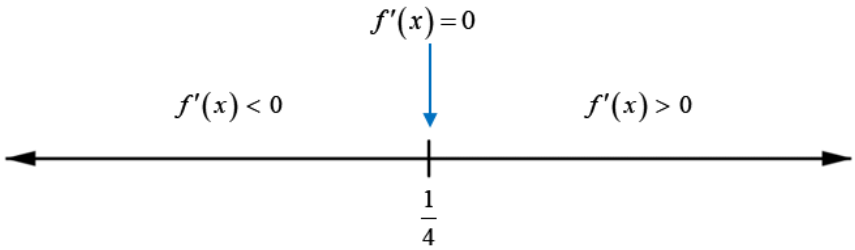
และ $f'(x) < 0$ บนช่วง $(-1, \infty)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -1)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-1, \infty)$

2) เนื่องจาก $f'(x) = 4x - 1$

ดังนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = \frac{1}{4}$

พิจารณาค่าของ $f'(x)$ โดยเขียนเส้นจำนวนและจุดแบ่งช่วง ดังนี้



จะได้ว่า $f'(x) < 0$ บนช่วง $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$

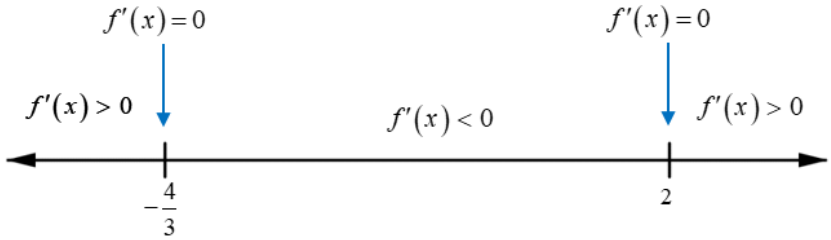
และ $f'(x) > 0$ บนช่วง $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$ และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$

3) เนื่องจาก $f'(x)=3x^2-2x-8=(3x+4)(x-2)$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=-\frac{4}{3}$ หรือ $x=2$

พิจารณาค่าของ $f'(x)$ โดยเขียนเส้นจำนวนและจุดแบ่งช่วง ดังนี้



จะได้ว่า $f'(x)>0$ บนช่วง $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$ และช่วง $(2, \infty)$

และ $f'(x)<0$ บนช่วง $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$

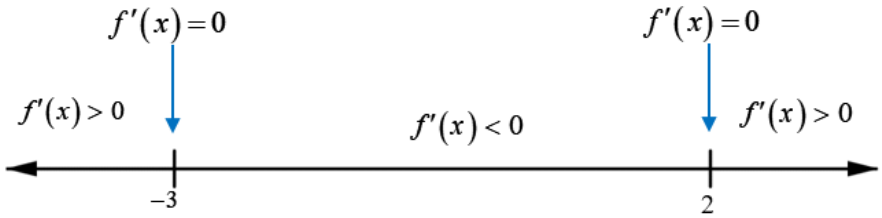
ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$ และช่วง $(2, \infty)$

และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$

4) เนื่องจาก $f'(x)=6x^2+6x-36=6(x+3)(x-2)$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=-3$ หรือ $x=2$

พิจารณาค่าของ $f'(x)$ โดยเขียนเส้นจำนวนและจุดแบ่งช่วง ดังนี้



จะได้ว่า $f'(x)>0$ บนช่วง $(-\infty, -3)$ และช่วง $(2, \infty)$

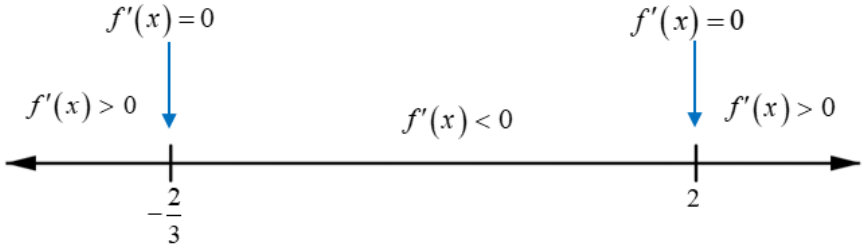
และ $f'(x)<0$ บนช่วง $(-3, 2)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -3)$ และช่วง $(2, \infty)$

และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-3, 2)$

5) เนื่องจาก $f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

พิจารณาค่าของ $f'(x)$ โดยเขียนเส้นจำนวนและจุดแบ่งช่วง ดังนี้



จะได้ว่า $f'(x)>0$ บนช่วง $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$ และช่วง $(2,\infty)$

และ $f'(x)<0$ บนช่วง $\left(-\frac{2}{3},2\right)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$ และช่วง $(2,\infty)$

และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $\left(-\frac{2}{3},2\right)$

2. 1) จาก $f(x)=x^2-8x+7$

จะได้ $f'(x)=2x-8=2(x-4)$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=4$

จะได้ว่าค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f คือ 4

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน f จะได้ $f''(x)=2$

เนื่องจาก $f''(4) = 2$ ซึ่ง $2>0$

ดังนั้น f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=4$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(4)=-9$

2) จาก $f(x)=x^3-3x+6$

จะได้ $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=-1$ หรือ $x=1$

จะได้ว่าค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f มี 2 ค่า คือ -1 และ 1

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน f จะได้ $f''(x)=6x$

เนื่องจาก $f''(-1) = -6$ ซึ่ง $-6<0$

และ $f''(1) = 6$ ซึ่ง $6 > 0$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-1) = 8$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(1) = 4$

3) จาก $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 4$

จะได้ $f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x^2 - 2x - 8) = 3(x-4)(x+2)$

ดังนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 4$ หรือ $x = -2$

จะได้ว่าค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f มี 2 ค่า คือ 4 และ -2

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน f จะได้ $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

เนื่องจาก $f''(4) = 18$ ซึ่ง $18 > 0$

และ $f''(-2) = -18$ ซึ่ง $-18 < 0$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -2$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-2) = 32$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 4$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(4) = -76$

4) จาก $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$

จะได้ $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x-2)(x+2)$

ดังนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = -2$, $x = 0$ หรือ $x = 2$

จะได้ว่าค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f มี 3 ค่า คือ -2, 0 และ 2

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน f จะได้ $f''(x) = 12x^2 - 16$

เนื่องจาก $f''(-2) = 32$ ซึ่ง $32 > 0$

$f''(0) = -16$ ซึ่ง $-16 < 0$

และ $f''(2) = 32$ ซึ่ง $32 > 0$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(0) = 12$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -2$ และ $x = 2$ โดยค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ

$f(-2) = -4$ และ $f(2) = -4$ ตามลำดับ

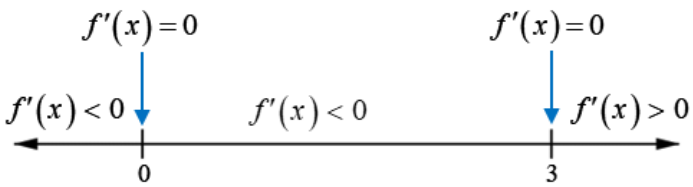
5) จาก $f(x)=x^4-4x^3+8$

จะได้ $f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=0$ หรือ $x=3$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f มี 2 ค่า คือ 0 และ 3

พิจารณาค่าของ $f'(x)$ เมื่อ x เป็นค่าวิกฤตและจำนวนจริงในช่วงต่าง ๆ โดยใช้เส้นจำนวน ดังนี้



จะเห็นว่า $f'(x)$ ที่ $x=0$ ไม่มีการเปลี่ยนจากจำนวนบวกเป็นจำนวนลบหรือไม่มีการเปลี่ยนจากจำนวนลบเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น 0 เป็นค่าวิกฤตที่ไม่ได้ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

เนื่องจาก ที่ $x=3$ เป็นจุดแบ่งที่ทำให้ $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนลบเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=3$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(3)=-19$

3. 1) จาก $f(x)=x^2-4x+3$

จะได้ $f'(x)=2x-4=2(x-2)$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=2$

จะได้ว่าค่าวิกฤตของฟังก์ชันในช่วงเปิด $(0,5)$ คือ 2

ต่อไปคำนวณหา $f(0)$, $f(2)$ และ $f(5)$ จะได้

$$f(0) = 3$$
$$f(2) = -1$$
$$f(5) = 8$$

สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=5$ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ $f(5)=8$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x=2$ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์คือ $f(2)=-1$

2) จาก $f(x)=x^3-2x^2-4x+8$

จะได้ $f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=-\frac{2}{3}$ หรือ $x=2$

จะได้ว่าค่าวิกฤตของฟังก์ชันในช่วงเปิด $(-2,3)$ คือ $-\frac{2}{3}$ และ 2

ต่อไปคำนวณหา $f(-2)$, $f\left(-\frac{2}{3}\right)$, $f(2)$ และ $f(3)$ จะได้

$$f(-2) = 0$$
$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{256}{27}$$
$$f(2) = 0$$
$$f(3) = 5$$

สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=-\frac{2}{3}$ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ $f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{256}{27}$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x=-2$ และ $x=2$ โดยที่ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์คือ

$f(-2)=f(2)=0$

3) จาก $f(x)=x^4-2x^3-9x^2+27$

จะได้ $f'(x)=4x^3-6x^2-18x=2x(2x^2-3x-9)=2x(2x+3)(x-3)$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=-\frac{3}{2}$, $x=0$ หรือ $x=3$

จะได้ว่าค่าวิกฤตของฟังก์ชันในช่วงเปิด $(-2,4)$ คือ $-\frac{3}{2}$, 0 และ 3

ต่อไปคำนวณหา $f(-2)$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f(0)$, $f(3)$ และ $f(4)$ จะได้

$$f(-2) = 23$$
$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{297}{16}$$
$$f(0) = 27$$
$$f(3) = -27$$
$$f(4) = 11$$

สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=0$ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ $f(0)=27$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x=3$ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์คือ $f(3)=-27$

4) จาก $f(x) = x^3+5x-4$

จะได้ $f'(x) = 3x^2+5$

เนื่องจาก $f'(x)=3x^2+5>0$ ทุก $x\in(-3,-1)$

ดังนั้น f ไม่มีค่าวิกฤตในช่วงเปิด $(-3,-1)$

ต่อไปคำนวณหา $f(-3)$ และ $f(-1)$ จะได้

$$f(-3) = -46$$
$$f(-1) = -10$$

สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=-1$ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ $f(-1)=-10$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x=-3$ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์คือ $f(-3)=-46$

4. จาก $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

จะได้ $f'(x)=3x^2+2ax+b$

ดังนั้น คำตอบของสมการ $f'(x)=0$ คือ $x=\dfrac{-2a\pm\sqrt{4a^2-12b}}{6}$ หรือ $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-3b}}{3}$

เนื่องจาก ค่าวิกฤตคือคำตอบของสมการ $f'(x)=0$

ดังนั้น f จะมีค่าวิกฤต 2 ค่า เมื่อ $a^2-3b>0$

f จะมีค่าวิกฤต 1 ค่า เมื่อ $a^2-3b=0$

และ f จะไม่มีค่าวิกฤต เมื่อ $a^2-3b<0$

จะได้ว่า <u>ตัวอย่าง</u>จำนวนจริง a, b และ c ที่ทำให้

1) f มีค่าวิกฤต 2 ค่า คือ $a=0$, $b=-3$ และ $c=0$

2) f มีค่าวิกฤตเพียง 1 ค่า คือ $a=0$, $b=0$ และ $c=0$

3) f ไม่มีค่าวิกฤต คือ $a=0$, $b=3$ และ $c=0$

แบบฝึกหัด 2.8.3

1. จาก $p = 100 - 0.04x$

เนื่องจากราคาสินค้า p เป็นจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0 ดังนั้น $x \in [0, 2500]$

ให้ $P(x)$ แทนกำไรที่ได้จากการผลิตสินค้า x ชิ้น เมื่อ $x \in [0, 2500]$

จะได้
$$\begin{aligned} P(x) &= px - (600 + 22x) \\ &= (100 - 0.04x)x - (600 + 22x) \\ &= -0.04x^2 + 78x - 600 \quad \text{เมื่อ } x \in [0, 2500] \end{aligned}$$

ดังนั้น $P'(x) = -0.08x + 78$

ถ้า $P'(x) = 0$ แล้วจะได้ $-0.08x + 78 = 0$

นั่นคือ $x = 975$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงเปิด $(0, 2500)$ คือ 975

ต่อไปคำนวณหา $P(0), P(975)$ และ $P(2,500)$ จะได้
$$\begin{aligned} P(0) &= -600 \\ P(975) &= 37,425 \\ P(2,500) &= -55,600 \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า P มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 975$ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ $P(975) = 37,425$

ดังนั้น แม่ค้าจะต้องผลิตสินค้าออกขายสัปดาห์ละ 975 ชิ้น จึงจะได้กำไรมากที่สุด

2. ให้ $C(x)$ แทนค่าใช้จ่ายรวมในการสั่งให้รถบรรทุกวิ่งด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย x กิโลเมตรต่อชั่วโมง เมื่อ $x \in [25, 80]$

เนื่องจาก ระยะเวลาที่รถบรรทุกของบริษัทวิ่งรับส่งสินค้าคือ $\frac{500}{x}$ ชั่วโมง

ดังนั้น บริษัทจะต้องจ่ายค่าน้ำมัน $\frac{500}{x}\left(24 + \frac{x^2}{150}\right)(24)$ บาท

และจ่ายค่าเบี้ยเลี้ยงคนขับ $\frac{500}{x}(49)$ บาท

จะได้ $C(x) = \frac{500}{x}\left(24+\frac{x^2}{150}\right)(24)+\frac{500}{x}(49)$

$= 80x+\frac{312,500}{x}$ เมื่อ $x \in [25,80]$

ดังนั้น $C'(x) = 80-\frac{312,500}{x^2}$

ถ้า $C'(x)=0$ แล้วจะได้

$$\begin{aligned} 0 &= 80-\frac{312,500}{x^2} \\ \frac{312,500}{x^2} &= 80 \\ 80x^2 &= 312,500 \\ x^2 &= 3,906.25 \\ x^2-312,500 &= 0 \\ (x+62.5)(x-62.5) &= 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ $x=-62.5$ หรือ $x=62.5$

เนื่องจาก $-62.5 \notin (25,80)$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงเปิด $(25,80)$ คือ 62.5

ต่อไปคำนวณหา $C(25), C(62.5)$ และ $C(80)$ จะได้

$$\begin{aligned} C(25) &= 14,500 \\ C(62.5) &= 10,000 \\ C(80) &= 10,306.25 \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า C มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x=62.5$ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์คือ $C(62.5)=10,000$

ดังนั้น บริษัทควรให้คนขับขับรถด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย 62.5 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จึงจะประหยัดที่สุด

3. จากโจทย์จะได้ $6x+4y=200$

นั่นคือ $y=50-\frac{3}{2}x$

เนื่องจากความยาวและความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นจำนวนจริงบวก

ดังนั้น $x \in \left(0, \frac{100}{3}\right)$

ให้ A แทนพื้นที่ของที่ดินที่ล้อมด้วยลวดหนาม

จะได้ $A = 3xy$

$= 3x\left(50-\frac{3}{2}x\right)$

$= 150x-\frac{9}{2}x^2$ เมื่อ $x\in\left(0,\frac{100}{3}\right)$

ดังนั้น $A'(x) = 150-9x$

ถ้า $A'(x)=0$ แล้วจะได้ $150-9x=0$

นั่นคือ $x=\frac{50}{3}$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงเปิด $\left(0,\frac{100}{3}\right)$ คือ $\frac{50}{3}$

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน A จะได้ $A''(x)=-9$

เนื่องจาก $A''\left(\frac{50}{3}\right)=-9$ ซึ่ง $-9<0$

ดังนั้น A มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=\frac{50}{3}$ เพียงค่าเดียวบนช่วง $\left(0,\frac{100}{3}\right)$

สรุปได้ว่า A มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=\frac{50}{3}$ บนช่วง $\left(0,\frac{100}{3}\right)$

และค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ $A\left(\frac{50}{3}\right) = 1,250$

ดังนั้น จะล้อมพื้นที่ได้มากที่สุด $1,250$ ตารางเมตร

4. ให้ $f(x)$ แทนผลของการลบจำนวนจริง x ด้วยกำลังสองของ x

จะได้ $f(x)= x-x^2$ เมื่อ $x\in(-\infty,\infty)$

ดังนั้น $f'(x) = 1-2x$

ถ้า $f'(x)=0$ แล้วจะได้ $1-2x=0$

นั่นคือ $x=\frac{1}{2}$

ดังนั้น ค่าวิกฤต คือ $\frac{1}{2}$

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน f จะได้ $f''(x)=-2$

เนื่องจาก $f''\left(\frac{1}{2}\right)=-2$ ซึ่ง $-2<0$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=\frac{1}{2}$ เพียงค่าเดียวบนช่วง $(-\infty, \infty)$

สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=\frac{1}{2}$

นั่นคือ จำนวนจริงที่เมื่อนำจำนวนดังกล่าวลบออกด้วยจำนวนจริงนั้น แล้วได้ผลลบมีค่ามากที่สุด คือ $\frac{1}{2}$

5. ให้ x แทนจำนวนจำนวนหนึ่ง จะได้ว่า จำนวนอีกจำนวนหนึ่งมีค่าเป็น $10-x$

ให้ $f(x)$ แทนผลคูณของสองจำนวนดังกล่าว

จะได้ $f(x) = x(10-x)$ เมื่อ $x \in (-\infty, \infty)$

$= 10x - x^2$

ดังนั้น $f'(x) = 10-2x$

ถ้า $f'(x)=0$ แล้วจะได้ $10-2x=0$

นั่นคือ $x=5$

ดังนั้น ค่าวิกฤต คือ 5

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน f จะได้ $f''(x)=-2$

เนื่องจาก $f''(5)=-2$ ซึ่ง $-2<0$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=5$ เพียงค่าเดียวบนช่วง $(-\infty, \infty)$

สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=5$

นั่นคือ จำนวนจริงสองจำนวนที่มีผลบวกเป็น 10 และผลคูณของสองจำนวนนี้มีค่ามากที่สุด คือ 5 และ $10-5=5$

6. 1) ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงสองจำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ซึ่ง $x+y=1$

ดังนั้น $y=1-x$ และ $x \in [0, 1]$

ให้ $f(x)$ แทนผลบวกของกำลังสองของ x และ $1-x$

จะได้ $f(x) = x^2+(1-x)^2$

$= 2x^2-2x+1$ เมื่อ $x \in [0, 1]$

ดังนั้น $f'(x) = 4x-2$

ถ้า $f'(x)=0$ แล้วจะได้ $4x-2=0$

นั่นคือ $x=\frac{1}{2}$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชันในช่วงเปิด $(0,1)$ คือ $\frac{1}{2}$

ต่อไปคำนวณหา $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ และ $f(1)$ จะได้

$$f(0) = 1$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$
$$f(1) = 1$$

สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=0$ และ $x=1$ โดยที่ค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ $f(0)=f(1)=1$

ดังนั้น จะต้องเลือกจำนวนจริงสองจำนวนคือ 0 และ 1 จึงจะทำให้ผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนมีค่ามากที่สุด

2) จากข้อ 1) สรุปได้ว่า f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x=\frac{1}{2}$ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์คือ $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

ดังนั้น จะต้องเลือกจำนวนจริงทั้งสองจำนวนเป็น $\frac{1}{2}$ จึงจะทำให้ผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนมีค่าน้อยที่สุด

7. จาก $p = 400+20x-x^2$

เนื่องจากกำไรและปริมาณปุ๋ยต้องเป็นจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0 จึงพิจารณาเฉพาะ $x\in\left[0, 10+10\sqrt{5}\right]$

จะได้ $p'(x)=20-2x$

ถ้า $p'(x)=0$ แล้วจะได้ $20-2x=0$

นั่นคือ $x=10$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชันในช่วงเปิด $\left(0, 10+10\sqrt{5}\right)$ คือ 10

ต่อไปคำนวณหา $p(0)$, $p(10)$ และ $p\left(10+10\sqrt{5}\right)$ จะได้

$$p(0) = 400$$
$$p(10) = 500$$
$$p\left(10+10\sqrt{5}\right) = 0$$

นั่นคือ $p(10)=500$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

จะได้ว่า จะต้องใช้ปุ๋ย 10 กิโลกรัมต่อที่ดิน 1 ไร่ จึงจะได้กำไรสุทธิสูงสุดและกำไรสุทธิสูงสุดจากผลผลิตต่อไร่คือ 500 บาท

8. จาก $C(t) = 10+4t-0.2t^2$ เมื่อ $t\in[0,\infty)$

จะได้ $C'(t) = 4-0.4t$

ถ้า $C'(t)=0$ แล้วจะได้ $4-0.4t=0$

นั่นคือ $t=10$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชันในช่วงเปิด $(0,\infty)$ คือ 10

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน C จะได้ $C''(x)=-0.4$

เนื่องจาก $C''(10)=-0.4$ ซึ่ง $-0.4<0$

ดังนั้น C มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=10$ เพียงค่าเดียวบนช่วง $(0,\infty)$

ต่อไปคำนวณหาค่า $C(0)$ และ $C(10)$ จะได้

$$C(0) = 10$$
$$C(10) = 30$$

นั่นคือ $C(10) = 30$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

จะได้ว่า อุณหภูมิจะขึ้นสูงสุดเมื่อเวลาผ่านไป 10 วินาที และอุณหภูมิสูงสุดเป็น 30 องศาเซลเซียส

9. ให้ x แทนความยาวรั้วที่ล้อมด้านที่อยู่ตรงข้ามแม่น้ำ

และ y แทนความยาวรั้วที่ล้อมแต่ละด้านที่เหลือ

เนื่องจากต้องการล้อมรั้วเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีพื้นที่ 384 ตารางเมตร

จะได้ $xy = 384$

นั่นคือ $y = \dfrac{384}{x}$ เมื่อ $x\in(0,\infty)$

ให้ P แทนค่าใช้จ่ายในการล้อมรั้ว

จะได้ $P = 3{,}000x+2{,}000y$

นั่นคือ $P(x) = 3,000x + 2,000\left(\frac{384}{x}\right)$ เมื่อ $x \in (0, \infty)$

ดังนั้น $P'(x) = 3,000 - \frac{2,000(384)}{x^2}$

ถ้า $P'(x) = 0$ แล้วจะได้ $3,000 - \frac{2,000(384)}{x^2} = 0$

นั่นคือ $x = 16$ หรือ -16

เนื่องจาก $-16 \notin (0, \infty)$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชันในช่วงเปิด $(0, \infty)$ คือ 16

เนื่องจาก $P'(x) < 0$ เมื่อ $0 < x < 16$

และ $P'(x) > 0$ เมื่อ $x > 16$

จะได้ P เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0, 16)$ และ P เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(16, \infty)$

ดังนั้น P มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 16$ เพียงค่าเดียวบนช่วง $(0, \infty)$

สรุปได้ว่า P มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 16$

นั่นคือ $P(16) = 96,000$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

เนื่องจาก $x = 16$ จะได้ $y = \frac{384}{16} = 24$

ดังนั้น จะต้องสร้างรั้วให้มีความกว้าง 16 เมตร และความยาว 24 เมตร จึงจะทำให้ค่าใช้จ่ายต่ำที่สุด และค่าใช้จ่ายต่ำที่สุดคือ 96,000 บาท

10. ให้ $V(x)$ แทนความจุของกล่องเมื่อตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ x เซนติเมตรที่มุมทั้งสี่ออก

จะได้ $V(x) = (20-2x)(24-2x)x$

$= 4x^3 - 88x^2 + 480x$

เนื่องจากความกว้าง ความยาว ความสูง และปริมาตรของกล่องเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $x \in (0, 10)$

ดังนั้น $V'(x) = 12x^2 - 176x + 480$

$= 4(3x^2 - 44x + 120)$

ถ้า $V'(x) = 0$ แล้วจะได้ $4(3x^2 - 44x + 120) = 0$

นั่นคือ $x = \frac{22 - 2\sqrt{31}}{3}$ หรือ $x = \frac{22 + 2\sqrt{31}}{3}$

เนื่องจาก $\frac{22+2\sqrt{31}}{3} \notin (0,10)$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงเปิด $(0,10)$ มีเพียงค่าเดียวคือ $\frac{22-2\sqrt{31}}{3}$

เนื่องจาก $V''(x)=4(6x-44)$ และ

$$V''\left(\frac{22-2\sqrt{31}}{3}\right)=4\left(6\left(\frac{22-2\sqrt{31}}{3}\right)-44\right)=4\left(-4\sqrt{31}\right)<0$$

ดังนั้น $V\left(\frac{22-2\sqrt{31}}{3}\right) \approx 774.16$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

เนื่องจาก V มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=\frac{22-2\sqrt{31}}{3}$ เพียงค่าเดียวบนช่วง $(0,10)$

สรุปได้ว่า V มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=\frac{22-2\sqrt{31}}{3}$ บนช่วง $(0,10)$

และค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ $V\left(\frac{22-2\sqrt{31}}{3}\right)\approx 774.16$

จะได้ว่า กล่องจะมีความจุมากที่สุดประมาณ 774.16 ลูกบาศก์เซนติเมตร เมื่อ

$x=\frac{22-2\sqrt{31}}{3}$ เซนติเมตร

11. ให้ $P(x)$ แทนกำไรที่ได้จากการตั้งราคาสินค้าชิ้นละ x บาท เมื่อ $x\in[4,20]$

เนื่องจาก จำนวนสินค้าที่ขายได้เมื่อตั้งราคาสินค้าชิ้นละ x บาท คือ $1,000+100(20-x)$ ชิ้นต่อสัปดาห์

จะได้ $P(x) = (x-4)(1000+100(20-x))$

$= -100x^2+3,400x-12,000$ เมื่อ $x\in[4,20]$

ดังนั้น $P'(x) = -200x+3,400$

ถ้า $P'(x)=0$ แล้วจะได้ $-200x+3,400=0$

นั่นคือ $x=17$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชันในช่วงเปิด $(4,20)$ คือ 17

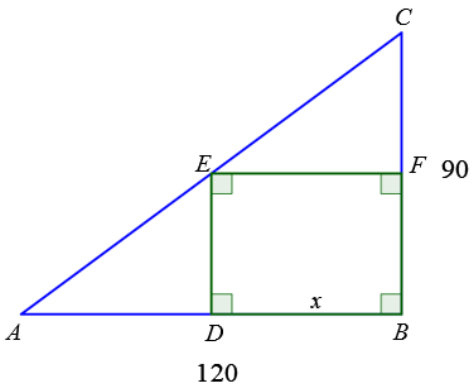
ต่อไปคำนวณหา $P(4), P(17)$ และ $P(20)$ จะได้

$$P(4) = 0$$
$$P(17) = 16{,}900$$
$$P(20) = 16{,}000$$

สรุปได้ว่า P มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=17$ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ $P(17)=16{,}900$

ดังนั้น พ่อค้าควรจะตั้งราคาสินค้าชิ้นละ 17 บาท จึงจะได้กำไรจากการขายมากที่สุด

12. ให้ x แทนความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป



ให้ $S(x)$ แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เมื่อ $x \in (0, 120)$

เนื่องจาก $\Delta ABC \sim \Delta ADE$

จะได้ $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DE}$ นั่นคือ $\dfrac{120}{90} = \dfrac{120-x}{DE}$ ทำให้ได้ว่า $DE = \dfrac{90(120-x)}{120}$

ดังนั้น
$$S(x) = x\left(\frac{90(120-x)}{120}\right)$$
$$= 90x - \frac{3}{4}x^2 \quad \text{เมื่อ } x \in (0, 120)$$

ดังนั้น $S'(x) = 90 - \dfrac{3}{2}x$

ถ้า $S'(x)=0$ แล้วจะได้ $90 - \dfrac{3}{2}x = 0$

นั่นคือ $x = 60$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชันในช่วงเปิด $(0,120)$ คือ 60

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน S จะได้ $S''(x) = -\dfrac{3}{2}$

เนื่องจาก $S''(60) = -\frac{3}{2}$ ซึ่ง $-\frac{3}{2} < 0$

ดังนั้น S มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 60$ เพียงค่าเดียวบนช่วง $(0, 120)$

สรุปได้ว่า S มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 60$

ดังนั้น ความยาวและความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีพื้นที่มากที่สุด คือ 60 หน่วย และ

$\frac{90(120-60)}{120} = 45$ หน่วย ตามลำดับ

13. จากรูป จะได้ว่า $d = \sqrt{a^2 - w^2}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} s &= kwd^2 \\ &= kw\left(\sqrt{a^2 - w^2}\right)^2 \\ &= a^2kw - kw^3 \quad \text{เมื่อ } w \in (0, a) \end{aligned}$$

ดังนั้น $s'(w) = a^2k - 3kw^2$

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน s จะได้ $s''(w) = -6kw$

เนื่องจาก $s''\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = -2\sqrt{3}ak$ ซึ่ง $-2\sqrt{3}ak < 0$

ดังนั้น s มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $w = \frac{a}{\sqrt{3}}$ เพียงค่าเดียวบนช่วง $(0, a)$

สรุปได้ว่า s มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $w = \frac{a}{\sqrt{3}}$

นั่นคือ จะต้องเลื่อยคานให้มีความกว้าง $w = \frac{a}{\sqrt{3}}$ เซนติเมตร และความหนา

$d = \sqrt{a^2 - w^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ เซนติเมตร จึงจะรับน้ำหนักได้มากที่สุด

14. จากโจทย์จะได้ว่า เงื่อนไขของงบประมาณเขียนแทนได้ด้วยสมการ $150x + 300y = 315,000$

นั่นคือ $x = 2,100 - 2y$ เมื่อ $0 \le y \le 1,050$

ภายใต้เงื่อนไขนี้จะได้ว่า $P = 100(2,100 - 2y)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$

ให้ $f(y) = 100(2,100 - 2y)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$

ต้องการหาค่าสูงสุดของ $f(y)$ บนช่วงปิด $[0, 1050]$

หาจุดวิกฤตโดยพิจารณา

$$f'(y) = 100(2{,}100-2y)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)y^{-\frac{1}{3}} + 100y^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)(2{,}100-2y)^{-\frac{2}{3}}(-2)$$

$$= \frac{200}{3}\left(\frac{2{,}100-2y}{y}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{200}{3}\left(\frac{y}{2{,}100-2y}\right)^{\frac{2}{3}}$$

ให้ $f'(y)=0$

จะได้ $$\frac{200}{3}\left(\frac{2{,}100-2y}{y}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{200}{3}\left(\frac{y}{2{,}100-2y}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$2{,}100-2y = y$$

$$y = 700$$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงเปิด $(0, 1050)$ คือ 700

ต่อไปคำนวณหา $f(0)$, $f(700)$ และ $f(1{,}050)$ จะได้

$$f(0) = 0$$

$$f(700) = 70{,}000$$

$$f(1{,}050) = 0$$

ดังนั้น ถ้า $y=700$ จะให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วง $[0, 1050]$

นั่นคือ จำนวนปากกาลูกลื่นที่มากที่สุดที่โรงงานนี้จะผลิตได้ใน 1 ชั่วโมงภายใต้งบประมาณ 315,000 บาท คือ 70,000 ด้าม

15. จุดบนพาราโบลาจะอยู่ในรูป $\left(\frac{y^2}{2}, y\right)$ เมื่อ y เป็นจำนวนจริง

ให้ $d(y)$ แทนระยะทางระหว่างจุด $(1, 4)$ กับจุด $\left(\frac{y^2}{2}, y\right)$ บนพาราโบลา

จะได้ $$d(y) = \sqrt{\left(\frac{y^2}{2}-1\right)^2 + (y-4)^2}$$

$$= \left(\frac{y^4}{4} - 8y + 17\right)^{\frac{1}{2}}$$

ดังนั้น $$d'(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4} - 8y + 17\right)^{-\frac{1}{2}}\left(y^3 - 8\right)$$

ถ้า $d'(y)=0$ แล้วจะได้ $\frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4}-8y+17\right)^{-\frac{1}{2}}\left(y^3-8\right)=0$

นั่นคือ $y=2$

ดังนั้น ค่าวิกฤต คือ 2

เนื่องจาก $d'(y)<0$ เมื่อ $y<2$

และ $d'(y)>0$ เมื่อ $y>2$

ดังนั้น d เป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty,2)$ และเป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(2,\infty)$

นั่นคือ d มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $y=2$ เพียงค่าเดียวในช่วงเปิด $(-\infty,\infty)$

ดังนั้น d มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $y=2$ และ $d(2)=\sqrt{5}$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

จะได้ว่า จุดบนพาราโบลา $y^2=2x$ ที่อยู่ใกล้จุด $(1,4)$ มากที่สุด คือ $\left(\frac{2^2}{2},2\right)=(2,2)$

16. ให้จุด A มีพิกัดเป็น $(a,0)$ เมื่อ $a\in(p,\infty)$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ (p,q) และตัดแกน Y ที่จุด B คือ

$$y=\left(\frac{q}{p-a}\right)(x-a)$$

จากรูป จะได้ว่า จุด B จะมีพิกัดเป็น $\left(0,\frac{qa}{a-p}\right)$

ให้ $f(a)$ แทน $OA+OB$

จะได้ $f(a) = a+\frac{qa}{a-p}$ เมื่อ $a\in(p,\infty)$

ดังนั้น $f'(a) = 1+\frac{(a-p)q-qa(1)}{(a-p)^2} = \frac{(a-p)^2-pq}{(a-p)^2}$

ถ้า $f'(a)=0$ แล้วจะได้ $\frac{(a-p)^2-pq}{(a-p)^2}=0$

นั่นคือ $a=p+\sqrt{pq}$ หรือ $a=p-\sqrt{pq}$

เนื่องจาก $p-\sqrt{pq}\notin(p,\infty)$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงเปิด (p,∞) คือ $p+\sqrt{pq}$

เนื่องจาก $f'(a)<0$ เมื่อ $p<a<p+\sqrt{pq}$

และ $f'(a) > 0$ เมื่อ $a > p + \sqrt{pq}$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบน $\left(p, p + \sqrt{pq}\right)$ และเป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $\left(p + \sqrt{pq}, \infty\right)$

นั่นคือ $f\left(p + \sqrt{pq}\right) = p + q + 2\sqrt{pq}$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เพียงค่าเดียวบนช่วง (p, ∞)

ดังนั้น $f\left(p + \sqrt{pq}\right) = p + q + 2\sqrt{pq}$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วง (p, ∞)

จะได้ว่า ค่าน้อยที่สุดของ $OA + OB$ ที่เป็นไปได้คือ $p + q + 2\sqrt{pq}$

แบบฝึกหัด 2.9

1. จาก $F(x) = \sqrt{x^2-1}$

จะได้ $F'(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}(2x)$

$= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

นั่นคือ $F'(x) = f(x)$

ดังนั้น $F(x) = \sqrt{x^2-1}$ เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

2. 1) $\int(x^4+3x^2+5x)dx = \int x^4dx + 3\int x^2dx + 5\int x\,dx$

$= \frac{x^5}{5} + 3\left(\frac{x^3}{3}\right) + 5\left(\frac{x^2}{2}\right) + c$

$= \frac{x^5}{5} + x^3 + \frac{5x^2}{2} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

2) $\int(2x^3-3x^2+6-2x^{-2})dx = 2\int x^3dx - 3\int x^2dx + 6\int 1dx - 2\int x^{-2}\,dx$

$= 2\left(\frac{x^4}{4}\right) - 3\left(\frac{x^3}{3}\right) + 6x - 2\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + c$

$= \frac{x^4}{2} - x^3 + 6x + \frac{2}{x} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

3) $\int\left(x^{10} - \frac{1}{x^3}\right)dx = \int x^{10}dx - \int x^{-3}dx$

$= \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{-2}}{-2} + c$

$= \frac{x^{11}}{11} + \frac{1}{2x^2} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

4) $\int\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4}\right)dx = \int x^{-2}dx + 2\int x^{-4}dx$

$= \frac{x^{-1}}{-1} + 2\left(\frac{x^{-3}}{-3}\right) + c$

$= -\frac{1}{x} - \frac{2}{3x^3} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

5) $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx$

$= \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$

$= \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

6) $\int \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{2}{3}} \right) dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx - \int x^{\frac{2}{3}}dx$

$= \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \dfrac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c$

$= \dfrac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \dfrac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

7) $\int \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx = \int x^{-2}dx - \dfrac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx$

$= \dfrac{x^{-1}}{-1} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) + c$

$= -\dfrac{1}{x} - \sqrt{x} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

8) $\int x^2(x-3)dx = \int \left(x^3 - 3x^2 \right) dx$

$= \int x^3dx - 3\int x^2dx$

$= \dfrac{x^4}{4} - 3\left(\dfrac{x^3}{3} \right) + c$

$= \dfrac{x^4}{4} - x^3 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

9) $\int \sqrt{x}(x+1)dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \right) dx$

$= \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx$

$= \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$

$= \dfrac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + \dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

10) $\int \left(\dfrac{x-2}{x^3} \right) dx = \int \left(x^{-2} - 2x^{-3} \right) dx$

$= \int x^{-2} dx - 2\int x^{-3} dx$

$= \dfrac{x^{-1}}{-1} - 2\left(\dfrac{x^{-2}}{-2} \right) + c$

$= -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

11) $\int \left(x^2 + 5x + 1 \right) dx = \int x^2 dx + 5\int x\, dx + \int 1 dx$

$= \dfrac{x^3}{3} + 5\left(\dfrac{x^2}{2} \right) + x + c$

$= \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5x^2}{2} + x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

12) $\int \left(6\sqrt{x} + 15 \right) dx = 6\int x^{\frac{1}{2}} dx + 15\int 1 dx$

$= 6\left(\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) + 15x + c$

$= 4x^{\frac{3}{2}} + 15x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

13) $\int\left(x^3+5x^2+6\right)dx = \int x^3dx+5\int x^2dx+6\int 1dx$

$= \frac{x^4}{4}+5\left(\frac{x^3}{3}\right)+6x+c$

$= \frac{x^4}{4}+\frac{5x^3}{3}+6x+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

14) $\int\left(\frac{6}{\sqrt{x}}+8\sqrt{x}\right)dx = 6\int x^{-\frac{1}{2}}dx+8\int x^{\frac{1}{2}}dx$

$= 6\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)+8\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)+c$

$= 12\sqrt{x}+\frac{16x^{\frac{3}{2}}}{3}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

15) $\int\left(x^4-12x^3+6x^2-10\right)dx = \int x^4dx-12\int x^3dx+6\int x^2dx-10\int 1dx$

$= \frac{x^5}{5}-12\left(\frac{x^4}{4}\right)+6\left(\frac{x^3}{3}\right)-10x+c$

$= \frac{x^5}{5}-3x^4+2x^3-10x+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

3. จาก $f'(x) = x$

จะได้ $f(x) = \int x\,dx$

$= \frac{x^2}{2}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $f(2) = 2$

ดังนั้น $\frac{2^2}{2}+c = 2$

นั่นคือ $c = 0$

จะได้ $f(x) = \frac{x^2}{2}$

4. จาก $f''(x) = -2$

จะได้ $f'(x) = \int -2\,dx$

$= -2x+c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เมื่อ $x=1$

จะได้ว่า 1 เป็นค่าวิกฤตของ f

นั่นคือ $f'(1) = 0$

$-2(1)+c_1 = 0$

$c_1 = 2$

ดังนั้น $f'(x) = -2x+2$

จะได้ $f(x) = \int(-2x+2)dx$

$= -2\int x\,dx + 2\int 1dx$

$= -2\left(\frac{x^2}{2}\right)+2x+c_2$

$= -x^2+2x+c_2$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $f(1) = 2$

$-1^2+2(1)+c_2 = 2$

$c_2 = 1$

ดังนั้น $f(x) = -x^2+2x+1$

5. 1) เนื่องจาก $\frac{dy}{dx}=x^2-3x+2$

จะได้ $y=\int\left(x^2-3x+2\right)dx$

ดังนั้น สมการเส้นโค้ง คือ $y=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

แต่เส้นโค้งนี้ผ่านจุด $(2,1)$ นั่นคือ $x=2$ และ $y=1$ สอดคล้องกับสมการเส้นโค้ง

แทน x และ y ในสมการเส้นโค้งด้วย 2 และ 1 ตามลำดับ

จะได้ $1=\frac{2^3}{3}-\frac{3\left(2^2\right)}{2}+2(2)+c$ นั่นคือ $c=\frac{1}{3}$

ดังนั้น สมการเส้นโค้งที่ต้องการคือ $y=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x+\frac{1}{3}$

2) เนื่องจาก $\frac{dy}{dx}=2x^3+4x$

จะได้ $y=\int\left(2x^3+4x\right)dx$

ดังนั้น สมการเส้นโค้ง คือ $y=\frac{x^4}{2}+2x^2+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

แต่เส้นโค้งนี้ผ่านจุด $(0,5)$ นั่นคือ $x=0$ และ $y=5$ สอดคล้องกับสมการเส้นโค้ง

แทน x และ y ในสมการเส้นโค้งด้วย 0 และ 5 ตามลำดับ

จะได้ $5=\frac{0^4}{2}+2(0)^2+c$ นั่นคือ $c=5$

ดังนั้น สมการเส้นโค้งที่ต้องการคือ $y=\frac{x^4}{2}+2x^2+5$

3) เนื่องจาก $\frac{dy}{dx}=6+3x^2-2x^4$

จะได้ $y=\int\left(6+3x^2-2x^4\right)dx$

ดังนั้น สมการเส้นโค้ง คือ $y=6x+x^3-\frac{2x^5}{5}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

แต่เส้นโค้งนี้ผ่านจุด $(1,0)$ นั่นคือ $x=1$ และ $y=0$ สอดคล้องกับสมการเส้นโค้ง

แทน x และ y ในสมการเส้นโค้งด้วย 1 และ 0 ตามลำดับ

จะได้ $0=6(1)+(1)^3-\frac{2(1)^5}{5}+c$ นั่นคือ $c=-\frac{33}{5}$

ดังนั้น สมการเส้นโค้งที่ต้องการคือ $y=-\frac{2}{5}x^5+x^3+6x-\frac{33}{5}$

6. 1) เนื่องจาก $a(t) = v'(t)$

ดังนั้น $v'(t) = 6-2t$

จะได้ $v(t) = \int(6-2t)dt$

$= 6t-t^2+c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $v(0) = 5$

ดังนั้น $6(0)-(0)^2+c_1 = 5$

$c_1 = 5$

จะได้ $v(t) = 6t - t^2 + 5$ เมื่อ $0 \le t \le 3$

เนื่องจาก $v(t) = s'(t)$

ดังนั้น $s'(t) = 6t - t^2 + 5$

จะได้ $s(t) = \int (6t - t^2 + 5)\,dt$

$= 3t^2 - \frac{t^3}{3} + 5t + c_2$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $s(0) = 0$

ดังนั้น $3(0)^2 - \frac{(0)^3}{3} + 5(0) + c_2 = 0$

$c_2 = 0$

จะได้ $s(t) = 3t^2 - \frac{t^3}{3} + 5t$ เมื่อ $0 \le t \le 3$

2) เนื่องจาก $a(t) = v'(t)$

ดังนั้น $v'(t) = 120t - 12t^2$

จะได้ $v(t) = \int (120t - 12t^2)\,dt$

$= 60t^2 - 4t^3 + c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $v(0) = 0$

ดังนั้น $60(0)^2 - 4(0)^3 + c_1 = 0$

$c_1 = 0$

จะได้ $v(t) = 60t^2 - 4t^3$ เมื่อ $0 \le t \le 10$

เนื่องจาก $v(t) = s'(t)$

ดังนั้น $s'(t) = 60t^2 - 4t^3$

จะได้ $s(t) = \int (60t^2 - 4t^3)\,dt$

$= 20t^3 - t^4 + c_2$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $s(0) = 4$

ดังนั้น $20(0)^3 - (0)^4 + c_2 = 4$

$c_2 = 4$

จะได้ $s(t) = 20t^3 - t^4 + 4$ เมื่อ $0 \le t \le 10$

3) เนื่องจาก $a(t) = v'(t)$

ดังนั้น $v'(t) = t^2 + 5t + 4$

จะได้ $v(t) = \int (t^2 + 5t + 4)\,dt$

$= \frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} + 4t + c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $v(0) = -2$

ดังนั้น $\frac{(0)^3}{3} + \frac{5(0)^2}{2} + 4(0) + c_1 = -2$

$c_1 = -2$

จะได้ $v(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} + 4t - 2$ เมื่อ $0 \le t \le 15$

เนื่องจาก $v(t) = s'(t)$

ดังนั้น $s'(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} + 4t - 2$

จะได้ $s(t) = \int \left(\frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} + 4t - 2 \right) dt$

$= \frac{t^4}{12} + \frac{5t^3}{6} + 2t^2 - 2t + c_2$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $s(0) = -3$

ดังนั้น $\frac{(0)^4}{12} + \frac{5(0)^3}{6} + 2(0)^2 - 2(0) + c_2 = -3$

$c_2 = -3$

จะได้ $s(t) = \frac{t^4}{12} + \frac{5t^3}{6} + 2t^2 - 2t - 3$ เมื่อ $0 \le t \le 15$

7. 1) ให้ $s(t)$ เป็นความสูงของวัตถุจากพื้นดิน (หน่วยเป็นเมตร) ณ เวลา t วินาที

$v(t)$ เป็นความเร็วของวัตถุ (หน่วยเป็นเมตรต่อวินาที) ขณะเวลา t ใด ๆ

$a(t)$ เป็นความเร่งของวัตถุ (หน่วยเป็นเมตรต่อวินาที^{2}) ขณะเวลา t ใด ๆ

เนื่องจาก $a(t)=v'(t)$ และความเร่งมีทิศลงสู่พื้นโลก

ดังนั้น $v'(t)=-9.8$

จะได้ $v(t) = \int(-9.8)\,dt$

$= -9.8t+c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $v(0) = 98$

ดังนั้น $v(0) = 98$

$-9.8(0)+c_1 = 98$

$c_1 = 98$

นั่นคือ $v(t)=-9.8t+98$

เนื่องจาก $v(t)=s'(t)$

จะได้ $s'(t) = -9.8t+98$

ดังนั้น $s(t) = \int(-9.8t+98)\,dt$

$= -4.9t^2+98t+c_2$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $s(0) = 0$

ดังนั้น $-4.9(0)^2+98(0)+c_2 = 0$

$c_2 = 0$

จะได้ $s(t) = -4.9t^2+98t$

เนื่องจาก $s(t) \geq 0$

ดังนั้น $-4.9t^2+98t \geq 0$

$t(t-20) \leq 0$

นั่นคือ $0 \leq t \leq 20$

จะได้ $s(t) = -4.9t^2+98t$ เมื่อ $0 \leq t \leq 20$

2) จาก $s'(t) = -9.8t + 98$

ถ้า $s'(t) = 0$

จะได้ $t = 10$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชัน s ในช่วง $(0, 20)$ คือ 10

เนื่องจาก $s(10) = -4.9(10)^2 + 98(10) = 490$

$s(0) = -4.9(0)^2 + 98(0) = 0$

และ $s(20) = -4.9(20)^2 + 98(20) = 0$

สรุปได้ว่า ฟังก์ชัน S มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $s = 10$ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $s(10) = 490$ ดังนั้น วัตถุขึ้นไปถึงตำแหน่งสูงสุด เมื่อเวลาผ่านไป 10 วินาที และตำแหน่งสูงสุดของวัตถุ คือ 490 เมตร

3) ต้องการหา t ที่ทำให้ $s(t) = 249.9$

เนื่องจาก $s(t) = -4.9t^2 + 98t$ เมื่อ $0 \le t \le 20$

ดังนั้น $249.9 = -4.9t^2 + 98t$

นั่นคือ $t^2 - 20t + 51 = 0$

$(t-3)(t-17) = 0$

จะได้ $t = 3$ หรือ $t = 17$

นั่นคือ ต้องใช้เวลา 3 วินาที หรือ 17 วินาที วัตถุจึงอยู่สูง 249.9 เมตร จากพื้นดิน

8. เนื่องจาก $a(t) = \frac{1}{4}(20-t)$ เมื่อ $0 \le t \le 20$ และ $a(t) = v'(t)$

ดังนั้น $v(t) = \int \frac{1}{4}(20-t)\,dt$

$= 5t - \frac{t^2}{8} + c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว และ $0 \le t \le 20$

เนื่องจาก $v(0) = 0$

ดังนั้น $5(0) - \frac{0^2}{8} + c_1 = 0$

$c_1 = 0$

จะได้ $v(t) = 5t - \frac{t^2}{8}$ เมื่อ $0 \le t \le 20$

เนื่องจากรถไฟแล่นด้วยความเร็วเท่าเดิมหลังวินาทีที่ 20

และ $v(20) = 5(20) - \frac{20^2}{8} = 50$

ดังนั้น หลังวินาทีที่ 20 รถไฟแล่นด้วยความเร็ว 50 เมตรต่อวินาที

เนื่องจาก $v(t) = 5t - \frac{t^2}{8}$ เมื่อ $0 \le t \le 20$ และ $v(t) = s'(t)$

ดังนั้น $s(t) = \int \left(5t - \frac{t^2}{8}\right) dt$

$= \frac{5t^2}{2} - \frac{t^3}{24} + c_2$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว และ $0 \le t \le 20$

เนื่องจาก $s(0) = 0$

ดังนั้น $\frac{5(0)^2}{2} - \frac{0^3}{24} + c_2 = 0$

$c_2 = 0$

จะได้ $s(t) = \frac{5t^2}{2} - \frac{t^3}{24}$ เมื่อ $0 \le t \le 20$

เนื่องจาก $s(20) = \frac{5(20)^2}{2} - \frac{(20)^3}{24} = \frac{2000}{3}$

ดังนั้น ณ วินาทีที่ 20 รถไฟอยู่ห่างจากสถานีต้นทางเป็นระยะ $\frac{2000}{3}$ เมตร

เนื่องจาก หลังวินาทีที่ 20 รถไฟแล่นด้วยความเร็ว 50 เมตรต่อวินาที

ดังนั้น จากวินาทีที่ 20 จนถึงวินาทีที่ 30 รถไฟแล่นได้ระยะทางเพิ่มขึ้นอีก $50(30-20) = 500$ เมตร

นั่นคือ เมื่อเวลาผ่านไป 30 วินาที รถไฟจะอยู่ห่างจากสถานีต้นทางเป็นระยะทาง

$\frac{2,000}{3} + 500 \approx 1,166.67$ เมตร

9. เนื่องจาก $\frac{d}{dt}N(t) = 1200t^2 - 15t^4$

ดังนั้น $N(t) = \int\left(1200t^2 - 15t^4\right)dt$

$= 400t^3 - 3t^5 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $N(0) = 600$

ดังนั้น $400(0)^3 - 3(0)^5 + c = 600$

$c = 600$

จะได้ $N(t) = 400t^3 - 3t^5 + 600$

ดังนั้น จำนวนปรสิต ณ เวลา t สัปดาห์ คือ $400t^3 - 3t^5 + 600$ ตัว

10. เนื่องจาก $\frac{d}{dt}H(t) = \frac{1}{4}t^{\frac{1}{4}}$

ดังนั้น $H(t) = \int\frac{1}{4}t^{\frac{1}{4}}dt$

$= \frac{t^{\frac{5}{4}}}{5} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $H(0) = 1$

ดังนั้น $\frac{0^{\frac{5}{4}}}{5} + c = 1$

$c = 1$

จะได้ $H(t) = \frac{t^{\frac{5}{4}}}{5} + 1$

ดังนั้น ต้นไม้ต้นนี้จะสูง $\frac{t^{\frac{5}{4}}}{5} + 1$ เมตร ในเวลา t ปี

11. 1) ให้ $C(x)$ เป็นค่าใช้จ่ายรวมสำหรับงานชนิดหนึ่ง (หน่วย : ร้อยบาท)

เมื่อ x แทนจำนวนวันนับตั้งแต่เริ่มงาน

เนื่องจาก $E(x) = 120x+60$ และ $C'(x) = E(x)$

ดังนั้น $C(x) = \int(120x+60)dx$

$= 60x^2+60x+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $C(0) = 0$

ดังนั้น $60(0)^2+60(0)+c = 0$

$c = 0$

จะได้ $C(x) = 60x^2+60x$

เนื่องจาก $C(10) = 60(10)^2+60(10) = 6,600$

ดังนั้น หากงานดังกล่าวใช้เวลา 10 วัน ค่าใช้จ่ายรวมจะเป็น $6,600\times100 = 660,000$ บาท

2) เนื่องจาก $C(25) = 60(25)^2+60(25) = 39,000$

ดังนั้น หากงานดังกล่าวใช้เวลา 25 วัน ค่าใช้จ่ายรวมจะเป็น $3,900,000$ บาท

นั่นคือ ค่าใช้จ่ายรวมที่เพิ่มขึ้นนับตั้งแต่วันที่ 10 ถึงวันที่ 25 คือ

$3,900,000-660,000 = 3,240,000$ บาท

12. ให้ $F(x)$ เป็นพลังงานรวมโดยประมาณที่บ้านอยู่อาศัยใช้ ณ ปี ค.ศ. $x+2000$

จะได้ $F(x) = \int f(x)dx$

$= \int\left(2.17x^2-9.74x+19.956\right)dx$

$= \frac{2.17}{3}x^3-4.87x^2+19.956x+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $F(40) = \frac{2.17}{3}(40)^3-4.87(40)^2+19.956(40)+c = 39,299.57+c$

$F(15) = \frac{2.17}{3}(15)^3-4.87(15)^2+19.956(15)+c = 1,644.84+c$

นั่นคือ พลังงานรวมที่บ้านอยู่อาศัยใช้ตั้งแต่ ค.ศ. 2015 ถึง 2040 มีค่าประมาณ

$F(40)-F(15) = 37,654.73$ ล้านล้านบีทียู

แบบฝึกหัด 2.10

1. 1) เนื่องจาก $\int\left(x^3+3\right)dx=\frac{x^4}{4}+3x+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

จะได้ว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $f\left(x\right)=x^3+3$ คือ $F\left(x\right)=\frac{x^4}{4}+3x+c$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int_3^4\left(x^3+3\right)dx &= \left(\frac{x^4}{4}+3x\right)\Big|_3^4\\ &= \left(\frac{4^4}{4}+3(4)\right)-\left(\frac{3^4}{4}+3(3)\right)\\ &= \frac{187}{4}\end{aligned}$$

2) เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\int\left(x^2-2x-3\right)dx &= \frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}-3x+c\\ &= \frac{x^3}{3}-x^2-3x+c \qquad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}\end{aligned}$$

จะได้ว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $f\left(x\right)=x^2-2x-3$ คือ $F\left(x\right)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+c$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int_1^4\left(x^2-2x-3\right)dx &= \left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Big|_1^4\\ &= \left(\frac{4^3}{3}-4^2-3(4)\right)-\left(\frac{1^3}{3}-1^2-3(1)\right)\\ &= -3\end{aligned}$$

3) เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\int\left(4x^3+2x\right)dx &= \frac{4x^4}{4}+\frac{2x^2}{2}+c\\ &= x^4+x^2+c \qquad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}\end{aligned}$$

จะได้ว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $f\left(x\right)=4x^3+2x$ คือ $F\left(x\right)=x^4+x^2+c$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int_{-1}^1\left(4x^3+2x\right)dx &= \left(x^4+x^2\right)\Big|_{-1}^1\\ &= \left(1^4+1^2\right)-\left((-1)^4+(-1)^2\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

4) เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2}dx &= \int x^{-2}dx \\ &= \frac{x^{-1}}{-1}+c \\ &= -\frac{1}{x}+c \qquad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}\end{aligned}$$

จะได้ว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=\frac{1}{x^2}$ คือ $F(x)=-\frac{1}{x}+c$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2}dx &= \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-3}^{-1} \\ &= \left(-\frac{1}{-1}\right)-\left(-\frac{1}{-3}\right) \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

5) เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\int\left(x^2+\frac{3}{x^3}\right)dx &= \int x^2dx+3\int x^{-3}dx \\ &= \frac{x^3}{3}+3\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)+c \\ &= \frac{x^3}{3}-\frac{3}{2x^2}+c \qquad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}\end{aligned}$$

จะได้ว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=x^2+\frac{3}{x^3}$ คือ $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2x^2}+c$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int_{2}^{4}\left(x^2+\frac{3}{x^3}\right)dx &= \left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2x^2}\right)\Bigg|_{2}^{4} \\ &= \left(\frac{4^3}{3}-\frac{3}{2(4)^2}\right)-\left(\frac{2^3}{3}-\frac{3}{2(2)^2}\right) \\ &= \frac{1,819}{96}\end{aligned}$$

6) เนื่องจาก $\int\left(-x^4+x^2-1\right)dx = -\int x^4dx+\int x^2dx-\int 1dx$

$= -\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}-x+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

จะได้ว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=-x^4+x^2-1$ คือ $F(x)=-\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}-x+c$

ดังนั้น $\int_{-1}^{1}\left(-x^4+x^2-1\right)dx = \left(-\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_{-1}^{1}$

$= \left(-\frac{1^5}{5}+\frac{1^3}{3}-1\right)-\left(-\frac{(-1)^5}{5}+\frac{(-1)^3}{3}-(-1)\right)$

$= -\frac{26}{15}$

7) เนื่องจาก $\int x\left(x^2+1\right)dx = \int\left(x^3+x\right)dx$

$= \int x^3dx+\int x\,dx$

$= \frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

จะได้ว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=x\left(x^2+1\right)$ คือ $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+c$

ดังนั้น $\int_{0}^{1}x\left(x^2+1\right)dx = \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1}$

$= \left(\frac{1^4}{4}+\frac{1^2}{2}\right)-\left(\frac{0^4}{4}+\frac{0^2}{2}\right)$

$= \frac{3}{4}$

8) เนื่องจาก $\int x^2\left(x^2+1\right)^2 dx = \int\left(x^6+2x^4+x^2\right)dx$

$= \int x^6 dx + 2\int x^4 dx + \int x^2 dx$

$= \frac{x^7}{7}+\frac{2x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

จะได้ว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=x^2\left(x^2+1\right)^2$ คือ $F(x)=\frac{x^7}{7}+\frac{2x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+c$

ดังนั้น $\int_0^1 x^2\left(x^2+1\right)^2 dx = \left.\left(\frac{x^7}{7}+\frac{2x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1$

$= \left(\frac{1^7}{7}+\frac{2(1)^5}{5}+\frac{1^3}{3}\right)-\left(\frac{0^7}{7}+\frac{2(0)^5}{5}+\frac{0^3}{3}\right)$

$= \frac{92}{105}$

9) เนื่องจาก $\int\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)dx = 2\int x\,dx-\frac{1}{3}\int x^3 dx$

$= \frac{2x^2}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4}+c$

$= x^2-\frac{x^4}{12}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

จะได้ว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=2x-\frac{x^3}{3}$ คือ $F(x)=x^2-\frac{x^4}{12}+c$

ดังนั้น $\int_1^4\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)dx = \left.\left(x^2-\frac{x^4}{12}\right)\right|_1^4$

$= \left(4^2-\frac{4^4}{12}\right)-\left(1^2-\frac{1^4}{12}\right)$

$= -\frac{25}{4}$

10) เนื่องจาก $\int x\left(x^2+1\right)^2 dx = \int\left(x^5+2x^3+x\right)dx$

$= \int x^5 dx + 2\int x^3 dx + \int x\,dx$

$= \frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

จะได้ว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=x\left(x^2+1\right)^2$ คือ $F(x)=\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}+c$

ดังนั้น $\int_0^2 x\left(x^2+1\right)^2 dx = \left.\left(\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^2$

$= \left(\frac{2^6}{6}+\frac{2^4}{2}+\frac{2^2}{2}\right)-\left(\frac{0^6}{6}+\frac{0^4}{2}+\frac{0^2}{2}\right)$

$= \frac{62}{3}$

2. เนื่องจาก $v(t)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $a(t)$

ดังนั้น $\int_0^5 a(t)dt = v(5)-v(0)$

เนื่องจาก $\int_0^5 a(t)dt = 10$ และ $v(0)=20$

ดังนั้น $10 = v(5)-20$

นั่นคือ $v(5) = 30$

จะได้ว่า ความเร็วของรถยนต์คันนี้ขณะเวลา 5 วินาที คือ 30 เมตรต่อวินาที

แบบฝึกหัด 2.11

1. 1) กราฟของ $f(x)=x^2$ เป็นรูปพาราโบลาหงาย และ $f(x)\geq 0$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[-3, 0]$

ให้ A แทนพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=x^2$ จาก $x=-3$ ถึง $x=0$

เนื่องจาก $f(x)\geq 0$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[-3, 0]$

จะได้ $A=\int_{-3}^{0} x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-3}^{0}=0-(-9)=9$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=x^2$ จาก $x=-3$ ถึง $x=0$ เท่ากับ 9 ตารางหน่วย

2) กราฟของ $f(x)=x+1$ เป็นเส้นตรง และ $f(x)\geq 0$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[-1, 1]$

ให้ A แทนพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=x+1$ จาก $x=-1$ ถึง $x=1$

เนื่องจาก $f(x)\geq 0$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[-1, 1]$

จะได้ $A=\int_{-1}^{1}(x+1)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right|_{-1}^{1}=\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=2$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=x+1$ จาก $x=-1$ ถึง $x=1$ เท่ากับ 2 ตารางหน่วย

3) กราฟของ $f(x)=6+x-x^2$ เป็นรูปพาราโบลาคว่ำ และ $f(x)\geq 0$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[-1, 1]$

ให้ A แทนพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=6+x-x^2$ จาก $x=-1$ ถึง $x=1$

เนื่องจาก $f(x)\geq 0$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[-1, 1]$

จะได้ $A=\int_{-1}^{1}(6+x-x^2)dx=\left.\left(6x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{1}=\frac{37}{6}-\left(-\frac{31}{6}\right)=\frac{34}{3}$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=6+x-x^2$ จาก $x=-1$ ถึง $x=1$ เท่ากับ $\frac{34}{3}$ ตารางหน่วย

4) กราฟของ $f(x)=9-x^2$ เป็นรูปพาราโบลาคว่ำ และ $f(x)\geq 0$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[-3, 3]$

ให้ A แทนพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=9-x^2$ จาก $x=-3$ ถึง $x=3$

เนื่องจาก $f(x)\geq 0$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[-3, 3]$

จะได้ $A=\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx=\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{3}=18-(-18)=36$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=9-x^2$ จาก $x=-3$ ถึง $x=3$ เท่ากับ 36 ตารางหน่วย

5) กราฟของ $f(x)=x^2-25$ เป็นรูปพาราโบลาหงาย และ $f(x)\leq 0$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[-1, 3]$

ให้ A แทนพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=x^2-25$ จาก $x=-1$ ถึง $x=3$

เนื่องจาก $f(x)\leq 0$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[-1, 3]$

จะได้ $A=-\int_{-1}^{3}(x^2-25)dx=-\left(\frac{x^3}{3}-25x\right)\Big|_{-1}^{3}=-\left(-66-\frac{74}{3}\right)=\frac{272}{3}$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=x^2-25$ จาก $x=-1$ ถึง $x=3$ เท่ากับ $\frac{272}{3}$ ตารางหน่วย

2. จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส จะได้ว่า $F(1)-F(0)=\int_{0}^{1}f(x)dx$

เนื่องจากพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ f บนช่วง $[0, 1]$ เท่ากับ $\frac{1}{2}(1)(2)=1$ ตารางหน่วย

ดังนั้น $\int_{0}^{1}f(x)dx=-1$

และเนื่องจาก $F(0)=0$

ดังนั้น $F(1)=\int_{0}^{1}f(x)dx+F(0)=-1+0=-1$

ต่อไปหาค่าของ $F(2)$

จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส จะได้ว่า $F(2)-F(1)=\int_{1}^{2}f(x)dx$

เนื่องจากพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ f บนช่วง $[1, 2]$ เท่ากับ

$\frac{1}{2}(2+1)(1)=\frac{3}{2}$ ตารางหน่วย

ดังนั้น $\int_1^2 f(x)dx=-\frac{3}{2}$

และเนื่องจาก $F(1)=-1$

ดังนั้น $F(2)=\int_1^2 f(x)dx+F(1)=-\frac{3}{2}+(-1)=-\frac{5}{2}$

ต่อไปหาค่าของ $F(3)$

จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส จะได้ว่า $F(3)-F(2)=\int_2^3 f(x)dx$

เนื่องจากพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ f บนช่วง $[2, 3]$ เท่ากับ

$\frac{1}{2}(1)(1)=\frac{1}{2}$ ตารางหน่วย

ดังนั้น $\int_2^3 f(x)dx=-\frac{1}{2}$

และเนื่องจาก $F(2)=-\frac{5}{2}$

ดังนั้น $F(3)=\int_2^3 f(x)dx+F(2)=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{2}\right)=-3$

ต่อไปหาค่าของ $F(4)$

จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส จะได้ว่า $F(4)-F(3)=\int_3^4 f(x)dx$

เนื่องจากพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ f บนช่วง $[3, 4]$ เท่ากับ

$\frac{1}{2}(1)(1)=\frac{1}{2}$ ตารางหน่วย

ดังนั้น $\int_3^4 f(x)dx=\frac{1}{2}$

และเนื่องจาก $F(3)=-3$

ดังนั้น $F(4)=\int_3^4 f(x)dx+F(3)=\frac{1}{2}+(-3)=-\frac{5}{2}$

ต่อไปหาค่าของ $F(5)$

จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส จะได้ว่า $F(5)-F(4)=\int_4^5 f(x)\,dx$

เนื่องจากพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ f บนช่วง $[4, 5]$ เท่ากับ

$\frac{1}{2}(1)(1)=\frac{1}{2}$ ตารางหน่วย

ดังนั้น $\int_4^5 f(x)\,dx=\frac{1}{2}$

และเนื่องจาก $F(4)=-\frac{5}{2}$

ดังนั้น $F(5)=\int_4^5 f(x)\,dx+F(4)=\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{2}\right)=-2$

สรุปได้ว่า $F(1)=-1$, $F(2)=-\frac{5}{2}$, $F(3)=-3$, $F(4)=-\frac{5}{2}$ และ $F(5)=-2$

3. ให้ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f

จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส จะได้ว่า $F(2)-F(0)=\int_0^2 f(x)\,dx$

เนื่องจากพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ f บนช่วง $[0, 2]$ เท่ากับ 5 ตารางหน่วย

ดังนั้น $\int_0^2 f(x)\,dx=5$

และเนื่องจาก $F(0)=3$

ดังนั้น $F(2)=\int_0^2 f(x)\,dx+F(0)=5+3=8$

ต่อไปหาค่าของ $F(5)$

จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส จะได้ว่า $F(5)-F(2)=\int_2^5 f(x)\,dx$

เนื่องจากพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ f บนช่วง $[2, 5]$ เท่ากับ 16 ตารางหน่วย

ดังนั้น $\int_2^5 f(x)\,dx=-16$

และเนื่องจาก $F(2)=8$

ดังนั้น $F(5)=\int_2^5 f(x)\,dx+F(2)=-16+8=-8$

ต่อไปหาค่าของ $F(6)$

จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส จะได้ว่า $F(6)-F(5)=\int_5^6 f(x)\,dx$

เนื่องจากพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ f บนช่วง $[5, 6]$ เท่ากับ 10 ตารางหน่วย

ดังนั้น $\int_5^6 f(x)\,dx=10$

และเนื่องจาก $F(5)=-8$

ดังนั้น $F(6)=\int_5^6 f(x)\,dx+F(5)=10+(-8)=2$

สรุปได้ว่า $F(2)=8$, $F(5)=-8$ และ $F(6)=2$

4. เนื่องจาก $v(t)=60$ เมื่อ $t=\dfrac{20}{60\times 60}=\dfrac{1}{180}$ ชั่วโมง

ดังนั้น ต้องหา $s\left(\dfrac{1}{180}\right)$

เนื่องจาก $s(t)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $v(t)$

จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส จะได้ว่า $s\left(\dfrac{1}{180}\right)-s(0)=\int_0^{\frac{1}{180}} v(t)\,dt$

เนื่องจากพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ v บนช่วง $\left[0, \dfrac{1}{180}\right]$ เท่ากับ

$\dfrac{1}{2}(30)\left(\dfrac{5}{60\times 60}\right)+\dfrac{1}{2}(30+50)\left(\dfrac{5}{60\times 60}\right)+\dfrac{1}{2}(50+60)\left(\dfrac{10}{60\times 60}\right)=\dfrac{11}{48}$ ตารางหน่วย

ดังนั้น $\int_0^{\frac{1}{180}} v(t)\,dt=\dfrac{11}{48}$

และเนื่องจาก $s(0)=0$

ดังนั้น $s\left(\dfrac{1}{180}\right)=\int_0^{\frac{1}{180}} v(t)\,dt+s(0)=\dfrac{11}{48}+0=\dfrac{11}{48}$

นั่นคือ รถยนต์คันนี้แล่นได้ $\dfrac{11}{48}$ กิโลเมตร ในเวลา 20 วินาที

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(7x^6-11x^4+9\right) = 7(0)^6-11(0)^4+9 = 9$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^7+x^5+1}{x} = \dfrac{1^7+1^5+1}{1} = 3$

3) จัดรูปฟังก์ชันใหม่ ดังนี้

$$\frac{x^3-x^2-x-2}{x-2} = \frac{(x-2)(x^2+x+1)}{x-2} = x^2+x+1 \quad \text{เมื่อ} \quad x\neq 2$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+x+1\right) = 7$

4) เนื่องจาก $|x-1| = -(x-1)$ เมื่อ $x<1$

จะได้
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{\sqrt{|x-1|}} &= \lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{\sqrt{-(x-1)}}\\ &= \lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{\sqrt{-(x-1)}}\cdot\frac{\sqrt{-(x-1)}}{\sqrt{-(x-1)}}\\ &= \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)\sqrt{-(x-1)}}{-(x-1)}\\ &= \lim_{x\to 1^-}\left(-\sqrt{-(x-1)}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

และเนื่องจาก $|x-1| = x-1$ เมื่อ $x>1$

จะได้
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{|x-1|}} &= \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\\ &= \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\\ &= \lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}\\ &= 0\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{|x-1|}} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{|x-1|}} = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{|x-1|}} = 0$

5) จัดรูปฟังก์ชันใหม่ ดังนี้

$$\frac{1}{|x+1|}\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right) = \frac{1}{|x+1|}\left(\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\right)$$

$$= \frac{x^2+x+1}{|x+1|} \quad \text{เมื่อ} \quad x \neq 1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{|x+1|}\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)\right) = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+x+1}{|x+1|} = \frac{3}{2}$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+5}{x^2+4x-5} = \frac{2^2-6(2)+5}{2^2+4(2)-5} = -\frac{3}{7}$

7) จัดรูปฟังก์ชันใหม่ ดังนี้

$$\frac{x-1}{|x^2-1|} = \frac{x-1}{|x-1||x+1|}$$

เนื่องจาก $|x-1| = -(x-1)$ และ $|x+1| = x+1$ เมื่อ $-1 < x < 1$

จะได้ $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-1}{|x^2-1|} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-1}{-(x-1)(x+1)}$

$$= \lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

และเนื่องจาก $|x-1| = x-1$ และ $|x+1| = x+1$ เมื่อ $x > 1$

จะได้ $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{|x^2-1|} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-1}{|x^2-1|} \neq \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{|x^2-1|}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{|x^2-1|}$ ไม่มีค่า

8) **วิธีที่ 1** จัดรูปฟังก์ชันใหม่ ดังนี้

$$\frac{|x^2-4x+4|}{x-2} = \frac{|x-2|^2}{x-2}$$

เนื่องจาก $|x-2| = -(x-2)$ เมื่อ $x<2$

จะได้
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-}\frac{|x^2-4x+4|}{x-2} &= \lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|^2}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2^-}\frac{(-(x-2))^2}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2^-}(x-2)\\ &= 0\end{aligned}$$

และเนื่องจาก $|x-2| = x-2$ เมื่อ $x>2$

จะได้
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+}\frac{|x^2-4x+4|}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|^2}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)^2}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2^+}(x-2)\\ &= 0\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{x\to 2^-}\frac{|x^2-4x+4|}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{|x^2-4x+4|}{x-2} = 0$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2}\frac{|x^2-4x+4|}{x-2} = 0$

วิธีที่ 2 จัดรูปฟังก์ชันใหม่ ดังนี้

$$\frac{|x^2-4x+4|}{x-2} = \frac{|x-2|^2}{x-2} = \frac{(x-2)^2}{x-2} = x-2 \quad \text{เมื่อ} \quad x\neq 2$$

จะได้ $\lim_{x\to 2}\frac{|x^2-4x+4|}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-2) = 0$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2}\frac{|x^2-4x+4|}{x-2} = 0$

2. 1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)$

$= 0 + 1$

$= 1$

2) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|+1}{1-x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(-x)+1}{1-x}$ เนื่องจาก $x<0$

$= \dfrac{0+1}{1-0}$

$= 1$

3) เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ จะได้ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

4) เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x+1)$

$= 2 + 1$

$= 3$

และ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-5x+9)$

$= (2)^2 - 5(2) + 9$

$= 3$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$

5) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{|x|+1}{1-x}$

$= \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{-(-x)+1}{1-x}$ เนื่องจาก $x<0$

$= \dfrac{3+1}{1-(-3)}$

$= \dfrac{4}{4}$

$= 1$

6) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}(x+1)$

$= \dfrac{3}{2}+1$

$= \dfrac{5}{2}$

3. 1) จัดรูปฟังก์ชันใหม่ ดังนี้

$$\frac{x^2+x-6}{x-2} = \frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$$

$$= x+3 \qquad \text{เมื่อ } x \neq 2$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x+3)$

$$= 2+3$$

$$= 5$$

2) $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2}|x|$

$$= \lim_{x\to 2} x \qquad \text{เนื่องจาก } x>0$$

$$= 2$$

3) เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ หาค่าได้

จะได้ $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} f(x)}{\lim\limits_{x\to 2} g(x)} = \dfrac{5}{2}$

4) $\lim\limits_{x\to -2}\left(5f(x)-4g(x)\right) = 5f(-2)-4g(-2)$

$$= 5(-2+3)-4(2)$$

$$= -3$$

4. 1) จาก $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2-x} & , x\neq 1 \\ 2 & , x=1 \end{cases}$

ดังนั้น $f(1)=2$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x}$$

$$= 2$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$

2) จาก $f(x)=\begin{cases} x^3+x+1 & , x\le 1 \\ x^2+2 & , x>1 \end{cases}$

ดังนั้น $f(1)=3$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3+x+1\right) = 3$

และ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+2\right) = 3$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3 = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$

3) จาก $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & , x\ne 1 \\ 2 & , x=1 \end{cases}$

จะได้ $f(1)=2$

และ
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right) \\ &= 3\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \ne f(1)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$

4) จาก $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-x^{\frac{9}{10}}} & , 0<x<1 \\ 10 & , x\ge 1 \end{cases}$

ดังนั้น $f(1)=10$

และ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 10 = 10$

ต่อไปจะหา $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ ซึ่งเท่ากับ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{x-x^{\frac{9}{10}}}$

จัดรูปฟังก์ชันใหม่ โดยใช้เอกลักษณ์ $x^n - 1 = (x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})$

จะได้ $$\frac{x-1}{x-x^{\frac{9}{10}}} = \frac{\left(x^{\frac{1}{10}}-1\right)\left(1+x^{\frac{1}{10}}+x^{\frac{2}{10}}+\cdots+x^{\frac{9}{10}}\right)}{x^{\frac{9}{10}}\left(x^{\frac{1}{10}}-1\right)}$$

$$= \frac{1+x^{\frac{1}{10}}+x^{\frac{2}{10}}+\cdots+x^{\frac{9}{10}}}{x^{\frac{9}{10}}} \quad \text{เมื่อ } x \neq 1$$

ดังนั้น $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1+x^{\frac{1}{10}}+x^{\frac{2}{10}}+\cdots+x^{\frac{9}{10}}}{x^{\frac{9}{10}}}$$

$$= \frac{1+1^{\frac{1}{10}}+1^{\frac{2}{10}}+\cdots+1^{\frac{9}{10}}}{1^{\frac{9}{10}}}$$

$$= 10$$

เนื่องจาก $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 10$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1} f(x) = 10$

เนื่องจาก $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$

5. พิจารณา $f(x) = \frac{1}{x^2-7x+10} = \frac{1}{(x-2)(x-5)}$

จะได้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $x^2-7x+10 \neq 0$

เนื่องจาก $x^2-7x+10 = (x-2)(x-5)$ จะได้ $f(x)$ ไม่นิยามที่ $x=2$ และ $x=5$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=c$ ทุก $c \in \mathbb{R} - \{2,5\}$

1) เนื่องจาก $2 \notin (-\infty,2)$ และ $5 \notin (-\infty,2)$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,2)$

2) เนื่องจาก $2 \notin [3,4)$ และ $5 \notin [3,4)$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[3,4)$

3) เนื่องจาก $2 \notin (4,5)$ และ $5 \notin (4,5)$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(4,5)$

4) เนื่องจาก $2 \notin (5,\infty)$ และ $5 \notin (5,\infty)$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(5,\infty)$

6. พิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน g ที่ $x=-2$ และ $x=1$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} |x-2| = \lim\limits_{x\to -2^-} -(x-2) = -(-2-2) = 4$

และ $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (x+6) = -2+6 = 4$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} g(x) = 4$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -2} g(x) = 4$

และ $g(-2) = -2+6 = 4$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to -2} g(x) = g(-2)$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=-2$

ต่อไปพิจารณาที่ $x=1$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x+6) = 7$

และ $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-x+6) = 6$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น g ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$

1) เนื่องจาก $1 \notin (-\infty,-3]$ จะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,-3]$

2) เนื่องจาก $g(1) = 1+6 = 7$

นั่นคือ $g(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$

จะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-2,1]$

3) เนื่องจาก $1 \in [-4,3]$ จะได้ว่า g ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-4,3]$

4) เนื่องจาก $1 \notin (1,\infty)$ จะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(1,\infty)$

7. 1) จากโจทย์ f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุด

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=-2$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2^-} f(x) &= \lim_{x\to -2^+} f(x)\\ \lim_{x\to -2^-}\left(ax^2-x-1\right) &= \lim_{x\to -2^+}(x-a)\\ a(-2)^2-(-2)-1 &= (-2)-a\\ 4a+1 &= -a-2\end{aligned}$$

จะได้ $a = -\frac{3}{5}$

2) จากโจทย์ f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุด

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=2$

และ $x=4$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=2$

จะได้
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} f(x)\\ \lim_{x\to 2^-}(ax+b) &= \lim_{x\to 2^+}|1-x|\\ 2a+b &= \lim_{x\to 2^+}-(1-x)\\ 2a+b &= 1 \qquad \text{----- (1)}\end{aligned}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=4$

จะได้
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4^-} f(x) &= \lim_{x\to 4^+} f(x)\\ \lim_{x\to 4^-}|1-x| &= \lim_{x\to 4^+}\left(x^2-ax-b\right)\\ \lim_{x\to 4^-}-(1-x) &= \lim_{x\to 4^+}\left(x^2-ax-b\right)\\ 3 &= (4)^2-a(4)-b\\ 4a+b &= 13 \qquad \text{----- (2)}\end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $a=6$ และ $b=-11$

8. g อาจเป็นหรือไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดก็ได้ ตัวอย่างเช่น

ให้ $f(x)=0$ ทุก $x\in\mathbb{R}$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุด

เนื่องจาก $f(1)\neq g(1)$

ดังนั้น ถ้า $g(x)=0$ ทุก $x\in\mathbb{R}$ แล้ว g จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุด

ให้ $g(x)=\begin{cases}0 & ,x\neq 1\\ 1 & ,x=1\end{cases}$ จะได้ว่า $f(x)=g(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x\neq 1$

แต่ g ไม่ต่อเนื่องที่ $x=1$

ดังนั้น g ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุด

9. เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่ $x=1$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ มีค่า

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

จาก $f(x)=\begin{cases}ax-1 & ,x<1\\ (2a+b)x-b & ,x\geq 1\end{cases}$

จะได้ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(ax-1) = a-1$

และ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left((2a+b)x-b\right) = 2a$

ดังนั้น $a-1 = 2a$

นั่นคือ $a = -1$

เนื่องจาก $f(x) = (2a+b)x-b = (b-2)x-b$ เมื่อ $x\geq 1$

ดังนั้น $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left((b-2)x-b\right) = b-2$ เมื่อ $x>1$

เนื่องจาก $f'(2) = 2$

ดังนั้น $b-2 = 2$

นั่นคือ $b = 4$

จะได้ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left((b-2)x-b\right)$

$= \lim\limits_{x\to 2}(2x-4)$

$= 0$

10. 1) 1.1 $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -1$

1.2 $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = 1$

1.3 $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ ไม่มีค่า เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$

1.4 $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -2$

1.5 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$

1.6 $f(2) = 3$

1.7 $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$

1.8 $f(4) = 3$

1.9 $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ ไม่มีค่า เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 4 \neq 3 = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$

2) 2.1 ไม่มีค่า

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 4} x^2$ มีค่า

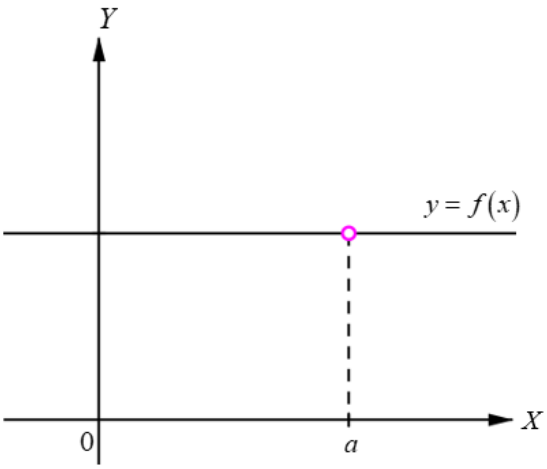
และ ถ้า $\lim\limits_{x\to 4}\left(x^2 + f(x)\right)$ มีค่าแล้ว จะทำให้

$\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4}\left(x^2 + f(x) - x^2\right) = \lim\limits_{x\to 4}\left(x^2 + f(x)\right) - \lim\limits_{x\to 4}\left(x^2\right)$ มีค่าด้วย

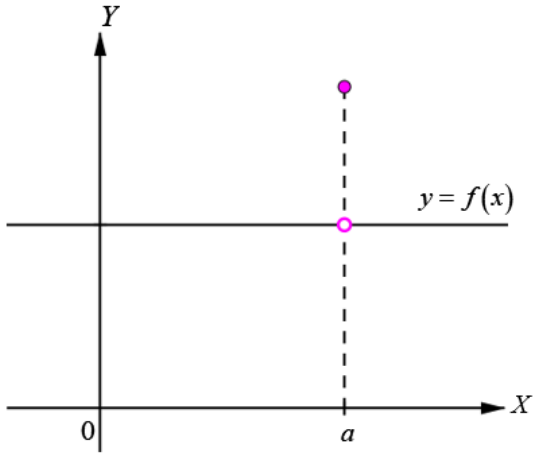
ซึ่งขัดแย้งกับข้อ 1.9

2.2 ควรนิยามค่าของ $f(-1) = -2$

11. 1)



2)



3) 3.1 เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} f_1(x) &= \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\\ &= \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}\\ &= \lim_{x\to -2}(x-2)\\ &= -4\end{aligned}$$

และ $f_1(-2)$ ไม่มีค่า

ดังนั้น f_1 เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบขจัดได้ที่ $x=-2$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f_2(x) &= \lim_{x\to 0^-}(-x)\\ &= 0\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f_2(x) &= \lim_{x\to 0^+} x\\ &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0} f_2(x) = 0$

เนื่องจาก $f_2(0) = 1$

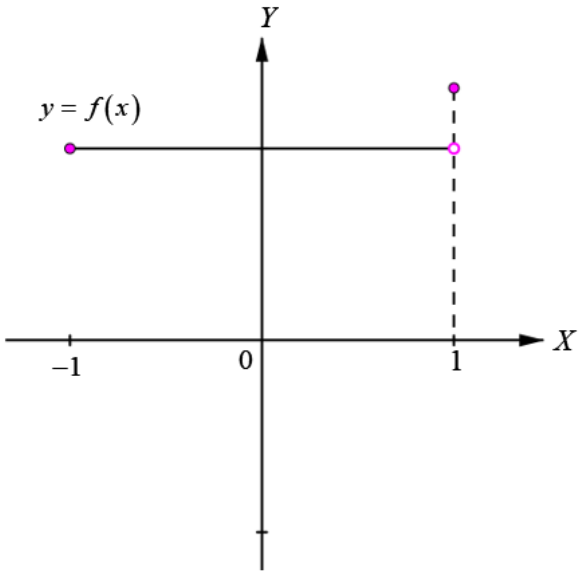
ดังนั้น $f_2(0) \neq \lim_{x\to 0} f_2(x)$

ดังนั้น f_2 เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบขจัดได้ที่ $x=0$

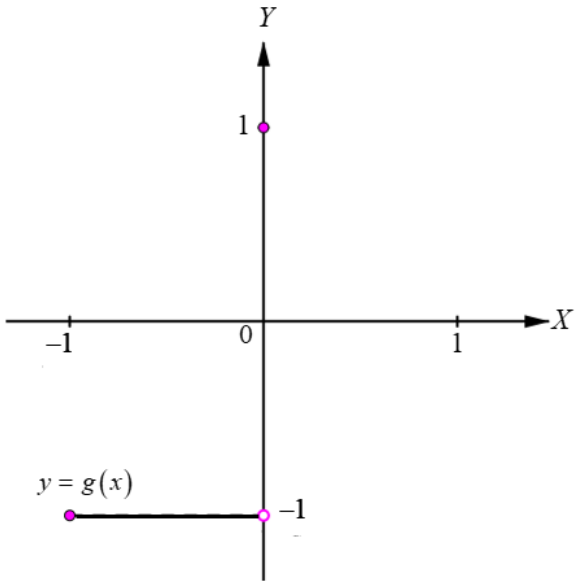
3.2 ต้องนิยามค่าของ $f_1(x)$ ที่ $x=-2$ โดยนิยามให้ $f_1(-2)=\lim_{x\to -2} f_1(x)=-4$

ต้องนิยามค่าของ $f_2(x)$ ที่ $x=0$ ใหม่ โดยนิยามให้ $f_2(0)=\lim_{x\to 0} f_2(x)=0$

12. 1) ตัวอย่างกราฟของฟังก์ชันที่สอดคล้อง



2) ตัวอย่างกราฟของฟังก์ชันที่สอดคล้อง



13. ให้ $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ จะได้ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก a เป็น $a+h$ คือ

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{(a+h)^2}-\frac{1}{a^2}}{h}\\ &= \frac{-2ah-h^2}{ha^2(a+h)^2}\\ &= \frac{-2a-h}{a^2(a+h)^2}\end{aligned}$$

1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 2 เป็น 3 คือ

$$\begin{aligned}\frac{f(2+1)-f(2)}{1} &= \frac{-2(2)-1}{2^2(2+1)^2}\\ &= -\frac{5}{36}\end{aligned}$$

2) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 2 เป็น 2.1 คือ

$$\begin{aligned}\frac{f(2+0.1)-f(2)}{0.1} &= \frac{-2(2)-0.1}{2^2(2+0.1)^2}\\ &= -\frac{4.1}{17.64}\\ &= -\frac{205}{882}\end{aligned}$$

3) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 2 เป็น 2.01 คือ

$$\begin{aligned}\frac{f(2+0.01)-f(2)}{0.01} &= \frac{-2(2)-0.01}{2^2(2+0.01)^2}\\ &= -\frac{4.01}{16.1604}\\ &\approx -0.25\end{aligned}$$

4) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x=2$ คือ

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{-2(2)-h}{2^2(2+h)^2}\\ &= \frac{-2(2)-0}{2^2(2+0)^2}\\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

14. 1) เนื่องจาก

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^3}{3}+\frac{x}{2}-2\sqrt{x}\\ &= \frac{x^3}{3}+\frac{x}{2}-2x^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x}{2}-2x^{\frac{1}{2}}\right)\\ &= \frac{3x^2}{3}+\frac{1}{2}-2\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}\\ &= x^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

2) ให้

$$u = x^2+3x-4$$

จะได้

$$y = u^3$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \frac{d}{du}(u)^3\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2+3x-4\right)\\ &= 3u^2\cdot(2x+3)\\ &= 3\left(x^2+3x-4\right)^2(2x+3)\end{aligned}$$

3) ให้ $u = 4x^2 - 5x + 7$

จะได้ $y = u^{-5}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du}(u)^{-5}\cdot\frac{d}{dx}\left(4x^2-5x+7\right) \\ &= -5u^{-6}\cdot(8x-5) \\ &= -5\left(4x^2-5x+7\right)^{-6}(8x-5) \end{aligned}$$

4) **วิธีที่ 1** เนื่องจาก
$$\begin{aligned} y &= x^2(2x+1)^3 \\ &= 8x^5+12x^4+6x^3+x^2 \end{aligned}$$

จะได้
$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\left(8x^5+12x^4+6x^3+x^2\right) \\ &= 8\frac{d}{dx}\left(x^5\right)+12\frac{d}{dx}\left(x^4\right)+6\frac{d}{dx}\left(x^3\right)+\frac{d}{dx}\left(x^2\right) \\ &= 8\left(5x^4\right)+12\left(4x^3\right)+6\left(3x^2\right)+(2x) \\ &= 40x^4+48x^3+18x^2+2x \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 เนื่องจาก
$$y = x^2(2x+1)^3$$

จะได้
$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\left(x^2(2x+1)^3\right) \\ &= x^2\frac{d}{dx}\left((2x+1)^3\right)+(2x+1)^3\frac{d}{dx}\left(x^2\right) \\ &= x^2\frac{d}{dx}\left((2x+1)^3\right)+(2x+1)^3(2x) \end{aligned}$$

ให้ $u = 2x+1$

จะได้
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left((2x+1)^3\right) &= \frac{d}{du}\left(u^3\right)\cdot\frac{d}{dx}(2x+1) \\ &= \left(3u^2\right)(2) \\ &= 6(2x+1)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} y' &= x^2\frac{d}{dx}\left((2x+1)^3\right)+(2x+1)^3(2x) \\ &= x^2\left(6(2x+1)^2\right)+(2x+1)^3(2x) \\ &= (2x)(2x+1)^2(3x+2x+1) \end{aligned}$$

$$= (2x)(2x+1)^2(5x+1)$$
$$= 40x^4 + 48x^3 + 18x^2 + 2x$$

5) **วิธีที่ 1** เนื่องจาก $y = \dfrac{(2x+1)^2(1-x)^3}{x^4}$

$$= x^{-4} + x^{-3} - 5x^{-2} - x^{-1} + 8 - 4x$$

จะได้ $y' = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-4} + x^{-3} - 5x^{-2} - x^{-1} + 8 - 4x\right)$

$$= -4x^{-5} - 3x^{-4} + 10x^{-3} + x^{-2} + 0 - 4$$
$$= \frac{-4 - 3x + 10x^2 + x^3 - 4x^5}{x^5}$$

วิธีที่ 2 เนื่องจาก $y = \dfrac{(2x+1)^2(1-x)^3}{x^4}$

จะได้ $y' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{(2x+1)^2(1-x)^3}{x^4}\right)$

$$= \frac{x^4\dfrac{d}{dx}\left((2x+1)^2(1-x)^3\right) - (2x+1)^2(1-x)^3\dfrac{d}{dx}\left(x^4\right)}{\left(x^4\right)^2}$$

$$= \frac{x^4\dfrac{d}{dx}\left((2x+1)^2(1-x)^3\right) - (2x+1)^2(1-x)^3\left(4x^3\right)}{x^8}$$

จาก $\dfrac{d}{dx}\left((2x+1)^2(1-x)^3\right) = (2x+1)^2\dfrac{d}{dx}\left((1-x)^3\right) + (1-x)^3\dfrac{d}{dx}\left((2x+1)^2\right)$

ให้ $u = 1-x$ และ $v = 2x+1$

จะได้ $\dfrac{d}{dx}\left((1-x)^3\right) = \dfrac{d}{du}\left(u^3\right)\cdot\dfrac{d}{dx}(1-x)$

$$= \left(3u^2\right)(-1)$$
$$= -3(1-x)^2$$

และ $\dfrac{d}{dx}\left((2x+1)^2\right) = \dfrac{d}{dv}\left(v^2\right)\cdot\dfrac{d}{dx}(2x+1)$

$$= (2v)(2)$$
$$= 4(2x+1)$$

จะได้ $\frac{d}{dx}\left((2x+1)^2(1-x)^3\right) = (2x+1)^2\left(-3(1-x)^2\right)+(1-x)^3\left(4(2x+1)\right)$

$= (1-10x)(1-x)^2(2x+1)$

ดังนั้น $y' = \frac{x^4\frac{d}{dx}\left((2x+1)^2(1-x)^3\right)-(2x+1)^2(1-x)^3\left(4x^3\right)}{x^8}$

$= \frac{x^4(1-10x)(1-x)^2(2x+1)-(2x+1)^2(1-x)^3\left(4x^3\right)}{x^8}$

$= -\frac{(2x+1)(x-1)^2\left(2x^2+3x+4\right)}{x^5}$

$= \frac{-4-3x+10x^2+x^3-4x^5}{x^5}$

6) ให้ $u = \frac{6x+1}{2-3x}$

จะได้ $y = u^5$

ดังนั้น $y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

$= \frac{d}{du}(u)^5\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{6x+1}{2-3x}\right)$

$= 5u^4\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{6x+1}{2-3x}\right)$

$= 5\left(\frac{6x+1}{2-3x}\right)^4\cdot\frac{(2-3x)\frac{d}{dx}(6x+1)-(6x+1)\frac{d}{dx}(2-3x)}{(2-3x)^2}$

$= 5\left(\frac{6x+1}{2-3x}\right)^4\cdot\frac{(2-3x)(6)-(6x+1)(-3)}{(2-3x)^2}$

$= 5\left(\frac{6x+1}{2-3x}\right)^4\cdot\frac{15}{(2-3x)^2}$

$= \frac{75(6x+1)^4}{(2-3x)^6}$

7) เนื่องจาก $y = \dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)^3} = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^3}$

จะได้ $y' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^3}\right)$

$$= \frac{(x+1)^3 \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - x^{\frac{1}{2}} \dfrac{d}{dx}\left((x+1)^3\right)}{\left((x+1)^3\right)^2}$$

$$= \frac{(x+1)^3\left(\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) - x^{\frac{1}{2}} \dfrac{d}{dx}\left((x+1)^3\right)}{(x+1)^6}$$

ให้ $u = x+1$

จะได้ $\dfrac{d}{dx}\left((x+1)^3\right) = \dfrac{d}{du}\left(u^3\right)\cdot\dfrac{d}{dx}(x+1)$

$$= \left(3u^2\right)(1)$$

$$= 3(x+1)^2$$

จะได้ $y' = \dfrac{(x+1)^3\left(\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) - x^{\frac{1}{2}}\left(3(x+1)^2\right)}{(x+1)^6}$

$$= \frac{(x+1)^2\left((x+1)\left(\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) - 3x^{\frac{1}{2}}\right)}{(x+1)^6}$$

$$= \frac{(x+1)^2\left(\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}\right)}{(x+1)^6}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \dfrac{5}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)^4} - \frac{5\sqrt{x}}{2(x+1)^4}$$

$$= \frac{1-5x}{2\sqrt{x}(x+1)^4}$$

8) **วิธีที่ 1** เนื่องจาก

$$y = \frac{x-1}{\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}}$$

$$= \frac{(2x-1)-x}{\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}}$$

$$= \sqrt{2x-1}-\sqrt{x}$$

$$= (2x-1)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$$

จะได้

$$y' = \frac{d}{dx}\left((2x-1)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left((2x-1)^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left((2x-1)^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

ให้ $u = 2x-1$

จะได้

$$\frac{d}{dx}\left((2x-1)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{d}{du}\left(u^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}(2x-1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right)(2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

จะได้

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

วิธีที่ 2 เนื่องจาก $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}}$

จะได้ $y' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}}\right)$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right)\frac{d}{dx}(x-1)-(x-1)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right)(1)-(x-1)\left(\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)+\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x-1}\right)\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right)^2}$$

ให้ $u = 2x-1$

จะได้ $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{2x-1}\right) = \dfrac{d}{dx}\left((2x-1)^{\frac{1}{2}}\right)$

$$= \frac{d}{du}\left(u^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}(2x-1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right)(2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

และ $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

จะได้ $y' = \dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right)-(x-1)\left(\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)+\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x-1}\right)\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right)^2}$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right)-(x-1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right)^2}$$

9) เนื่องจาก $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^4-6x^3+3}} = \left(x^4-6x^3+3\right)^{-\frac{1}{4}}$

ให้ $u = x^4-6x^3+3$

จะได้ $y = u^{-\frac{1}{4}}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{du}\left(u^{-\frac{1}{4}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^4-6x^3+3\right) \\ &= -\frac{1}{4}u^{-\frac{5}{4}}\cdot\left(4x^3-18x^2\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(x^4-6x^3+3\right)^{-\frac{5}{4}}\cdot\left(4x^3-18x^2\right) \end{aligned}$$

10) เนื่องจาก $y = \dfrac{1}{\left(x^5+\sqrt{x^3-x}\right)^{\frac{5}{3}}} = \left(x^5+\left(x^3-x\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{5}{3}}$

ให้ $u = x^5+\left(x^3-x\right)^{\frac{1}{2}}$

จะได้ $y = u^{-\frac{5}{3}}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{du}\left(u^{-\frac{5}{3}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^5+\left(x^3-x\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \left(-\frac{5}{3}u^{-\frac{8}{3}}\right)\left(\frac{d}{dx}\left(x^5\right)+\frac{d}{dx}\left(\left(x^3-x\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right) \\ &= -\frac{5}{3}\left(x^5+\left(x^3-x\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{8}{3}}\left(5x^4+\frac{d}{dx}\left(\left(x^3-x\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right) \end{aligned}$$

ให้ $v = x^3-x$

จะได้
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\left(x^3-x\right)^{\frac{1}{2}}\right) &= \frac{d}{dv}\left(v^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^3-x\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}\right)\left(3x^2-1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x^3-x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(3x^2-1\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น $y' = -\frac{5}{3}\left(x^5+\left(x^3-x\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{8}{3}}\left(5x^4+\frac{d}{dx}\left(\left(x^3-x\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)$

$= -\frac{5}{3}\left(x^5+\left(x^3-x\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{8}{3}}\left(5x^4+\frac{1}{2}\left(x^3-x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(3x^2-1\right)\right)$

15. 1) ให้ $f(x) = x^3-3x^2+4$ จะได้ $f'(x) = 3x^2-6x$

เมื่อ $x=-1$ จะได้ $f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+4=0$ และ $f'(-1)=3(-1)^2-6(-1)=9$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(-1, 0)$ คือ 9

สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชัน m คือ $y-y_1=m(x-x_1)$

เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(-1, 0)$ ที่มี $x=-1$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, 0)$ และมีความชัน 9

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(-1, 0)$ ที่มี $x=-1$ คือ $y-0=9(x-(-1))$

นั่นคือ $y=9x+9$

2) ให้ $f(x) = \frac{x^2-2}{3x-5}$

จะได้ $f'(x) = \frac{(3x-5)(2x)-(x^2-2)(3)}{(3x-5)^2}$

ดังนั้น $f'(4) = \frac{(3(4)-5)(2(4))-((4)^2-2)(3)}{(3(4)-5)^2}=\frac{2}{7}$

นั่นคือ ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(4, 2)$ คือ $\frac{2}{7}$

สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชัน m คือ $y-y_1=m(x-x_1)$

เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(4, 2)$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(4, 2)$ และมีความชัน $\frac{2}{7}$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(4, 2)$ คือ $y-2=\frac{2}{7}(x-4)$

นั่นคือ $y=\frac{2}{7}x+\frac{6}{7}$

16. ฟังก์ชัน f จะมีเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(0, 2)$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ หาค่าได้

เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{|(0+h)-2|-2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^-}\frac{|h-2|-2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^-}\frac{-(h-2)-2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^-}\frac{-h+2-2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^-}(-1)\\ &= -1\end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{\left(2-2(0+h)-(0+h)^2\right)-2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{-2h-h^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^+}(-2-h)\\ &= -2\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} \neq \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$

นั่นคือ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่มีเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(0,2)$

17. ให้ $f(x) = 2x^2+11x+15$ จะได้ $f'(x) = 4x+11$

และ $f'(-3) = 4(-3)+11 = -1$

นั่นคือ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(-3,0)$ คือ -1

เนื่องจากเส้นตรง $y = mx+c$ ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(-3,0)$

จะได้ $m\cdot(-1) = -1$ นั่นคือ $m = 1$

เนื่องจาก $(-3,0)$ เป็นจุดอยู่บนเส้นตรง $y = mx+c$ ดังนั้น $0=(1)(-3)+c$

จะได้ $c=3$ ดังนั้น $c-m=3-1=2$

18. เนื่องจาก $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$

จะได้ $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2+3}{x+1}\right)$

$$= \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(x^2+3)-(x^2+3)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(2x+0)-(x^2+3)(1+0)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

ดังนั้น $f'(0) = \dfrac{0^2+2(0)-3}{(0+1)^2}$

$$= -3$$

และ $f'(1) = \dfrac{1^2+2(1)-3}{(1+1)^2}$

$$= 0$$

19. จาก $x^2+y^2=4$

จะได้ $y = \pm(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$

เนื่องจากจุดที่ต้องการหาความชันคือ $(1,-\sqrt{3})$

ดังนั้นต้องใช้สมการ $y = -(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$

ต่อไปจะหาเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=-(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$ ที่จุด $(1,-\sqrt{3})$

ให้ $u = 4-x^2$

จะได้ $y = -u^{\frac{1}{2}}$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{du}\left(-u^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\dfrac{d}{dx}(4-x^2)$

$$= \left(-\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right)(-2x)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

จะได้ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \dfrac{1}{\sqrt{4-1^2}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $\left(1, -\sqrt{3}\right)$ คือ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชัน m คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $\left(1, -\sqrt{3}\right)$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $\left(1, -\sqrt{3}\right)$ และมีความชัน $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $\left(1, -\sqrt{3}\right)$ คือ $y - \left(-\sqrt{3}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$

นั่นคือ $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x - \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ ที่จุด $\left(1, -\sqrt{3}\right)$ คือ $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x - \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

20. จาก $y = x^3 + ax^2 + b$

จะได้ $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax$

ดังนั้น $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = 3(-1)^2 + 2a(-1)$

$= 3 - 2a$

นั่นคือ ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(-1, 3)$ คือ $3 - 2a$

เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ที่จุด $(-1, 3)$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $3y = x$ ซึ่งมีความชัน $\dfrac{1}{3}$ และเส้นตรงสองเส้นที่ตั้งฉากกันจะมีผลคูณของความชันของเส้นตรงสองเส้นนั้นเป็น -1

ดังนั้น เส้นสัมผัสเส้นโค้ง ที่จุด $(-1, 3)$ จะต้องมีความชันเป็น -3

นั่นคือ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = -3$

$3 - 2a = -3$

จะได้ $a = 3$

เนื่องจาก จุด $(-1, 3)$ อยู่บนเส้นโค้ง $y = x^3 + 3x^2 + b$

จะได้ $3 = (-1)^3 + 3(-1)^2 + b$

ดังนั้น $b = 1$

นั่นคือ สมการของเส้นโค้งคือ $y = x^3 + 3x^2 + 1$

เมื่อ $x = 1$ จะได้ $y = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 1 = 5$

ดังนั้น พิกัดของจุดตัดของเส้นโค้งนี้กับเส้นตรง $x = 1$ คือ $(1, 5)$

21. **วิธีที่ 1** ให้ $a = 3x + 5$

จะได้ $x = \frac{1}{3}(a-5)$

จาก $f(3x+5) = x^2 - x + 1$

จะได้ $f(a) = \left(\frac{1}{3}(a-5)\right)^2 - \frac{1}{3}(a-5) + 1$

$= \frac{1}{9}a^2 - \frac{13}{9}a + \frac{49}{9}$

ดังนั้น $f'(a) = \frac{d}{da}\left(\frac{1}{9}a^2 - \frac{13}{9}a + \frac{49}{9}\right)$

$= \frac{2}{9}a - \frac{13}{9}$

$f''(a) = \frac{d}{da}\left(\frac{2}{9}a - \frac{13}{9}\right)$

$= \frac{2}{9}$

และ $f'''(a) = \frac{d}{da}\left(\frac{2}{9}\right)$

$= 0$

จะได้ $f'(2) = \frac{2}{9}(2) - \frac{13}{9} = -1$

$f''(2) = \frac{2}{9}$

และ $f'''(2) = 0$

วิธีที่ 2 จาก $f(3x+5) = x^2 - x + 1$

จะได้ $\frac{d}{dx}\left(f(3x+5)\right) = \frac{d}{dx}\left(x^2 - x + 1\right)$

$$f'(3x+5)\cdot\frac{d}{dx}(3x+5) = 2x-1$$

$$f'(3x+5)\cdot 3 = 2x-1$$

$$f'(3x+5) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}\left(f'(3x+5)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right)$

$$f''(3x+5)\cdot\frac{d}{dx}(3x+5) = \frac{2}{3}$$

$$f''(3x+5)\cdot 3 = \frac{2}{3}$$

$$f''(3x+5) = \frac{2}{9}$$

และ $\frac{d}{dx}\left(f''(3x+5)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{9}\right)$

$$f'''(3x+5)\cdot\frac{d}{dx}(3x+5) = 0$$

$$f'''(3x+5)\cdot 3 = 0$$

$$f'''(3x+5) = 0$$

เนื่องจาก $3x+5=2$ เมื่อ $x=-1$

ดังนั้น $f'(2) = f'(3(-1)+5) = \frac{2}{3}(-1) - \frac{1}{3} = -1$

$$f''(2) = f''(3(-1)+5) = \frac{2}{9}$$

และ $f'''(2) = f'''(3(-1)+5) = 0$

22. สมมติว่าพหุนามดีกรีสามที่ต้องการคือ $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

จะได้ $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

และ $P''(x) = 6ax + 2b$

เนื่องจาก $P'(0) = 5$ จะได้ว่า $5 = 3a(0)^2 + 2b(0) + c$ นั่นคือ $c = 5$

เนื่องจาก $P''(1) = 2$ จะได้ว่า $2 = 6a + 2b$ ----- (1)

เนื่องจาก $P''(2) = 9$ จะได้ว่า $9 = 12a + 2b$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $a = \frac{7}{6}$ และ $b = -\frac{5}{2}$

ดังนั้น $P(x) = \frac{7}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 5x + d$

เนื่องจาก $P(-1) = 2$ จะได้ว่า $2 = \frac{7}{6}(-1)^3 - \frac{5}{2}(-1)^2 + 5(-1) + d$

นั่นคือ $d = \frac{32}{3}$

ดังนั้น พหุนามดีกรีสามที่ต้องการ คือ $P(x) = \frac{7}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 5x + \frac{32}{3}$

23. เนื่องจาก $F(x) = g(f(x))$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ $F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

ดังนั้น $F'(g(3)) = g'(f(g(3))) \cdot f'(g(3))$

เนื่องจาก $g(3) = 3,\ g'(3) = 5,\ f(3) = 3,\ f'(3) = -2$

จะได้
$$\begin{aligned} F'(g(3)) &= g'(f(3)) \cdot f'(3) \\ &= g'(3) \cdot (-2) \\ &= 5(-2) \\ &= -10 \end{aligned}$$

24. เนื่องจาก $F(x) = f(g(x))$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ $F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

เนื่องจาก $f(x) = (g(x))^2 - 4x$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ $f'(x) = 2(g(x)) \cdot g'(x) - 4$

ทำให้ได้ว่า $f'(1) = 2(g(1)) \cdot g'(1) - 4 = 2(1)(5) - 4 = 6$

ดังนั้น $F'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1) = f'(1) \cdot 5 = 6 \times 5 = 30$

25. ให้ $u = x\cdot g(x)+g^2(x)$

จะได้ $f(x) = u^{\frac{3}{2}}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{du}\left(u^{\frac{3}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x\cdot g(x)+g^2(x)\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{d}{dx}\left(x\cdot g(x)\right)+\frac{d}{dx}\left(g^2(x)\right)\right) \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x\cdot g(x)+g^2(x)}\left(\frac{d}{dx}\left(x\cdot g(x)\right)+\frac{d}{dx}\left(g^2(x)\right)\right) \end{aligned}$$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x\cdot g(x)\right) &= x\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)+g(x)\frac{d}{dx}(x) \\ &= x\cdot g'(x)+g(x) \end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(g^2(x)\right) &= \left(2g(x)\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(g(x)\right) \\ &= 2g(x)\cdot g'(x) \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x\cdot g(x)+g^2(x)}\left(x\cdot g'(x)+g(x)+2g(x)\cdot g'(x)\right)$$

จะได้
$$\begin{aligned} f'(6) &= \frac{3}{2}\sqrt{6\cdot g(6)+g^2(6)}\left(6\cdot g'(6)+g(6)+2g(6)\cdot g'(6)\right) \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{6\cdot 2+2^2}\left(6\cdot\frac{1}{2}+2+2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\right) \\ &= 42 \end{aligned}$$

26. จาก
$$D(x) = \sqrt{\frac{2x^3+1}{x^6}}$$

จะได้
$$D(1) = \sqrt{\frac{2(1)^3+1}{1^6}} = \sqrt{3}$$

และ
$$D(10) = \sqrt{\frac{2(10)^3+1}{10^6}} = \frac{\sqrt{2,001}}{1,000}$$

ต่อไปหา $D'(x)$ จาก $D(x)=\sqrt{\frac{2x^3+1}{x^6}}=\left(2x^{-3}+x^{-6}\right)^{\frac{1}{2}}$

ให้ $u = 2x^{-3}+x^{-6}$

จะได้ $D'(x) = \frac{d}{du}\left(u^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(2x^{-3}+x^{-6}\right)$

$= \left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right)\left(-6x^{-4}-6x^{-7}\right)$

$= -\frac{3x^{-4}+3x^{-7}}{\sqrt{2x^{-3}+x^{-6}}}$

ดังนั้น $D'(1) = -\frac{3(1)^{-4}+3(1)^{-7}}{\sqrt{2(1)^{-3}+1^{-6}}} = -2\sqrt{3}$

และ $D'(10) = -\frac{3(10)^{-4}+3(10)^{-7}}{\sqrt{2(10)^{-3}+(10)^{-6}}} = -\frac{3,003}{10,000\sqrt{2,001}}$

27. 1) เนื่องจาก ค่าก่อสร้างเริ่มต้นคิดเป็น 10 ล้านบาท

และค่าก่อสร้างต่อชั้นคิดเป็น $7.9+0.04(x-1)$ ล้านบาทต่อชั้น

ดังนั้น ค่าก่อสร้างทั้งหมดเมื่อต้องการสร้างคอนโดมิเนียมจำนวน x ชั้น คือ

$C(x) = 10+\left(7.9+0.04(x-1)\right)x$

$= 0.04x^2+7.86x+10$ ล้านบาท

2) เนื่องจาก

$C(11)-C(10) = \left(0.04(11)^2+7.86(11)+10\right)-\left(0.04(10)^2+7.86(10)+10\right)$

$= 0.04\left(11^2-10^2\right)+7.86(11-10)$

$= 8.7$

ดังนั้น ต้นทุนที่เพิ่มขึ้น เมื่อเพิ่มจำนวนชั้นของคอนโดมิเนียม จาก 10 ชั้นเป็น 11 ชั้น คือ 8.7 ล้านบาท

3) เนื่องจาก $C(x) = 0.04x^2+7.86x+10$

จะได้ $C'(x) = \frac{d}{dx}\left(0.04x^2+7.86x+10\right)$

$= 0.08x+7.86$

ดังนั้น $C'(10) = 0.08(10)+7.86$

$= 8.66$

4) จะเห็นว่าการคำนวณ $0.04\left(11^2-10^2\right)+7.86(11-10)$ มีความยุ่งยากมากกว่าการคำนวณ $0.08(10)+7.86$ แต่ค่าที่ได้จากการคำนวณทั้งสองแบบมีค่าต่างกันเพียง 0.04 ซึ่งคิดเป็น 40,000 บาท จึงพออนุโลมได้ว่าไม่แตกต่างกันมาก

28. 1)

$$\begin{aligned}
R(200+1)-R(200) &= 400\sqrt{1000(201)-201^2}-400\sqrt{1000(200)-200^2} \\
&\approx 299.22 \\
R(400+1)-R(400) &= 400\sqrt{1000(401)-401^2}-400\sqrt{1000(400)-400^2} \\
&\approx 81.22 \\
R(600+1)-R(600) &= 400\sqrt{1000(601)-601^2}-400\sqrt{1000(600)-600^2} \\
&\approx -82.08 \\
R(800+1)-R(800) &= 400\sqrt{1000(801)-801^2}-400\sqrt{1000(800)-800^2} \\
&\approx -300.78
\end{aligned}$$

2) ให้ $u=1000x-x^2$

ดังนั้น $R(x)=400\sqrt{1000x-x^2}=400u^{\frac{1}{2}}$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned}
R'(x) &= \frac{dR}{du}\cdot\frac{du}{dx} \\
&= \frac{d}{du}\left(400u^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(1000x-x^2\right) \\
&= \left(200u^{-\frac{1}{2}}\right)(1000-2x) \\
&= \frac{200(1000-2x)}{\sqrt{1000x-x^2}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
R'(200) &= \frac{200(1000-2(200))}{\sqrt{1000(200)-200^2}} &&= 300 \\
R'(400) &= \frac{200(1000-2(400))}{\sqrt{1000(400)-400^2}} &&\approx 81.65 \\
R'(600) &= \frac{200(1000-2(600))}{\sqrt{1000(600)-600^2}} &&\approx -81.65
\end{aligned}$$

และ

$$R'(800) = \frac{200(1000-2(800))}{\sqrt{1000(800)-800^2}} = -300$$

3) ค่าที่ได้มีความใกล้เคียงกัน

แต่ความซับซ้อนในการคำนวณ $R(x+1)-R(x)$ มีมากกว่าการคำนวณ $R'(x)$ เพราะมีการดำเนินการปรากฏในการคำนวณ $R(x+1)-R(x)$ มากกว่าที่ปรากฏในการคำนวณ $R'(x)$

29. 1) จาก $F(t) = 60-\dfrac{140}{\sqrt{12+t^2}}$

$$F'(t) = -140\cdot\frac{d}{dt}\left(12+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ให้ $u = 12+t^2$

จะได้
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(12+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{d}{du}u^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dt}\left(12+t^2\right)\\ &= -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}(2t)\\ &= -\frac{t}{\left(12+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

นั่นคือ
$$F'(t) = \frac{140t}{\left(12+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}F'(5) &= \frac{140(5)}{\left(12+5^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{700}{37^{\frac{3}{2}}} \approx 3.1103\\ F'(10) &= \frac{140(10)}{\left(12+10^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1,400}{112^{\frac{3}{2}}} \approx 1.1811\\ F'(20) &= \frac{140(20)}{\left(12+20^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2,800}{412^{\frac{3}{2}}} \approx 0.3348\\ F'(40) &= \frac{140(40)}{\left(12+40^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{5,600}{1,612^{\frac{3}{2}}} \approx 0.0865\end{aligned}$$

2) คำตอบที่คำนวณได้ในข้อ 1) มีค่าลดลงเข้าใกล้ 0 เมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น จึงสามารถแปลความหมายได้ว่า เมื่อเวลาผ่านไปนานขึ้นความสามารถในการสแกนสินค้าของพนักงานแทบจะคงที่

30. 1) จาก $f(x) = 5-3x^2+6x^4-x^5$

จะได้ $f'(x) = -6x+24x^3-5x^4$

ดังนั้น $f''(x) = -6+72x^2-20x^3$

และ $f'''(x) = 144x-60x^2$

2) เนื่องจาก $f(x) = \sqrt[3]{x}-\frac{x^2}{6}+\frac{x^{-2}}{6} = x^{\frac{1}{3}}-\frac{x^2}{6}+\frac{x^{-2}}{6}$

จะได้ $f'(x) = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}-\frac{2\cdot x}{6}+\frac{(-2)\cdot x^{-3}}{6} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}-\frac{x}{3}-\frac{1}{3x^3}$

ดังนั้น $f''(x) = \left(-\frac{2}{3}\right)\frac{x^{-\frac{5}{3}}}{3}-\frac{1}{3}-\frac{(-3)\cdot x^{-4}}{3} = -\frac{2}{9x^{\frac{5}{3}}}-\frac{1}{3}+\frac{1}{x^4}$

และ $f'''(x) = \left(-\frac{2}{9}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)x^{-\frac{8}{3}}-4x^{-5} = \frac{10}{27x^{\frac{8}{3}}}-\frac{4}{x^5}$

3) เนื่องจาก $f(x) = \left(\frac{1}{x}-3x\right)\left(2x^3-3x^2\right)$

$= -6x^4+9x^3+2x^2-3x$

จะได้ $f'(x) = -4\left(6x^3\right)+3\left(9x^2\right)+2(2x)-1(3)$

$= -24x^3+27x^2+4x-3$

ดังนั้น $f''(x) = -3\left(24x^2\right)+2(27x)+1(4)$

$= -72x^2+54x+4$

และ $f'''(x) = -2(72x)+1(54)$

$= -144x+54$

4) จาก $f(x) = \frac{x-2}{x-4}$

จะได้ $f'(x) = \frac{(x-4)\frac{d}{dx}(x-2)-(x-2)\frac{d}{dx}(x-4)}{(x-4)^2}$

$= \frac{(x-4)-(x-2)}{(x-4)^2}$

$= -\frac{2}{(x-4)^2}$

ให้ $u = x-4$

จะได้ $f'(x) = -\frac{2}{u^2}$

$= -2u^{-2}$

ดังนั้น $f''(x) = (-2)(-2)u^{-3}\frac{d}{dx}u$

$= 4u^{-3}\frac{d}{dx}(x-4)$

$= 4u^{-3}$

$= 4(x-4)^{-3}$

$= \frac{4}{(x-4)^3}$

จาก $f''(x) = 4u^{-3}$

จะได้ $f'''(x) = 4(-3)u^{-4}\frac{d}{dx}(x-4)$

$= -12u^{-4}$

$= -\frac{12}{(x-4)^4}$

31. จาก $f(x) = \frac{4}{1-2x} = 4(1-2x)^{-1}$

จะได้ $f'(x) = 4(-1)(1-2x)^{-2}(-2) = 4(1)(2)(1-2x)^{-2}$

$f''(x) = 4(1)(2)(-2)(1-2x)^{-3}(-2) = 4(2^2)(1\cdot 2)(1-2x)^{-3}$

$f'''(x) = 4(2^2)(1\cdot 2)(-3)(1-2x)^{-4}(-2) = 4(2^3)(1\cdot 2\cdot 3)(1-2x)^{-4}$

โดยการทำซ้ำเช่นนี้เรื่อยไป จะได้ว่า

$$f^{(n)}(x) = 4(2^n)(n!)(1-2x)^{-n-1} = \frac{2^{n+2}\cdot n!}{(1-2x)^{n+1}}$$

32. 1) จาก $F(x) = x f(x)$

จะได้ $F'(x) = \frac{d}{dx}(x f(x))$

$= x\frac{d}{dx}(f(x)) + f(x)\frac{d}{dx}(x)$

$= x f'(x) + f(x)$

$F''(x) = \frac{d}{dx}(xf'(x) + f(x))$

$= \frac{d}{dx}(xf'(x)) + \frac{d}{dx}(f(x))$

$= x\frac{d}{dx}(f'(x)) + f'(x)\frac{d}{dx}(x) + f'(x)$

$= xf''(x) + f'(x) + f'(x)$

$= xf''(x) + 2f'(x)$

$F'''(x) = \frac{d}{dx}(xf''(x) + 2f'(x))$

$= \frac{d}{dx}(xf''(x)) + 2\frac{d}{dx}(f'(x))$

$= x\frac{d}{dx}(f''(x)) + f''(x)\frac{d}{dx}(x) + 2f''(x)$

$= xf'''(x) + f''(x) + 2f''(x)$

$= xf'''(x) + 3f''(x)$

และ $F^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}(xf'''(x) + 3f''(x))$

$= \frac{d}{dx}(xf'''(x)) + 3\frac{d}{dx}(f''(x))$

$= x\frac{d}{dx}(f'''(x)) + f'''(x)\frac{d}{dx}(x) + 3f'''(x)$

$= xf^{(4)}(x) + f'''(x) + 3f'''(x)$

$= xf^{(4)}(x) + 4f'''(x)$

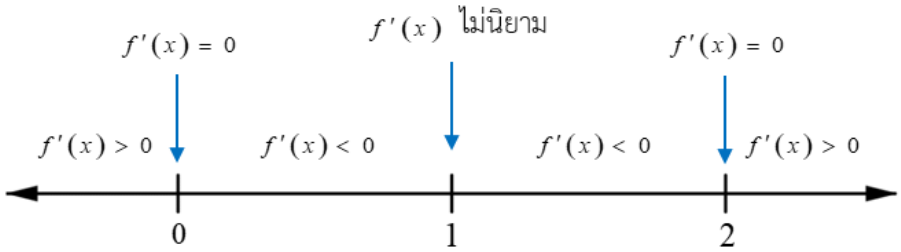
2) $F^{(n)}(x) = x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2

33. เริ่มต้นด้วยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ดังนี้

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+x-1}{x-1}\right) \\
&= \frac{(x-1)\frac{d}{dx}(x^2+x-1)-(x^2+x-1)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2} \\
&= \frac{(x-1)(2x+1-0)-(x^2+x-1)(1-0)}{(x-1)^2} \\
&= \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \\
&= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=0$ หรือ $x=2$

ตรวจสอบค่าของ $f'(x)$ โดยเขียนเส้นจำนวนและจุดแบ่งช่วง ดังนี้



จะได้ว่า $f'(x)>0$ บนช่วง $(-\infty,0)$ และช่วง $(2,\infty)$

และ $f'(x)<0$ บนช่วง $(0,1)$ และช่วง $(1,2)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty,0)$ และช่วง $(2,\infty)$

และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0,1)$ และช่วง $(1,2)$

34. จาก $f(x) = g(x^2-3)$

จะได้ $f'(x) = g'(x^2-3)\cdot\frac{d}{dx}(x^2-3) = g'(x^2-3)\cdot(2x)$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=0$ หรือ $g'(x^2-3)=0$

เนื่องจาก 1 เป็นค่าวิกฤตเพียงค่าเดียวของ g

ดังนั้น $g'(x^2-3)=0$ เมื่อ $x^2-3=1$ นั่นคือ $x=-2$ หรือ $x=2$

จะได้ $f'(x)=0$ เมื่อ $x=0, x=-2$ หรือ $x=2$

สรุปได้ว่า ค่าวิกฤตทั้งหมดของ f คือ $0, -2$ และ 2

35. เนื่องจาก $f(x) = x^3+ax^2-bx+2$

และ $f(1) = -1$

จะได้ $1^3+a(1^2)-b(1)+2 = -1$

นั่นคือ $b = a+4$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3+ax^2-bx+2) \\ &= 3x^2+2ax-b \\ &= 3x^2+2ax-(a+4) \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} f'(1) &= 3(1)^2+2a(1)-(a+4) \\ &= a-1 \end{aligned}$$

เนื่องจาก f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=1$

ดังนั้น $f'(1) = 0$

นั่นคือ $a-1 = 0$

จะได้ $a = 1$

และ
$$\begin{aligned} b &= 1+4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} a+b &= 1+5 \\ &= 6 \end{aligned}$$

36. 1) จาก $f(x) = x^4 - 18x^2$

จะได้ $f'(x) = 4x^3 - 36x = 4x(x-3)(x+3)$

ดังนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = -3, x = 0$ หรือ $x = 3$

จะได้ว่า ค่าวิกฤตของ f มี 3 ค่า คือ $-3, 0$ และ 3

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f

จะได้ $f''(x) = 12x^2 - 36$

เนื่องจาก $f''(-3) = 72$ ซึ่ง $72 > 0$

$f''(0) = -36$ ซึ่ง $-36 < 0$

และ $f''(3) = 72$ ซึ่ง $72 > 0$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$ โดยค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $f(0) = 0$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -3$ และ $x = 3$ โดยค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ

$f(-3) = f(3) = -81$

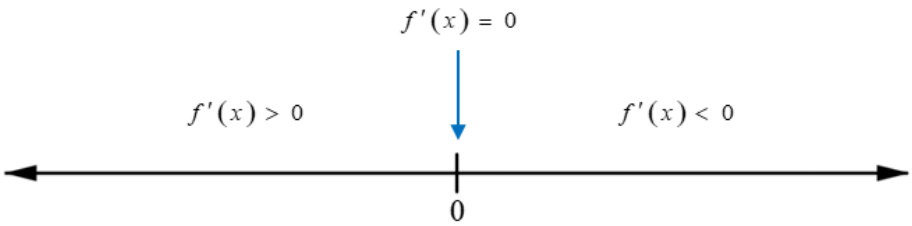
2) จาก $f(x) = 27 - 2x^4$

จะได้ $f'(x) = -8x^3$

ดังนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 0$

จะได้ว่า ค่าวิกฤตของ f มี 1 ค่า คือ 0

พิจารณาค่าของ $f'(x)$ เมื่อ x เป็นค่าวิกฤตและจำนวนจริงในช่วงต่าง ๆ โดยใช้เส้นจำนวน ดังนี้



จะเห็นว่า $f'(x)$ ที่ $x = 0$ เป็นจุดแบ่งที่ทำให้ $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนจริงบวกเป็นจำนวนจริงลบ

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$ โดยค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $f(0) = 27$

37. 1) จาก $f(x) = 5-2x-x^2$

จะได้ $f'(x) = -2-2x = -2(1+x)$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=-1$

จะได้ว่า ค่าวิกฤตของ f ในช่วงเปิด $(-2, 3)$ มี 1 ค่า คือ -1

ต่อไปหา $f(-2)$, $f(-1)$ และ $f(3)$

จะได้ $f(-2) = 5-2(-2)-(-2)^2 = 5$

$f(-1) = 5-2(-1)-(-1)^2 = 6$

$f(3) = 5-2(3)-(3)^2 = -10$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=-1$ โดยค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $f(-1)=6$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x=3$ โดยค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ คือ $f(3)=-10$

2) จาก $f(x) = x^3-6x^2-15x+7$

จะได้ $f'(x) = 3x^2-12x-15 = 3(x+1)(x-5)$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=-1$ หรือ $x=5$ เนื่องจาก $1 \notin (0, 6)$

จะได้ว่า ค่าวิกฤตของ f ในช่วงเปิด $(0, 6)$ มี 1 ค่า คือ 5

ต่อไปหา $f(0)$, $f(5)$ และ $f(6)$

จะได้ $f(0) = 0^3-6(0)^2-15(0)+7 = 7$

$f(5) = 5^3-6(5)^2-15(5)+7 = -93$

$f(6) = 6^3-6(6)^2-15(6)+7 = -83$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=0$ โดยค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $f(0)=7$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x=5$ โดยค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ คือ $f(5)=-93$

3) จาก $f(x) = 3x^4+6x^3-24x^2+18x-7$

จะได้ $f'(x) = 12x^3+18x^2-48x+18 = 6(x-1)(2x-1)(x+3)$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=1, x=\frac{1}{2}$ หรือ $x=-3$ เนื่องจาก $-3 \notin (-3,2)$

จะได้ว่า ค่าวิกฤตของ f ในช่วงเปิด $(-3,2)$ มี 2 ค่า คือ 1 และ $\frac{1}{2}$

ต่อไปหา $f(-3)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$ และ $f(2)$

จะได้ $f(-3) = 3(-3)^4 + 6(-3)^3 - 24(-3)^2 + 18(-3) - 7 = -196$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 24\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 18\left(\frac{1}{2}\right) - 7 = -3.0625$

$f(1) = 3(1)^4 + 6(1)^3 - 24(1)^2 + 18(1) - 7 = -4$

$f(2) = 3(2)^4 + 6(2)^3 - 24(2)^2 + 18(2) - 7 = 29$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 2$ โดยค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $f(2) = 29$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = -3$ โดยค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ คือ $f(-3) = -196$

4) จาก $f(x) = 6x^5 + 15x^4 - 130x^3 - 210x^2 + 720x + 976$

จะได้ $f'(x) = 30x^4 + 60x^3 - 390x^2 - 420x + 720$

$= 30(x+4)(x+2)(x-1)(x-3)$

ดังนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = -4, x = -2, x = 1$ หรือ $x = 3$

เนื่องจาก $-2, 4 \notin (-2, 4)$

จะได้ว่า ค่าวิกฤตของ f ในช่วงเปิด $(-2, 4)$ มี 2 ค่า คือ 1 และ 3

ต่อไปหา $f(-2), f(1), f(3)$ และ $f(4)$

จะได้ $f(-2) = 30(-2)^4 + 60(-2)^3 - 390(-2)^2 - 420(-2) + 720 = -216$

$f(1) = 30(1)^4 + 60(1)^3 - 390(1)^2 - 420(1) + 720 = 1,377$

$f(3) = 30(3)^4 + 60(3)^3 - 390(3)^2 - 420(3) + 720 = 409$

$f(4) = 30(4)^4 + 60(4)^3 - 390(4)^2 - 420(4) + 720 = 2,160$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 4$ โดยค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $f(4) = 2,160$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = -2$ โดยค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ คือ $f(-2) = -216$

38. 1) จุดบนเส้นโค้ง $y = x^2$ จะอยู่ในรูป (x, x^2)

ให้ $d(x)$ แทนระยะทางระหว่างจุด $(3,0)$ กับจุด (x, x^2)

จะได้ $d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2 - 0)^2}$ $\sqrt{(x-3)^2 + x^4}$

ให้ $u = (x-3)^2 + x^4$

จะได้ $d(x) = u^{\frac{1}{2}}$

ดังนั้น $d'(x) = \frac{d}{du}\left(u^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left((x-3)^2+x^4\right)$

$= \left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^4+x^2-6x+9\right)$

$= \left(\frac{1}{2\sqrt{(x-3)^2+x^4}}\right)\left(4x^3+2x-6+0\right)$

$= \frac{2x^3+x-3}{\sqrt{(x-3)^2+x^4}}$

$= \frac{(x-1)\left(2x^2+2x+3\right)}{\sqrt{(x-3)^2+x^4}}$

ถ้า $d'(x)=0$ แล้วจะได้ $\frac{(x-1)\left(2x^2+2x+3\right)}{\sqrt{(x-3)^2+x^4}}=0$

เนื่องจาก $2x^2+2x+3=(x+1)^2+x^2+2>0$ และ $\sqrt{(x-3)^2+x^4}>0$

ดังนั้น $x-1=0$ นั่นคือ $x=1$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงเปิด $(-\infty,\infty)$ มี 1 ค่า คือ 1

เนื่องจาก $d'(x)<0$ เมื่อ $x<1$ และ $d'(x)>0$ เมื่อ $x>1$

ดังนั้น d มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=1$ เพียงค่าเดียวในช่วงเปิด $(-\infty,\infty)$

นั่นคือ d มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x=1$ โดยค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ คือ $d(1)=\sqrt{5}$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด $(3,0)$ กับเส้นโค้ง $y=x^2$ คือ $\sqrt{5}$ หน่วย

2) จุดบนเส้นโค้ง $y=x^2$ เมื่อ $-3\le x\le 3$ จะอยู่ในรูป (x,x^2)

ให้ $d(x)$ แทนระยะทางระหว่างจุด $(0,3)$ กับจุด (x,x^2) เมื่อ $-3\le x\le 3$

จะได้ $d(x) = \sqrt{(x-0)^2+\left(x^2-3\right)^2}$

$= \sqrt{x^2+\left(x^2-3\right)^2}$ เมื่อ $-3\le x\le 3$

ให้ $u = x^2+\left(x^2-3\right)^2$

จะได้ $d(x) = u^{\frac{1}{2}}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} d'(x) &= \frac{d}{du}\left(u^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2+\left(x^2-3\right)^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^4-5x^2+9\right) \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+\left(x^2-3\right)^2}}\right)\left(4x^3-10x+0\right) \\ &= \frac{2x^3-5x}{\sqrt{x^2+\left(x^2-3\right)^2}} \\ &= \frac{x\left(2x^2-5\right)}{\sqrt{x^2+\left(x^2-3\right)^2}} \qquad \text{เมื่อ } -3\le x\le 3 \end{aligned}$$

ถ้า $d'(x)=0$ แล้วจะได้ $\dfrac{x\left(2x^2-5\right)}{\sqrt{x^2+\left(x^2-3\right)^2}}=0$

เนื่องจาก $\sqrt{x^2+\left(x^2-3\right)^2}>0$

ดังนั้น $x\left(2x^2-5\right)=0$

นั่นคือ $x=0$, $x=-\sqrt{2.5}$ หรือ $x=\sqrt{2.5}$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงเปิด $(-3,3)$ มี 3 ค่า คือ $-\sqrt{2.5}$, 0 และ $\sqrt{2.5}$

ต่อไปคำนวณหา $d(-3)$, $d\left(-\sqrt{2.5}\right)$, $d(0)$, $d\left(\sqrt{2.5}\right)$ และ $d(3)$

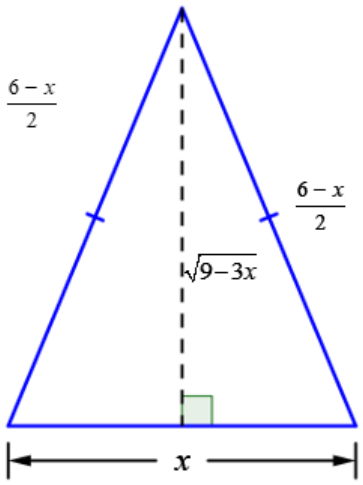
จะได้
$$\begin{aligned} d(-3) &= 3\sqrt{5} \\ d\left(-\sqrt{2.5}\right) &= \frac{\sqrt{11}}{2} \\ d(0) &= 3 \\ d\left(\sqrt{2.5}\right) &= \frac{\sqrt{11}}{2} \\ d(3) &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า d มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x=-\sqrt{2.5}$ และ $x=\sqrt{2.5}$ โดยค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

คือ $d\left(-\sqrt{2.5}\right)=d\left(\sqrt{2.5}\right)=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด $(0,3)$ กับเส้นโค้ง $y=x^2$ เมื่อ $-3\le x\le 3$ คือ $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ หน่วย

39. ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีความยาวเส้นรอบรูป 6 เซนติเมตร และมีความยาวฐาน x เซนติเมตร



จากรูป สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีความยาวเส้นรอบรูป 6 เซนติเมตร และมีความยาวฐาน x เซนติเมตร จะสูง $\sqrt{\left(\dfrac{6-x}{2}\right)^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{9-3x}$ เซนติเมตร

เนื่องจาก $9-3x>0$ จะได้ว่า $x<3$

ดังนั้น $A(x) = \dfrac{1}{2}x\sqrt{9-3x} = \dfrac{1}{2}\sqrt{9x^2-3x^3}$ เมื่อ $0<x<3$

ให้ $u = 9x^2-3x^3$

จะได้ $A(x) = \dfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}$

ดังนั้น $A'(x) = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(9x^2-3x^3\right)$

$= \left(\frac{1}{4}u^{-\frac{1}{2}}\right)\left(18x-9x^2\right)$

$= \frac{18x-9x^2}{4\sqrt{9x^2-3x^3}}$

$= \frac{9(2-x)}{4\sqrt{9-3x}}$ เมื่อ $0<x<3$

เนื่องจาก $\sqrt{9-3x}>0$ เมื่อ $0<x<3$

ดังนั้น $A'(x)=0$ เมื่อ $x=0$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงเปิด $(0, 3)$ มี 1 ค่า คือ 2

เนื่องจาก $A'(x)>0$ เมื่อ $x<2$ และ $A'(x)<0$ เมื่อ $x>2$

ดังนั้น A มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=2$ เพียงค่าเดียวในช่วงเปิด $(0, 3)$

นั่นคือ A มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=2$ โดยค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $A(2)=\sqrt{3}$

ดังนั้น ความยาวฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วนี้ที่ทำให้รูปสามเหลี่ยมมีพื้นที่มากที่สุด คือ 2 เซนติเมตร

40. ให้ r แทนรัศมีของฐานของทรงกระบอก

h แทนความสูงของทรงกระบอก

และ C แทนค่าวัสดุที่ใช้ในการทำบรรจุภัณฑ์ทรงกระบอก ที่มีรัศมีของฐานของยาว r เซนติเมตร และมีความสูง h เซนติเมตร

เนื่องจากทรงกระบอกมีความจุ 20π ลูกบาศก์เซนติมเมตร

ดังนั้น $\pi r^2 h = 20\pi$

จะได้ $h = \frac{20}{r^2}$ เมื่อ $r\in(0,\infty)$

เนื่องจาก $C = 2(100)\pi r^2 + 80(2\pi rh)$

$= 2(100)\pi r^2 + 80\left(2\pi r\left(\frac{20}{r^2}\right)\right)$

นั่นคือ $C(r) = 200\pi r^2 + \frac{3,200\pi}{r}$ เมื่อ $r\in(0,\infty)$

ดังนั้น $C'(r) = 400\pi r - \dfrac{3,200\pi}{r^2}$

$= \dfrac{400\pi\left(r^3-8\right)}{r^2}$

ถ้า $C'(r)=0$ แล้วจะได้ $r=2$

เนื่องจาก $C'(r)<0$ เมื่อ $r<2$ และ $C'(r)>0$ เมื่อ $r>2$

ดังนั้น C มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $r=2$ เพียงค่าเดียวในช่วงเปิด $(0,\infty)$

นั่นคือ C มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $r=2$

โดยค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ คือ $C(2)=200\pi\left(2^2\right)+\dfrac{3,200\pi}{2}\approx 7,539.82$

ดังนั้น โรงงานต้องออกแบบบรรจุภัณฑ์ให้มีความยาวรัศมีของฐานเป็น 2 เซนติเมตร และมีความสูง $\dfrac{20}{2^2}=5$ เซนติเมตร โดยจะใช้ต้นทุนน้อยที่สุดประมาณ $7,539.82$ บาท ในการผลิตบรรจุภัณฑ์ 1 ชิ้น

41. ให้ r แทนรัศมีของฐานของกรวย

และ l แทนส่วนสูงเอียงของกรวย

เนื่องจากกรวยมีพื้นที่ผิวข้างเป็น 30π ตารางหน่วย

ดังนั้น $\pi r l = 30\pi$

นั่นคือ $l = \dfrac{30}{r}$ เมื่อ $r>0$

โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า กรวยมีความสูง $\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{\left(\dfrac{30}{r}\right)^2-r^2}$ หน่วย

ต่อไปหาช่วงที่เป็นไปได้ของ r

เนื่องจาก $\left(\dfrac{30}{r}\right)^2-r^2>0$ และ $r>0$

จะได้

$$\begin{aligned} r^4-30^2 &< 0 \\ \left(r^2-30\right)\left(r^2+30\right) &< 0 \\ \left(r-\sqrt{30}\right)\left(r+\sqrt{30}\right)\left(r^2+30\right) &< 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ $r\in\left(-\sqrt{30},\sqrt{30}\right)$

แต่เนื่องจาก $r>0$ ดังนั้น $r\in\left(0,\sqrt{30}\right)$

ให้ $V(r)$ แทนปริมาตรของกรวยที่มีพื้นที่ผิวข้างเป็น 30π ตารางหน่วย และรัศมีฐานยาว r หน่วย

จะได้ $$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{\left(\frac{30}{r}\right)^2 - r^2}$$

นั่นคือ $$V(r) = \frac{1}{3}\pi\sqrt{900r^2 - r^6} \qquad \text{เมื่อ } r \in \left(0, \sqrt{30}\right)$$

ให้ $$u = 900r^2 - r^6$$

จะได้ $$V(r) = \frac{1}{3}\pi u^{\frac{1}{2}}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} V'(r) &= \frac{d}{du}\left(\frac{1}{3}\pi u^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(900r^2 - r^6\right) \\ &= \left(\frac{1}{6}\pi u^{-\frac{1}{2}}\right)\left(1{,}800r - 6r^5\right) \\ &= \frac{\pi\left(300 - r^4\right)}{\sqrt{900 - r^4}} \qquad \text{เมื่อ } r \in \left(0, \sqrt{30}\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น $V'(r) = 0$ เมื่อ $r = -300^{\frac{1}{4}}$ หรือ $r = 300^{\frac{1}{4}}$

เนื่องจาก $-300^{\frac{1}{4}} \notin \left(0, \sqrt{30}\right)$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงเปิด $\left(0, \sqrt{30}\right)$ มี 1 ค่า คือ $300^{\frac{1}{4}}$

เนื่องจาก $V'(r) > 0$ เมื่อ $r < 300^{\frac{1}{4}}$ และ $V'(r) < 0$ เมื่อ $r > 300^{\frac{1}{4}}$

ดังนั้น V มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $r = 300^{\frac{1}{4}}$ เพียงค่าเดียวในช่วงเปิด $\left(0, \sqrt{30}\right)$

นั่นคือ V มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $r = 300^{\frac{1}{4}}$ โดยค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ

$$\begin{aligned} V\left(300^{\frac{1}{4}}\right) &= \frac{1}{3}\pi\sqrt{900\left(300^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \left(300^{\frac{1}{4}}\right)^6} \\ &= \frac{1}{3}\pi\left(300^{\frac{1}{4}}\right)\sqrt{900 - 300} \\ &= \frac{20\sqrt{15}}{3^{\frac{3}{4}}}\pi \end{aligned}$$

ดังนั้น รัศมีของฐานของกรวยควรจะยาว $300^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{4}}\sqrt{10}$ หน่วย และจะได้ส่วนสูงเอียง คือ

$\dfrac{30}{3^{\frac{1}{4}}\sqrt{10}} = 3^{\frac{3}{4}}\sqrt{10}$ หน่วย

ดังนั้น ส่วนสูงเอียงและรัศมีของฐานของกรวยที่ทำให้กรวยมีปริมาตรมากที่สุด คือ $3^{\frac{1}{4}}\sqrt{10}$ หน่วย

และ $3^{\frac{3}{4}}\sqrt{10}$ หน่วย ตามลำดับ

42. ให้ r แทนรัศมีของฐานของทรงกระบอก

และ h แทนความสูงของทรงกระบอก

เนื่องจากพื้นที่ผิวของทรงกระบอกคือ 80π ตารางหน่วย

ดังนั้น $2\pi r^2 + 2\pi rh = 80\pi$

นั่นคือ $h = \dfrac{40}{r} - r$ เมื่อ $r > 0$

ต่อไปหาช่วงที่เป็นไปได้ของ r

เนื่องจาก $\dfrac{40}{r} - r > 0$ และ $r > 0$ จะได้ $r^2 - 40 < 0$

นั่นคือ $\left(r + 2\sqrt{10}\right)\left(r - 2\sqrt{10}\right) < 0$

ดังนั้น $r \in \left(0,\ 2\sqrt{10}\right)$

ให้ $V(r)$ แทนปริมาตรของทรงกระบอกที่มีพื้นที่ผิวเป็น 80π ตารางหน่วย และรัศมีฐาน ยาว r หน่วย

จะได้ $V(r) = \pi r^2 h$

$= \pi r^2\left(\dfrac{40}{r} - r\right)$

นั่นคือ $V(r) = 40\pi r - \pi r^3$ เมื่อ $r \in \left(0,\ 2\sqrt{10}\right)$

ดังนั้น $V'(r) = \dfrac{d}{dr}\left(40\pi r - \pi r^3\right)$

$= 40\pi - 3\pi r^2$ เมื่อ $r \in \left(0,\ 2\sqrt{10}\right)$

ดังนั้น $V'(r) = 0$ เมื่อ $r = -\sqrt{\dfrac{40}{3}}$ หรือ $r = \sqrt{\dfrac{40}{3}}$

เนื่องจาก $-\sqrt{\dfrac{40}{3}} \notin \left(0,\ 2\sqrt{10}\right)$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงเปิด $\left(0, 2\sqrt{10}\right)$ มี 1 ค่า คือ $\sqrt{\frac{40}{3}}$

เนื่องจาก $V'(r)>0$ เมื่อ $r<\sqrt{\frac{40}{3}}$ และ $V'(r)<0$ เมื่อ $r>\sqrt{\frac{40}{3}}$

ดังนั้น V มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $r=\sqrt{\frac{40}{3}}$ เพียงค่าเดียวในช่วงเปิด $\left(0, 2\sqrt{10}\right)$

นั่นคือ V มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $r=\sqrt{\frac{40}{3}}$ โดยค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $V\left(\sqrt{\frac{40}{3}}\right)=\frac{160\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}\pi$

ดังนั้น รัศมีของฐานของทรงกระบอกควรยาว $\sqrt{\frac{40}{3}}=\frac{2\sqrt{30}}{3}$ หน่วย และจะได้ว่า ความสูงของทรงกระบอก คือ $\frac{40}{\sqrt{\frac{40}{3}}}-\sqrt{\frac{40}{3}}=\frac{4\sqrt{30}}{3}$ หน่วย

ดังนั้น ความสูงและรัศมีของกระป๋องนี้ที่ทำให้กระป๋องมีปริมาตรมากที่สุด คือ $\frac{4\sqrt{30}}{3}$ หน่วย และ $\frac{2\sqrt{30}}{3}$ หน่วย ตามลำดับ

43. 1) จาก $h(t) = 10t^2-\frac{t^3}{2}$ เมื่อ $0\le t<10$

จะได้ $h'(t) = \frac{d}{dt}\left(10t^2-\frac{t^3}{2}\right)$

$= 20t-\frac{3t^2}{2}$ เมื่อ $0<t<10$

จาก $h(t) = 625-5(t-15)^2$ เมื่อ $10\le t\le 15+5\sqrt{5}$

จะได้ $h'(t) = \frac{d}{dt}\left(625-5(t-15)^2\right)$

$= \frac{d}{dt}\left(-5t^2+150t-500\right)$

$= -10t+150$ เมื่อ $10<t<15+5\sqrt{5}$

ต่อไปจะหา $h'(10)$

โดยจะพิจารณาว่า $\lim\limits_{k\to 0^-}\frac{h(10+k)-h(10)}{k}=\lim\limits_{k\to 0^+}\frac{h(10+k)-h(10)}{k}$

พิจารณา $\lim\limits_{k\to 0^-}\frac{h(10+k)-h(10)}{k}$

จาก $h(t) = \begin{cases} 10t^2 - \dfrac{t^3}{2} & , 0 \le t < 10 \\ 625 - 5(t-15)^2 & , 10 \le t \le 15 + 5\sqrt{5} \end{cases}$

จะได้ $$\lim_{k\to 0^-} \frac{h(10+k)-h(10)}{k} = \lim_{k\to 0^-} \frac{\left(10(10+k)^2 - \dfrac{(10+k)^3}{2}\right) - \left(625 - 5(10-15)^2\right)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0^-} \frac{\left(10(10+k)^2 - \dfrac{(10+k)^3}{2}\right) - 500}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0^-} \frac{(10+k)^2\left(10 - \dfrac{10+k}{2}\right) - 500}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0^-} \frac{(10+k)^2\left(\dfrac{10-k}{2}\right) - 500}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0^-} \frac{100k - 10k^2 - k^3}{2k}$$

$$= \lim_{k\to 0^-} \frac{100 - 10k - k^2}{2}$$

$$= 50$$

พิจารณา $\lim\limits_{k\to 0^+} \dfrac{h(10+k)-h(10)}{k}$

จะได้ $$\lim_{k\to 0^+} \frac{h(10+k)-h(10)}{k} = \lim_{k\to 0^-} \frac{\left(625 - 5\left((10+k)-15\right)^2\right) - \left(625 - 5(10-15)^2\right)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0^-} \frac{\left(625 - 5\left((10+k)-15\right)^2\right) - 500}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0^-} \frac{50k - 5k^2}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0^-} (50 - 5k)$$

$$= 50$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{k\to 0^-} \dfrac{h(10+k)-h(10)}{k} = \lim\limits_{k\to 0^+} \dfrac{h(10+k)-h(10)}{k} = 50$

ดังนั้น $\lim\limits_{k\to 0} \dfrac{h(10+k)-h(10)}{k} = 50$

นั่นคือ $h'(10)=50$

สรุปได้ว่า $h'(t)=\begin{cases} 20t-\dfrac{3t^2}{2} & ,0<t<10 \\ 50 & ,t=10 \\ -10t+150 & ,10<t<15+5\sqrt{5} \end{cases}$

2) เนื่องจาก $h'(t)=20t-\dfrac{3t^2}{2}=t\left(20-\dfrac{3t}{2}\right)$ เมื่อ $0<t<10$

และ $t\left(20-\dfrac{3t}{2}\right)=0$ เมื่อ $t=0$ หรือ $t=\dfrac{40}{3}$

ดังนั้น $h'(t)\neq 0$ เมื่อ $0<t<10$

นั่นคือ h ไม่มีค่าวิกฤตบนช่วงเปิด $(0,10)$

เนื่องจาก $h'(10)=50\neq 0$

ดังนั้น 10 ไม่เป็นค่าวิกฤตของ h

เนื่องจาก $h'(t)=-10t+150$ เมื่อ $10<t<15+5\sqrt{5}$

และ $-10t+150=0$ เมื่อ $t=15$

ดังนั้น 15 เป็นค่าวิกฤตของ h

สรุปได้ว่า จุดวิกฤตทั้งหมดของ h บน $\left(0,15+5\sqrt{5}\right)$ คือ $t=15$

คำนวณหา $h(0), h(15)$ และ $h\left(15+5\sqrt{5}\right)$

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(15) &= 625 \\ h\left(15+5\sqrt{5}\right) &= 0 \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า h มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $t=15$ โดยค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $h(15)=625$

ดังนั้น บั้งไฟเคลื่อนที่ได้สูงที่สุด 625 เมตร ณ เวลา 15 วินาที

44. จากโจทย์จะได้ว่า เงื่อนไขของงบประมาณเขียนแทนได้ด้วยสมการ

$$100x+100y = 100{,}000 \quad \text{เมื่อ} \quad 0\le x\le 1{,}000$$

นั่นคือ $y = 1{,}000-x$

ภายใต้เงื่อนไขนี้จะได้ว่า $P = 10x^{\frac{1}{4}}(1{,}000-x)^{\frac{3}{4}}$

ให้ $f(x) = 10x^{\frac{1}{4}}(1,000-x)^{\frac{3}{4}}$

ต้องการหาค่าสูงสุดของ f บนช่วงปิด $[0,1000]$

หาจุดวิกฤตโดยพิจารณา

$$f'(x) = 10x^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{3}{4}(1,000-x)^{-\frac{1}{4}}(-1)+(1,000-x)^{\frac{3}{4}}\cdot 10\left(\frac{1}{4}\right)x^{-\frac{3}{4}}$$

$$= -\frac{15x^{\frac{1}{4}}}{2(1,000-x)^{\frac{1}{4}}}+\frac{5(1,000-x)^{\frac{3}{4}}}{2x^{\frac{3}{4}}}$$

ให้ $f'(x) = 0$

จะได้ $\dfrac{5(1,000-x)^{\frac{3}{4}}}{2x^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{15x^{\frac{1}{4}}}{2(1,000-x)^{\frac{1}{4}}}$

$$1,000-x = 3x$$

$$x = 250$$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงเปิด $(0,1000)$ คือ 250

ต่อไปคำนวณหา $f(0)$, $f(250)$ และ $f(1,000)$

จะได้ $f(0) = 0$

$$f(250) = 2,500\cdot 3^{\frac{3}{4}} \approx 5,698.77$$

$$f(1,000) = 0$$

ดังนั้น ถ้า $x=250$ จะให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วง $[0,1000]$

นั่นคือ จำนวนเสื้อที่มากที่สุดที่โรงงานนี้จะผลิตได้ใน 1 ชั่วโมงภายใต้งบประมาณ 100,000 บาท คือ 5,698 ตัว

45. 1) $\int\left(5x^4-4x^3+6x^2-2x+7\right)dx = 5\left(\frac{x^5}{5}\right)-4\left(\frac{x^4}{4}\right)+6\left(\frac{x^3}{3}\right)-2\left(\frac{x^2}{2}\right)+7x+c$

$= x^5-x^4+2x^3-x^2+7x+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

2) $\int\left(3x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{3}{4}}-x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx = \int\left(3x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{3}{4}}-x^2+x^{-2}\right)dx$

$= 3\left(\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}\right)-4\left(\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}\right)-\frac{x^3}{3}+\frac{x^{-1}}{-1}+c$

$= \frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{16}{7}x^{\frac{7}{4}}-\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

3) $\int\left(3x^2+\sqrt{x}+1\right)dx = 3\int x^2\,dx+\int x^{\frac{1}{2}}\,dx+\int 1\,dx$

$= 3\left(\frac{x^3}{3}\right)+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+x+c$

$= x^3+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+x+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

4) $\int(2x)\left(x^2+1\right)^2dx = \int\left(2x^5+4x^3+2x\right)dx$

$= 2\int x^5dx+4\int x^3dx+2\int x\,dx$

$= 2\left(\frac{x^6}{6}\right)+4\left(\frac{x^4}{4}\right)+2\left(\frac{x^2}{2}\right)+c$

$= \frac{x^6}{3}+x^4+x^2+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

5) $\int\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int x\,dx-\int x^{-\frac{1}{2}}dx$

$= \frac{x^2}{2}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$

$= \frac{x^2}{2}-2\sqrt{x}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

6) $\int \sqrt{x}\left(x^3+x^2+x+1\right)dx = \int\left(x^{\frac{7}{2}}+x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)dx$

$= \int x^{\frac{7}{2}}dx+\int x^{\frac{5}{2}}dx+\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx$

$= \dfrac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}+\dfrac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}+\dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$

$= \dfrac{2x^{\frac{9}{2}}}{9}+\dfrac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}+\dfrac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

7) $\int \dfrac{x^2+x^3}{x^5}dx = \int\left(x^{-3}+x^{-2}\right)dx$

$= \int x^{-3}dx+\int x^{-2}dx$

$= \dfrac{x^{-2}}{-2}+\dfrac{x^{-1}}{-1}+c$

$= -\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

8) $\int\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)dx = \int\left(x^6+1\right)dx$

$= \int x^6dx+\int 1dx$

$= \dfrac{x^7}{7}+x+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

46. จาก $f''(x) = 6x-2$

จะได้ $f'(x) = \int f''(x)dx$

$= \int(6x-2)dx$

$= 6\left(\dfrac{x^2}{2}\right)-2x+c_1$

$= 3x^2-2x+c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เมื่อ $x=1$

จะได้ $f'(1) = 0$

$3(1)^2-2(1)+c_1 = 0$

นั่นคือ $c_1 = -1$

ดังนั้น $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

และได้ว่า $f(x) = \int (3x^2 - 2x - 1)dx$

$= 3\left(\frac{x^3}{3}\right) - 2\left(\frac{x^2}{2}\right) - x + c$

$= x^3 - x^2 - x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ -1 เมื่อ $x = 1$

จะได้ $f(1) = -1$

$(1)^3 - (1)^2 - (1) + c = -1$

นั่นคือ $c = 0$

ดังนั้น $f(x) = x^3 - x^2 - x$

47. 1) เนื่องจาก $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 9x^2 - 5$

จะได้ $y = \int (4x^3 + 9x^2 - 5)dx$

ดังนั้น สมการเส้นโค้ง คือ $y = x^4 + 3x^3 - 5x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก เส้นโค้งนี้ผ่านจุด $(0, 5)$ นั่นคือ $x = 0$ และ $y = 5$ สอดคล้องกับสมการเส้นโค้ง

แทน x และ y ในสมการเส้นโค้งด้วย 0 และ 5 ตามลำดับ

จะได้ $5 = 0^4 + 3(0)^3 - 5(0) + c$ หรือ $c = 5$

ดังนั้น สมการเส้นโค้งที่ต้องการคือ $y = x^4 + 3x^3 - 5x + 5$

2) เนื่องจาก $\frac{dy}{dx} = 5 - 3\sqrt{x} - x^3$

จะได้ $y = \int (5 - 3\sqrt{x} - x^3)dx$

ดังนั้น สมการเส้นโค้ง คือ $y = 5x - 2x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

และเส้นโค้งนี้ผ่านจุด $(4, -2)$ นั่นคือ $x = 4$ และ $y = -2$ สอดคล้องกับสมการเส้นโค้ง

แทน x และ y ในสมการเส้นโค้งด้วย 4 และ -2 ตามลำดับ

จะได้ $-2=5(4)-2(4)^{\frac{3}{2}}-\frac{(4)^4}{4}+c$ หรือ $c=58$

ดังนั้น สมการเส้นโค้งที่ต้องการคือ $y=5x-2x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^4}{4}+58$

48. 1) เนื่องจาก $v(t) = 5t^2-2t-8$

จะได้ $a(t)=v'(t) = 10t-2$

ดังนั้น $a(t) = 10t-2$

เนื่องจาก $s(t) = \int v(t)dt$

จะได้ $s(t) = \int(5t^2-2t-8)dt$

$= \frac{5t^3}{3}-t^2-8t+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $s(3) = 6$

จะได้ $6 = \frac{5(3)^3}{3}-(3)^2-8(3)+c$

$c = -6$

ดังนั้น $s(t) = \frac{5t^3}{3}-t^2-8t-6$

2) เนื่องจาก $v(t) = 5t-6t^2-4t^3$

จะได้ $a(t)=v'(t) = 5-12t-12t^2$

ดังนั้น $a(t) = 5-12t-12t^2$

เนื่องจาก $s(t) = \int v(t)dt$

จะได้ $s(t) = \int(5t-6t^2-4t^3)dt$

$= \frac{5t^2}{2}-2t^3-t^4+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $s(3) = -4$

จะได้ $-4 = \frac{5(3)^2}{2}-2(3)^3-(3)^4+c$

$c = \frac{217}{2}$

ดังนั้น $s(t) = \frac{217}{2}+\frac{5t^2}{2}-2t^3-t^4$

49. $\int\left(\frac{x^2+3x+2xf(x)+6f(x)}{x+3}\right)dx = \int\frac{(x+2f(x))(x+3)}{x+3}dx$

$= \int(x+2f(x))dx$

$= \int x\,dx+2\int f(x)dx$

$= \frac{x^2}{2}+2F(x)+c$ เมื่อ $x\neq -3$ และ c เป็นค่าคงตัว

50. จาก $\frac{dN}{dt} = 6\sqrt{t} = 6t^{\frac{1}{2}}$

จะได้ $N(t) = \int 6t^{\frac{1}{2}}dt$

$= 6\left(\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)+c$

$= 4t^{\frac{3}{2}}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $N(0) = 100$

ดังนั้น $4(0)^{\frac{3}{2}}+c = 100$

นั่นคือ $c = 100$

จะได้ $N(t) = 4t^{\frac{3}{2}}+100$

ดังนั้น $N(10) = 4(10)^{\frac{3}{2}}+100$

$= 40\sqrt{10}+100$

≈ 226.4911

ดังนั้น จะมีต้นไม้ถูกเผาประมาณ 226 ต้นเมื่อเวลาผ่านไป 10 ชั่วโมง

51. จาก $H'(x) = 25-2x$

จะได้ $H(x) = \int(25-2x)dx$

$= 25x-x^2+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $H(0)$ คือจำนวนชั่วโมงที่ต้องใช้ในการผลิตสินค้า 0 ชิ้น

ดังนั้น $H(0) = 0$

$25(0)-0^2+c = 0$

นั่นคือ $c = 0$

จะได้ $H(x) = 25x - x^2$

ดังนั้น $H(6) = 25(6) - 6^2 = 114$

และ $H(12) = 25(12) - 12^2 = 156$

ดังนั้น จำนวนชั่วโมงที่ต้องใช้ในการผลิตสินค้า 6 และ 12 ชิ้นแรก คือ 114 และ 156 ชั่วโมง ตามลำดับ

จะเห็นว่า จำนวนชั่วโมงที่ต้องใช้ในการผลิตสินค้า 6 ชิ้นแรก คือ 114 ชั่วโมง

ดังนั้น จำนวนชั่วโมงเฉลี่ยที่ต้องใช้ในการผลิตสินค้า 1 ชิ้น คือ $\frac{114}{6} = 19$ ชั่วโมง

และเนื่องจากจำนวนชั่วโมงที่ต้องใช้ในการผลิตสินค้า 12 ชิ้นแรก คือ 156 ชั่วโมง

ดังนั้น จำนวนชั่วโมงเฉลี่ยที่ต้องใช้ในการผลิตสินค้า 1 ชิ้น คือ $\frac{156}{12} = 13$ ชั่วโมง

สรุปได้ว่า เมื่อผลิตสินค้ามากขึ้น จำนวนชั่วโมงเฉลี่ยที่ต้องใช้ในการผลิตสินค้า 1 ชิ้นจะลดลง

52. จาก $v'(t) = a$

จะได้ $v(t) = \int a\,dt$

$= at + c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $v(0) = 0$

ดังนั้น $a(0) + c_1 = 0$

จะได้ $c_1 = 0$

จาก $s'(t) = v(t) = at$

จะได้ $s(t) = \int at\,dt$

$= \frac{at^2}{2} + c_2$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $s(0) = 0$

ดังนั้น $\frac{a(0)^2}{2} + c_2 = 0$

จะได้ $c_2 = 0$

นั่นคือ $s(t) = \frac{at^2}{2}$

53. 1) ความสูงของดาดฟ้าตึกมีค่าเท่ากับความสูงของวัตถุจากพื้นดินขณะเวลา 0 วินาที

ดังนั้น ความสูงของดาดฟ้าตึก คือ $s(0)=-4.9(0^2)-0+20=20$ เมตร

2) จาก $s(t) = -4.9t^2 - t + 20$

จะได้ $v(t) = s'(t)$

$= -9.8t - 1$

ดังนั้น ความเร็วต้นของวัตถุ คือ $v(0)=-9.8(0)-1=-1$ เมตรต่อวินาที

3) ขั้นแรกหาเวลาขณะที่วัตถุมีความเร็ว -10.8 เมตรต่อวินาที

เนื่องจาก $v(t) = -9.8t - 1$

จะได้ $-10.8 = -9.8t - 1$

นั่นคือ $t = 1$ วินาที

จาก $s(t) = -4.9t^2 - t + 20$

จะได้ $s(1) = -4.9(1)^2 - (1) + 20$

$= 14.1$ เมตร

ดังนั้น ขณะที่วัตถุมีความเร็ว -10.8 เมตรต่อวินาที วัตถุอยู่สูงจากพื้นดิน 14.1 เมตร

54. ให้ a_1, v_1 และ s_1 แทนฟังก์ชันแสดงความเร่ง ความเร็ว และตำแหน่ง ของรถยนต์คันหน้า ขณะเวลา t ชั่วโมง ตามลำดับ

และ a_2, v_2 และ s_2 แทนฟังก์ชันแสดงความเร่ง ความเร็ว และตำแหน่ง ของรถยนต์คันหลัง ขณะเวลา t ชั่วโมง ตามลำดับ

เมื่อกำหนดให้ขณะเวลาที่คนขับรถยนต์ทั้งสองคันเร่งเครื่อง เป็นเวลา $t=0$ ชั่วโมง

จะได้ $v_1(0) = v_2(0) = 40$

เนื่องจาก คนขับรถยนต์คันหน้าขับด้วยความเร่ง 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมง^2

จะได้ $a_1(t) = 40$

เนื่องจาก คนขับรถยนต์คันหลังขับด้วยความเร่ง 90 กิโลเมตรต่อชั่วโมง^2

จะได้ $a_2(t) = 90$

จาก $v(t) = \int a(t)\,dt$

จะได้ $v_1(t) = \int 40\,dt = 40t + c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

และ $v_2(t) = \int 90\,dt = 90t + c_2$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $v_1(0) = v_2(0) = 40$

จะได้ $v_1(t) = 40t + 40$ และ $v_2(t) = 90t + 40$

จาก $s(t) = \int v(t)\,dt$

จะได้ $s_1(t) = \int (40t + 40)\,dt = 20t^2 + 40t + k_1$ เมื่อ k_1 เป็นค่าคงตัว

และ $s_2(t) = \int (90t + 40)\,dt = 45t^2 + 40t + k_2$ เมื่อ k_2 เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $s_1(t) - s_2(t) = \left(20t^2 + 40t + k_1\right) - \left(45t^2 + 40t + k_2\right) = -25t^2 + (k_1 - k_2)$

เนื่องจากขณะเวลา $t = 0$ ชั่วโมง รถยนต์ทั้งสองอยู่ห่างกัน $\frac{1}{36}$ กิโลเมตร

จะได้ $k_1 - k_2 = \frac{1}{36}$

นั่นคือ $s_1(t) - s_2(t) = -25t^2 + \frac{1}{36}$

จะได้ว่า เมื่อเวลาผ่านไป 2 นาที

$$s_1\left(\frac{2}{60}\right) - s_2\left(\frac{2}{60}\right) = -25\left(\frac{2}{60}\right)^2 + \frac{1}{36} = 0 \text{ กิโลเมตร}$$

นั่นคือ เมื่อเวลาผ่านไป 2 นาที หากคนขับรถยนต์ทั้งสองคันไม่ลดความเร่ง รถคันหลังจะชนคันหน้า

55. 1) $\int \left(x^3 - 3x^2 + 3\right)dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + 3x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1} \left(x^3 - 3x^2 + 3\right)dx &= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + 3x\right)\Bigg|_{-2}^{1} \\ &= \left(\frac{(1)^4}{4} - (1)^3 + 3(1)\right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - (-2)^3 + 3(-2)\right) \\ &= -\frac{15}{4}\end{aligned}$$

2) $\int \left(4 - 5x^4\right)dx = 4x - x^5 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int_{1}^{3} \left(4 - 5x^4\right)dx &= \left(4x - x^5\right)\Big|_{1}^{3} \\ &= \left(4(3) - (3)^5\right) - \left(4(1) - 1^5\right) \\ &= -234\end{aligned}$$

3) $$\int\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+c$$

$$= \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{2}{\sqrt{x}}+c$$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $$\int_1^4\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = \left.\left(\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right|_1^4$$

$$= \left(\frac{2(4)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{2}{\sqrt{4}}\right)-\left(\frac{2(1)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{2}{\sqrt{1}}\right)$$

$$= \frac{57}{5}$$

4) $$\int(x+1)(x+3)dx = \int\left(x^2+4x+3\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3}+4\left(\frac{x^2}{2}\right)+3x+c$$

$$= \frac{x^3}{3}+2x^2+3x+c$$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $$\int_{-1}^{1}(x+1)(x+3)dx = \left.\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+3x\right)\right|_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1^3}{3}+2(1)^2+3(1)\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}+2(-1)^2+3(-1)\right)$$

$$= \frac{20}{3}$$

5) เนื่องจาก $$\frac{x-1}{x+\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

$$= 1-x^{-\frac{1}{2}}$$

จะได้ $\int \frac{x-1}{x+\sqrt{x}}dx = \int\left(1-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$= x-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$

$= x-2\sqrt{x}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $\int_4^9 \frac{x-1}{x+\sqrt{x}}dx = \left(x-2\sqrt{x}\right)\Big|_4^9$

$= \left(9-2\sqrt{9}\right)-\left(4-2\sqrt{4}\right)$

$= 3$

6) เนื่องจาก $|x+2| = x+2$ เมื่อ $x \geq -2$

จะได้ $\int |x+2|dx = \int (x+2)dx$

$= \frac{x^2}{2}+2x+c$ เมื่อ $x \geq -2$ และ c เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $\int_{-2}^{1} |x+2|dx = \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-2}^{1}$

$= \left(\frac{1^2}{2}+2(1)\right)-\left(\frac{(-2)^2}{2}+2(-2)\right)$

$= \frac{9}{2}$

7) $\int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}\right)dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+c$

$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $\int_{1}^{64}\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}\right)dx = \left.\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}\right)\right|_{1}^{64}$

$$= \left(\frac{2(64)^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{3(64)^{\frac{4}{3}}}{4}\right)-\left(\frac{2(1)^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{3(1)^{\frac{4}{3}}}{4}\right)$$

$$= \frac{6,383}{12}$$

8) เนื่องจาก $\frac{x-1}{x-x^{\frac{2}{3}}} = \frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)}{\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)x^{\frac{2}{3}}}$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$= 1+x^{-\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}} \quad \text{เมื่อ } x\neq 1$$

จะได้ $\int\frac{x-1}{x-x^{\frac{2}{3}}}dx = \int\left(1+x^{-\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}\right)dx$

$$= x+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+c$$

$$= x+\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}+3x^{\frac{1}{3}}+c \quad \text{เมื่อ } x\neq 1 \text{ และ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

ดังนั้น $\int_{8}^{27}\left(\frac{x-1}{x-x^{\frac{2}{3}}}\right)dx = \left.\left(x+\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}+3x^{\frac{1}{3}}\right)\right|_{8}^{27}$

$$= \left(27+\frac{3(27)^{\frac{2}{3}}}{2}+3(27)^{\frac{1}{3}}\right)-\left(8+\frac{3(8)^{\frac{2}{3}}}{2}+3(8)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \frac{59}{2}$$

56. 1) กราฟของ $f(x)=-3x+7$ เป็นเส้นตรง และ $f(x)\geq 0$ สำหรับทุก $x\in[-5, 2]$

ให้ A แทนพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=-3x+7$ กับแกน X จาก $x=-5$ ถึง $x=2$

เนื่องจาก $f(x)\geq 0$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[-5, 2]$

จะได้ $A = \int_{-5}^{2}(-3x+7)dx = \left(\frac{-3x^2}{2}+7x\right)\Big|_{-5}^{2} = \frac{161}{2}$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=-3x+7$ กับแกน X จาก $x=-5$ ถึง $x=2$ เท่ากับ $\frac{161}{2}$ ตารางหน่วย

2) กราฟของ $f(x)=3x^2-2x-1$ เป็นรูปพาราโบลาหงาย

และ $f(x)\geq 0$ สำหรับทุก $x\in[1, 3]$

ให้ A แทนพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=3x^2-2x-1$ กับแกน X จาก $x=1$ ถึง $x=3$

เนื่องจาก $f(x)\geq 0$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[1, 3]$

จะได้ $A = \int_{1}^{3}(3x^2-2x-1)dx = (x^3-x^2-x)\Big|_{1}^{3} = 16$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=3x^2-2x-1$ กับแกน X จาก $x=1$ ถึง $x=3$ เท่ากับ 16 ตารางหน่วย

3) กราฟของ $f(x)=12-x-x^2$ เป็นรูปพาราโบลาคว่ำ

และ $f(x)\leq 0$ สำหรับทุก $x\in[-6, -4]$

ให้ A แทนพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=12-x-x^2$ กับแกน X จาก $x=-6$ ถึง $x=-4$

เนื่องจาก $f(x)\leq 0$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[-6, -4]$

จะได้ $A = -\int_{-6}^{-4}(12-x-x^2)dx = -\left(12x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-6}^{-4} = \frac{50}{3}$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=12-x-x^2$ กับแกน X จาก $x=-6$ ถึง $x=-4$ เท่ากับ $\frac{50}{3}$ ตารางหน่วย

57. ขั้นแรกหาพิกัดของจุด A

เนื่องจากจุด A เป็นจุดที่เส้นโค้ง $f(x)=-4x^2+16$ ตัดกับแกน X

ให้ $y=0$ จะได้ $4x^2=16$ นั่นคือ $x=-2$ หรือ $x=2$

ดังนั้น พิกัดของจุด A คือ $(2,0)$

ต่อไปหาพิกัดของจุด B

เนื่องจากจุด B เป็นจุดที่เส้นโค้ง $f(x)=-4x^2+16$ ตัดกับแกน Y

ให้ $x=0$ จะได้ $y=16$

ดังนั้น พิกัดของจุด B คือ $(0,16)$

เนื่องจาก $f(x)\geq 0$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[0,2]$

จะได้ พื้นที่ส่วนที่แรเงา $= \int_0^2 \left(-4x^2+16\right)dx - \frac{1}{2}(2)(16)$

$$= \left(\frac{-4x^3}{3}+16x\right)\Bigg|_0^2 - \frac{1}{2}(2)(16)$$

$$= \frac{16}{3} \text{ ตารางหน่วย}$$

58. ให้ $s(t)$ แทนระยะทางที่รถบรรทุกเคลื่อนที่ไปได้ในเวลา t ชั่วโมง

และ $v(t)$ แทนอัตราเร็วของรถบรรทุก ณ เวลา t ชั่วโมง

ต้องการหาค่าของ $s\left(\frac{49}{60}\right)$

เนื่องจาก $s(t)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $v(t)$

จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส จะได้ว่า $s\left(\frac{49}{60}\right)-s(0)=\int_0^{\frac{49}{60}} v(t)\,dt$

เนื่องจาก

$\int_0^{\frac{49}{60}} v(t)\,dt$ = พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ v บนช่วง $\left[0,\frac{49}{60}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{20}{60}\right)(70)+\frac{1}{2}\left(\frac{(49-25)+(47-27)}{60}\right)(60)+\frac{1}{2}\left(\frac{(47-35)+(45-38)}{60}\right)(20)$$

$$\approx 25.33$$

และ $s(0)=0$

จะได้ $s\left(\frac{49}{60}\right) \approx$ 25.33 กิโลเมตร

เนื่องจาก $25.33 \times 15 \approx 380$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่า 450

ดังนั้น พรนภาต้องจ่ายเงินค่าขนย้าย 380 บาท

59. จาก $f''(x) = 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

จะได้ $f'(x) = \int f''(x)\,dx$

$= \int 0\,dx$

$= c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $f(x) = \int f'(x)\,dx$

$= \int c_1\,dx$

$= c_1x + c_2$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $f(-1) = 0$

ดังนั้น $-c_1 + c_2 = 0$

นั่นคือ $c_2 = c_1$

เนื่องจาก $f(1) = 4$

ดังนั้น $c_1 + c_1 = 4$

นั่นคือ $c_1 = 2$

จะได้ $f(x) = 2x + 2$

เนื่องจาก $\int f(x)\,dx = \int (2x+2)\,dx$

$= 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + 2x + c$

$= x^2 + 2x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

จะได้ว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 2x + 2$ คือ $F(x) = x^2 + 2x + c$

ดังนั้น $\int_1^2 f(x)\,dx = \left(x^2 + 2x\right)\Big|_1^2$

$= \left(2^2 + 2(2)\right) - \left(1^2 + 2(1)\right)$

$= 5$

60. จาก $F(x) = ax^2 + x + 1$

จะได้ $F'(x) = 2ax + 1$

นั่นคือ $F'(1) = 2a + 1$

เนื่องจาก ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = F(x)$ เมื่อ $x = 1$ คือ 5

ดังนั้น
$$\begin{aligned} F'(1) &= 5 \\ 2a+1 &= 5 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

นั่นคือ $F(x) = 2x^2 + x + 1$

และ $f(x) = F'(x) = 4x + 1$

เนื่องจาก $4x+1 \le 0$ บนช่วง $\left[-1, -\frac{1}{4}\right]$ และ $4x+1 \ge 0$ บนช่วง $\left[-\frac{1}{4}, 1\right]$

ดังนั้น พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 1$ คือ

$$\begin{aligned} -\int_{-1}^{-\frac{1}{4}} f(x)dx + \int_{-\frac{1}{4}}^{1} f(x)dx &= -F(x)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{4}} + F(x)\Big|_{-\frac{1}{4}}^{1} \\ &= -\left(2x^2+x+1\right)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{4}} + \left(2x^2+x+1\right)\Big|_{-\frac{1}{4}}^{1} \\ &= -\left[\left(2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)+1\right) - \left(2(-1)^2+(-1)+1\right)\right] \\ &\quad + \left[\left(2(1)^2+(1)+1\right) - \left(2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)+1\right)\right] \\ &= -\left(\frac{7}{8}-2\right) + \left(4-\frac{7}{8}\right) \\ &= 2 \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

61. เนื่องจาก $f(x) \ge 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

จึงได้ว่า สำหรับจำนวนจริง a, b โดยที่ $0 \le a \le b$ พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$

จาก $x = a$ ถึง $x = b$ มีค่าเท่ากับ $\int_a^b f(x)dx$

เนื่องจากกราฟของ f มีแกน Y เป็นแกนสมมาตร

จะได้ว่า $f(-x)=f(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ดังนั้น พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=f(x)$ จาก $x=a$ ถึง $x=b$ มีค่าเท่ากับ พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=f(x)$ จาก $x=-b$ ถึง $x=-a$

นั่นคือ $\int_a^b f(x)dx=\int_{-b}^{-a} f(x)dx$ สำหรับทุกจำนวนจริง a,b ที่ $0\le a\le b$

นอกจากนี้ สังเกตว่า ถ้า $f(x)\ge 0$ บนช่วงปิด $[a,b]$ และ $c\in[a,b]$

จะได้ พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=f(x)$ กับแกน X จาก $x=a$ ถึง $x=b$

$$= \int_a^b f(x)dx$$

$$= \int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} f(x)dx &= \int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{2} f(x)dx\\ &= \int_{0}^{1} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{2} f(x)dx\\ &= 2\int_{0}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{2} f(x)dx\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\int_{-1}^{2} f(x)dx=12$ และ $\int_{0}^{1} f(x)dx=3$

จะได้ $12 = 2(3)+\int_{1}^{2} f(x)dx$

นั่นคือ $\int_{1}^{2} f(x)dx = 6$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} f(x)dx &= \int_{-2}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^{2} f(x)dx\\ &= \int_{1}^{2} f(x)dx+\int_{-1}^{2} f(x)dx\\ &= 6+12\\ &= 18\end{aligned}$$

62. 1) จาก $W'(t) = -\frac{t}{40}$

จะได้ $W(t) = \int -\frac{t}{40}dt$

$= -\frac{t^2}{80}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $W(t)$ คือปริมาณน้ำในถัง ณ เวลา t นาที

ดังนั้น ปริมาณน้ำที่ไหลออกตั้งแต่เวลา $t=0$ ถึง $t=15$ นาที คือ

$$W(0)-W(15) = \left(-\frac{0^2}{80}+c\right)-\left(-\frac{15^2}{80}+c\right)$$

$= \frac{45}{16}$ แกลลอน

2) จาก $W(t) = -\frac{t^2}{80}+c$ และ $W(0) = 320$

จะได้ $-\frac{0^2}{80}+c = 320$

นั่นคือ $c = 320$

จะได้ $W(t) = -\frac{t^2}{80}+320$

เนื่องจาก $W(t)=0$ เมื่อ $t=\sqrt{320\cdot 80}=160$

ดังนั้น ต้องใช้เวลา 160 นาที น้ำจึงจะไหลออกทั้งหมด

63. 1) ให้ $P(t)$ แทนจำนวนประชากรโลก (มีหน่วยเป็นล้านคน) ในปี ค.ศ. t

จะได้ $P'(t) = p(t)$

$= -0.012t^2+48t-47,925$

ดังนั้น $P(t) = \int\left(-0.012t^2+48t-47,925\right)dt$

$= -0.004t^3+24t^2-47,925t+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เนื่องจากใน ค.ศ. 2017 มีจำนวนประชากรโลกประมาณ 7,500 ล้านคน ดังนั้น

$$P(2017) = 7,500$$

$$-0.004(2017)^3+24(2017)^2-47,925(2017)+c = 7,500$$

นั่นคือ $c = 31,856,245$

จะได้ $P(t) = -0.004t^3+24t^2-47,925t+31,856,245$

2) เนื่องจาก

$$P(2050) = -0.004(2050)^3 + 24(2050)^2 - 47,925(2050) + 31,856,245$$
$$= 9,495$$

ดังนั้น จำนวนประชากรโลกใน ค.ศ. 2050 มีอยู่ประมาณ 9,495 ล้านคน

64. จาก $\frac{dG}{dP} = -\frac{P}{25} + 2$

จะได้ $G = \int\left(-\frac{P}{25} + 2\right)dP$

$= -\frac{P^2}{50} + 2P + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $G = 38$ เมื่อ $P = 10$

จะได้ $38 = -\frac{(10)^2}{50} + 2(10) + c$

นั่นคือ $c = 20$

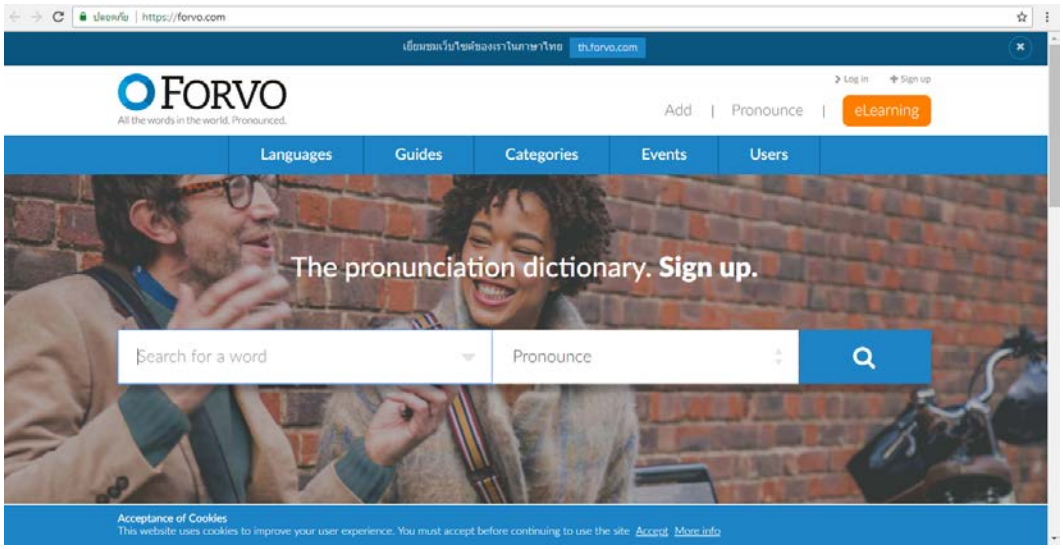
จึงได้ว่า $G = -\frac{P^2}{50} + 2P + 20$

ดังนั้น ถ้าในโปรตีนผสมสูตรพิเศษมียีสต์อยู่ร้อยละ 75 หนูจะมีน้ำหนักเพิ่มขึ้น

$-\frac{(75)^2}{50} + 2(75) + 20 = 57.5$ กรัม

แหล่งเรียนรู้เพิ่มเติม

forvo.com เป็นเว็บไซต์ที่รวบรวมการออกเสียงคำในภาษาต่าง ๆ ก่อตั้งขึ้นเมื่อ ค.ศ. 2008 โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อพัฒนาการสื่อสารทางการพูด ผ่านการแลกเปลี่ยนการออกเสียงคำในภาษาต่าง ๆ ทั้งจากบุคคลที่เป็นเจ้าของภาษาและบุคคลที่ไม่ใช่เจ้าของภาษา forvo.com ได้รับคัดเลือกจากนิตยสาร Times ให้เป็น 50 เว็บไซต์ที่ดีที่สุดใน ค.ศ. 2013 (50 best websites of 2013) ปัจจุบันเว็บไซต์นี้เป็นฐานข้อมูลที่รวบรวมการออกเสียงที่ใหญ่ที่สุด มีคลิปเสียงที่แสดงการออกเสียงคำศัพท์ประมาณสี่ล้านคำในภาษาต่าง ๆ มากกว่า 330 ภาษา



ครูอาจใช้เว็บไซต์ forvo.com เพื่อศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับการออกเสียงคำศัพท์คณิตศาสตร์หรือชื่อนักคณิตศาสตร์ในภาษาอังกฤษหรือภาษาอื่น ๆ ที่ปรากฏในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 ได้ เช่น finite sequence และ infinite sequence ซึ่งเป็นคำศัพท์คณิตศาสตร์ในภาษาอังกฤษ หรือ Fibonacci ซึ่งเป็นชื่อนักคณิตศาสตร์ชาวอิตาเลียน

บรรณานุกรม

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. (2542). *แคลคูลัส เล่มที่ 1*. กรุงเทพฯ: พิทักษ์การพิมพ์.

มาริสา มัยยะ และ วันเพ็ญ จันทรังษี. (2550). *แคลคูลัส I*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แสงสว่าง เวิลด์เพรส.

วิชาญ ลิ่วกีรติยุตกุล. (2562). *คณิตวิเคราะห์*. กรุงเทพฯ: วิสคอมเซ็นเตอร์.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2558). *คู่มือครูรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2563). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 ตามผลการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2558). *หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *หนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริมศักยภาพคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 แคลคูลัสเบื้องต้น*. กรุงเทพฯ: พัฒนาคุณภาพวิชาการ.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *หนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริมศักยภาพคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 ลำดับและอนุกรม*. กรุงเทพฯ: พัฒนาคุณภาพวิชาการ.

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน. (2560). *ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.

คณะผู้จัดทำ

คณะที่ปรึกษา

ศ. ดร.ชูกิจ ลิมปิจำนงค์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.ศรเทพ วรรณรัตน์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.วนิดา ธนประโยชน์ศักดิ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะผู้จัดทำคู่มือครู

ว่าที่ร้อยเอก ดร.ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปฐมาภรณ์ อวชัย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวอัมริสา จันทนะศิริ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายพัฒนชัย รวิวรรณ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวภิญญดา กลับแก้ว	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.ศศิวรรณ เมลืองนนท์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.สุธารส นิลรอด	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายกฤษณะ ป้อมดี	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.จิณณวัตร เจตน์จรุงกิจ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.จุฬาลักษณ์ แก้วหวังสกูล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายทศธรรม เมขลา	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปรารถนา วิริยธรรมเจริญ	โรงเรียนพระปฐมวิทยาลัย จังหวัดนครปฐม
นายสถิตพงษ์ เพ็ชรถึง	โรงเรียน มอ.วิทยานุสรณ์ จังหวัดสงขลา
นางสุธิดา นานช้า	โรงเรียนย่านตาขาวรัฐชนูปถัมภ์ จังหวัดตรัง
นายสุบรรณ ตั้งศรีเสรี	โรงเรียนบุญวัฒนา จังหวัดนครราชสีมา

คณะผู้พิจารณาคู่มือครู

นายประสาท สอ้านวงศ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
รศ. ดร.สมพร สูตินันท์โอภาส	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจินตนา อารยะรังสฤษฎ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจำเริญ เจียวหวาน	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสุเทพ กิตติพิทักษ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.สุพัตรา ผาติวิสันติ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.อลงกรณ์ ตั้งสงวนธรรม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ผศ. ตีรวิชช์ ทินประภา	มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา กรุงเทพฯ
ผศ. ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย	มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา กรุงเทพฯ
ดร.นิธิ รุ่งธนาภิรมย์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพฯ

บรรณาธิการ

รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ฝ่ายสนับสนุนวิชาการ

นางสาวขวัญใจ ภาสพันธุ์	โรงเรียนราชวินิตบางเขน กรุงเทพฯ
นายณรงค์ฤทธิ์ ฉายา	โรงเรียนสาธิตแห่งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ศูนย์วิจัยและพัฒนาการศึกษา กรุงเทพฯ
นายถนอมเกียรติ งานสกุล	โรงเรียนสตรีภูเก็ต จังหวัดภูเก็ต
นางนงนุช ผลทวี	โรงเรียนทับปุดวิทยา จังหวัดพังงา
นางมยุรี สาลีวงศ์	โรงเรียนสตรีสิริเกศ จังหวัดศรีสะเกษ
นางสาวศราญลักษณ์ บุตรรัตน์	โรงเรียนบางละมุง จังหวัดชลบุรี
นายศรัณย์ แสงนิลาวิวัฒน์	โรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬาภรณราชวิทยาลัย เพชรบุรี จังหวัดเพชรบุรี
ว่าที่ร้อยตรีสามารถ วนาธรัตน์	โรงเรียนเฉลิมขวัญสตรี จังหวัดพิษณุโลก
นางศุภรา ทวรรณกุล	ข้าราชการบำนาญ

นายสุกิจ สมงาม	ข้าราชการบำนาญ
นางสุปราณี พ่วงพี	ข้าราชการบำนาญ
นายชัยรัตน์ สุนทรประพี	นักวิชาการอิสระ
นางสาวปิยาภรณ์ ทองมาก	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ฝ่ายนวัตกรรมเพื่อการเรียนรู้	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ